10 Papierfalten und fraktale Kurven

klassische, 100 Jahre alte Kurven

In diesem Kapitel werden wir die bisherige Betrachtungsweise umkehren, denn wir wollen nicht neue Eigenschaften des Papierfaltens entdecken, sondern untersuchen, ob wir mit einem modifizierten Papierfalten bereits bekannte fraktale Kurven erzeugen können. Dabei werden wir drei klassische Kurven untersuchen, die vor ungefähr 100 Jahren konstruiert wurden, um spezielle mathematische Eigenschaften zu demonstrieren. Heute zählen sie zu den klassischen Fraktalen.

In allen drei Fällen ist die eigentlich gemeinte Kurve der unendliche Grenzwert eines iterativen Konstruktionsprozesses. Diese Kurven lassen sich natürlich nicht durch Papierfalten erzeugen. Es geht in allen drei Fällen um die endlichen Stufen auf dem Weg zu dieser Grenzfigur. Wir werden allerdings sprachlich nicht sehr präzise zwischen endlicher Kurve und unendlicher Grenzkurve unterscheiden.

Ich möchte die Kurven und ihre Konstruktion auf die Art vorstellen, wie es Mandelbrot in seinem Buch „Die fraktale Geometrie der Natur“ macht: Durch Initiator und Generator. Das ist hier immer eine Ersetzungsregel für die bisher vorhandenen Kanten.

Die Sierpinski-Pfeilspitze

Die erste Kurve, die wir betrachten wollen, geht auf den polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski zurück. Von daher wäre es nahe liegend, diese Kurve „Sierpinski-Kurve“ zu nennen, doch hat Sierpinski vorher schon weitere Kurvenkonstruktionen vorgestellt, so dass dieser Name bereits vergeben ist. Daher hat sich für die Kurve, die wir nun betrachten wollen, der Name Sierpinski-Pfeilspitze eingebürgert. Sie wurde 1915 veröffentlicht als eine Kurve, die sich in unendlich vielen Punkten selbst berührt. Zur Konstruktion verwendete Sierpinski, sozusagen als Gerüst, ein Dreieck, das er fortgesetzt durch Mittendreiecke einteilte und das heute als Sierpinski-Dreieck bekannt ist. Interessanter Weise haben beide Konstruktionen, über das Dreieck und über die Kurve, denselben Grenzwert.

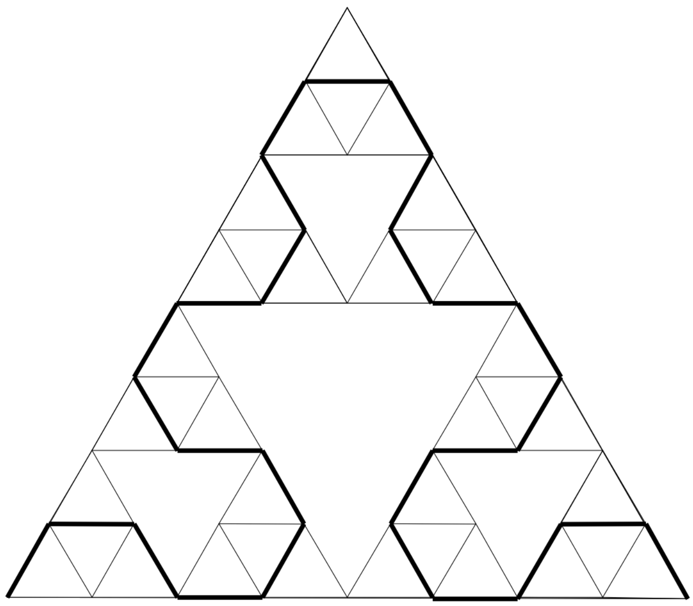

Abb. 10.1: Konstruktion der 3. Stufe der Sierpinski-Pfeilspitze auf dem entsprechenden Dreieck

Initiator und Generator

Wir erzeugen nun schrittweise die ersten vier Stufen der Sierpinski-Pfeilspitze mit dem Initiator-Generator-Paar.

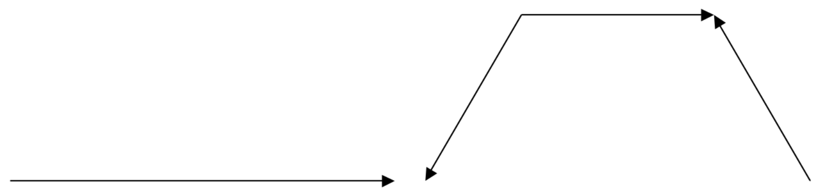

Abb. 10.2: Initiator und Generator für die Sierpinski-Pfeilspitze

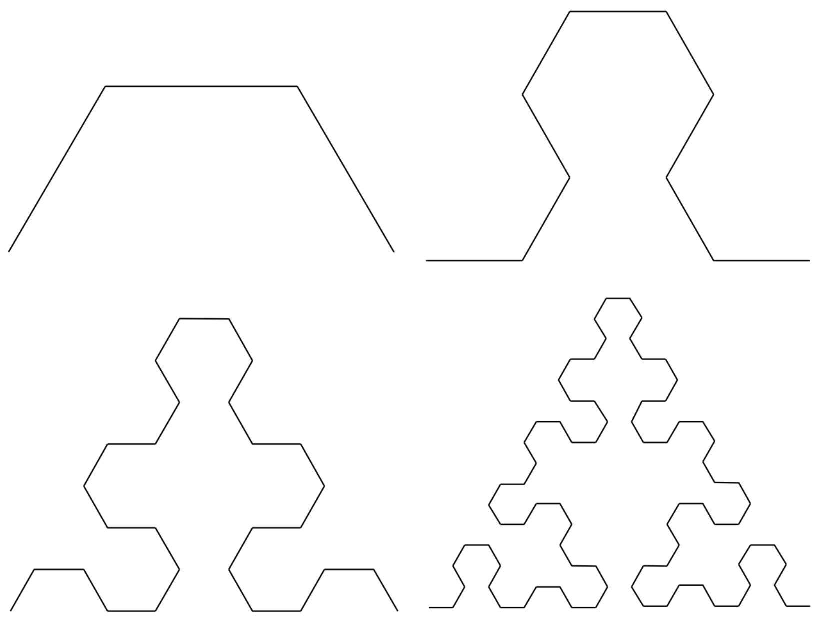

Abb. 10.3: Die 1. bis 4. Stufe für die Erzeugung der Sierpinski-Pfeilspitze

Die Faltvorschrift

Aus dem Generator können wir sofort eine Instruktion für das Falten gewinnen. Zum einen sehen wir, dass wir den Streifen dritteln müssen, zum anderen werden zwei Rechtsknicke benötigt, also müssen wir die beiden äußeren Drittel <u>unter</u> das mittlere falten.

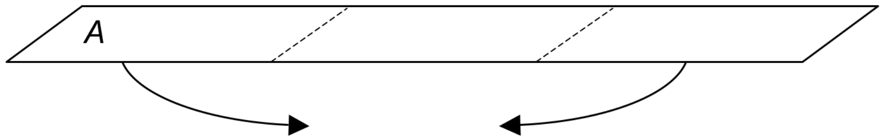

Abb. 10.4: Der Faltvorgang für die Sierpinski-Pfeilspitze

Wir setzen das Falten iterativ fort, indem immer die äußeren Drittel unter das mittlere gefaltet werden. Um uns gleich auf die geometrische Interpretation zu konzentrieren, achten wir beim Auffalten darauf, dass die Streifenabschnitte einen Winkel von 120° bilden. Mit einem normal langen Streifen (lange Seite eines DIN A4-Streifens) kann man die 3. Stufe gut realisieren.

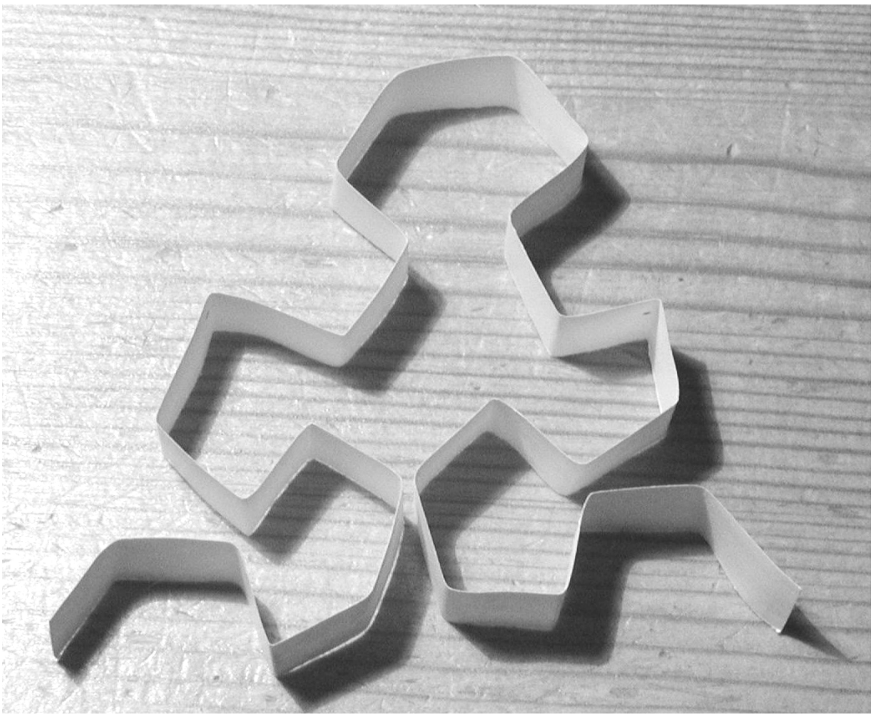

Abb. 10.5: Die 3.Stufe der Sierpinski-Pfeilspitze

Für die weiteren Untersuchungen, insbesondere in Hinblick auf die drei zentralen Gesetzmäßigkeiten Reflexions-, Inflationsgesetz und Toeplitz-Konstruktion, notieren wir nun die Knickfolgen.

1.Stufe: RR

2.Stufe: LLRRRRLL

3.Stufe: RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRR

4.Stufe: LLRRRRLLLRRLLLLRRLLLRRRRLLRRRLLLLRRRLLRRRRLL...

Wir erkennen sofort, dass die Gesetze des „einfachen“ Papierfaltens, das zum Heighway-Drachen führt, hier nicht gelten. Also besinnen wir uns darauf, wie wir die Gesetze gefunden hatten.

Das Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz hatten wir erkannt, indem wir den letzten Auffaltungsschritt genau analysiert haben.

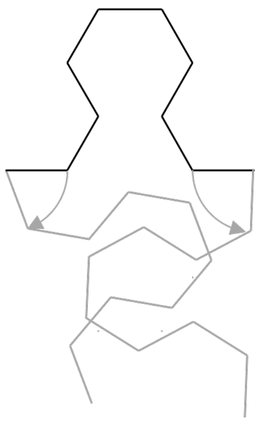

Abb. 10.6: Aus dem mittleren Drittel (schwarz) werden nach links und rechts je ein Drittel (grau) herausgeklappt

Da wir hier beim Falten dritteln, gibt es beim Auffalten immer zwei Teile, die sowohl vor als auch hinter das vorhandene Teil herausgeklappt werden. Das können wir auch in den Symbolfolgen wieder finden. Betrachten wir die 2. und 3. Stufe. Die „Gelenke“ für das Herausklappen sind laut Abb. 10.6 Rechtskurven, die die drei Drittel voneinander trennen sollten.

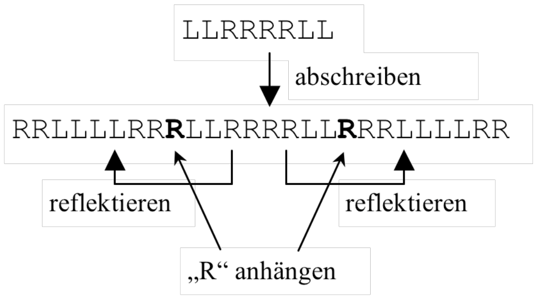

Abb. 10.7: Der Reflexionsvorgang für die Sierpinski-Pfeilspitze, demonstriert am Übergang von der 2. zur 3. Stufe

Der Reflexionsprozess

Damit erhält der Reflexionsprozess für die Sierpinski-Pfeilspitze folgende Form: Man nimmt die Knickfolge der letzten Stufe, schreibt davor und dahinter ein „R“ und reflektiert die Knickfolge der letzten Stufe an diesen beiden „R“ - einmal nach links vor und dann nach rechts hinter die vorhandene Zeichenkette.

Das Inflationsgesetz

Das Inflationsgesetz ergab sich daraus, dass wir das Falten eines Schrittes genau analysiert hatten. Auf Grund unserer Kenntnisse um den Inflationsprozess ganz allgemein und den hier durchgeführten Faltvorgang können wir jetzt schon sagen, dass immer zwei „L“ oder zwei „R“ eingefügt werden. Wenn wir dann die Symbole der vorhergehenden Stufe fett hervorheben, erhalten wir für den Übergang von der 2. zur 3. Stufe:

2.Stufe: LLRRRRLL

3.Stufe: RR**L**LL**L**RR**R**LL**R**RR**R**LL**R**RR**L**LL**L**RR

Wir finden hier also unsere Vermutung bestätigt. Wenn wir die Knickfolgen für die 1. bis 4. Stufe anschauen, so sehen wir aber, dass der Inflationsprozess für gerade Stufennummern mit einem Doppel-„L“ beginnt und für ungerade mit einem Doppel-„R“. So können wir für den Inflationsprozess zunächst rein deskriptiv festhalten:

Der Inflationsprozess

Man zieht die Symbole der vorhergehenden Stufe auseinander und fügt vor, in die Lücken und hinter die Symbole abwechselnd „LL“ und „RR“ ein. Dabei beginnt man beim Übergang von einer geraden zu einer ungeraden Stufennummer mit „RR“, im anderen Fall mit „LL“.

Natürlich erhebt sich die Frage, warum es beim Falten der Sierpinski-Pfeilspitze zu dem abwechselnden Start des Einfügeprozesses mit „LL“ bzw. „RR“ kommt. Das kann man am realen Papierstreifen verdeutlichen. Beim ersten Falten des Streifens befindet sich die Anfangsmarke wie immer links. Durch das Falten der äußeren Drittel unter das mittlere entstehen Rechtsknicke, da man ja links an der Anfangsmarke losläuft.

Begründung für den Wechsel beim Einfügen

Liegen nun für den nächsten Kickvorgang die ersten drei Abschnitte übereinander, so befindet sich die Anfangsmarke rechts. Das Falten der beiden äußeren Drittel unter das mittlere erzeugt nun als erste beiden Knicke zwei Linksknicke, da wir ja von der Anfangsmarke nach links laufen.

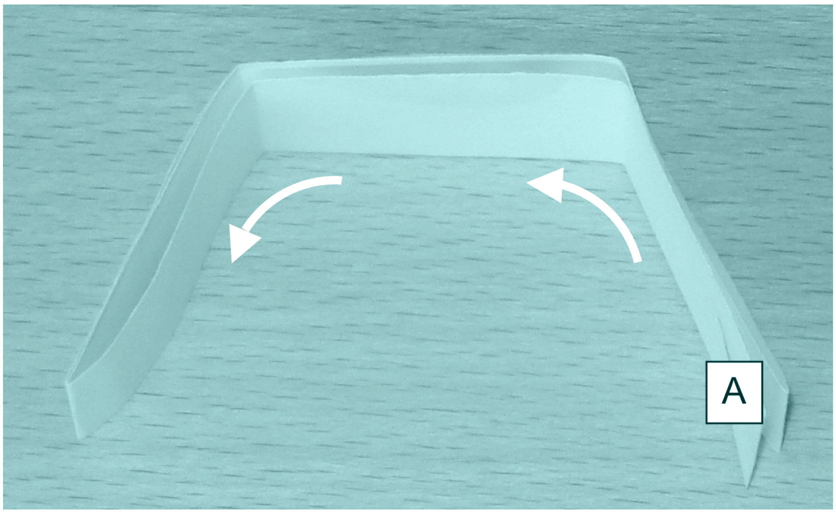

Abb. 10.8: Von der Anfangsmarke auf der rechten Seite durchläuft man zuerst zwei neue Linkskurven

Befindet sich die Anfangsmarke beim ungefalteten Streifen (= 0.Stufe) auf der linken Seite so ist sie nach dem ersten Faltvorgang rechts und sie wechselt mit jedem Falten die Seite. Das ist der Grund dafür, dass wir immer abwechselnd den Inflationsvorgang mit einem „RR“ bzw. „LL“ beginnen müssen.

Die Toeplitz-Konstruktion

Auf die Toeplitz-Konstruktion sind wir in Kapitel 5 dadurch gekommen, dass wir ein unbekannt dickes (= unbekannte Stufe) Streifenpaket schrittweise analysieren. Wie wir gerade bei der Begründung zum Inflationsprozess gesehen haben, kann die Anfangsmarke links oder rechts am Ende des Streifenpaketes liegen.

Wir beginnen unser Experiment damit, dass das Streifenpaket eine Stufe aufgefaltet ist und die Anfangsmarke links liegt.

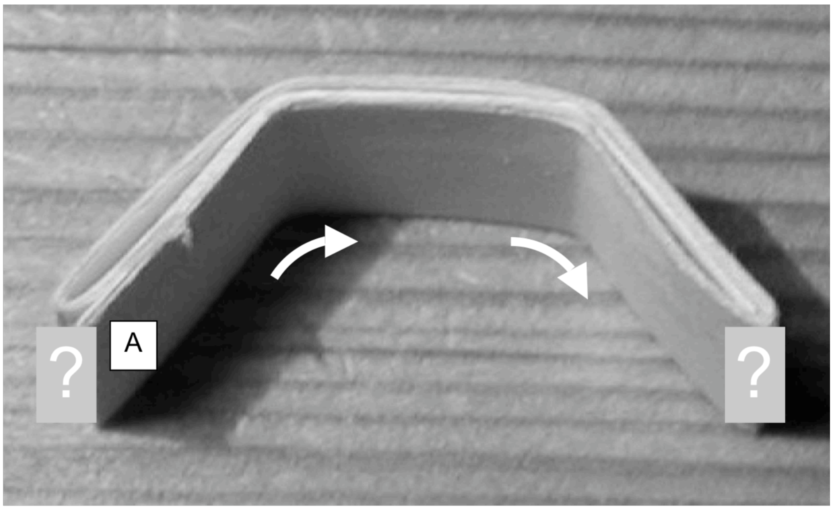

Abb. 10.9: Ein Paket, einmal aufgefaltet und mit der Anfangsmarke links

Starten wir nun unsere Analyse an der Anfangsmarke und schreiben wieder wie in Kapitel 5 ein „x“ für die Knicke in den Kehren, die wir noch nicht analysieren können, so erhalten wir für das in Abb. 10.9 vorliegende Paket:

RRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLx...

Falten wir das Paket einen Schritt weiter auf, so erhalten wir ein Streifenpaket, wie es in Abb. 10.10 dargestellt ist.

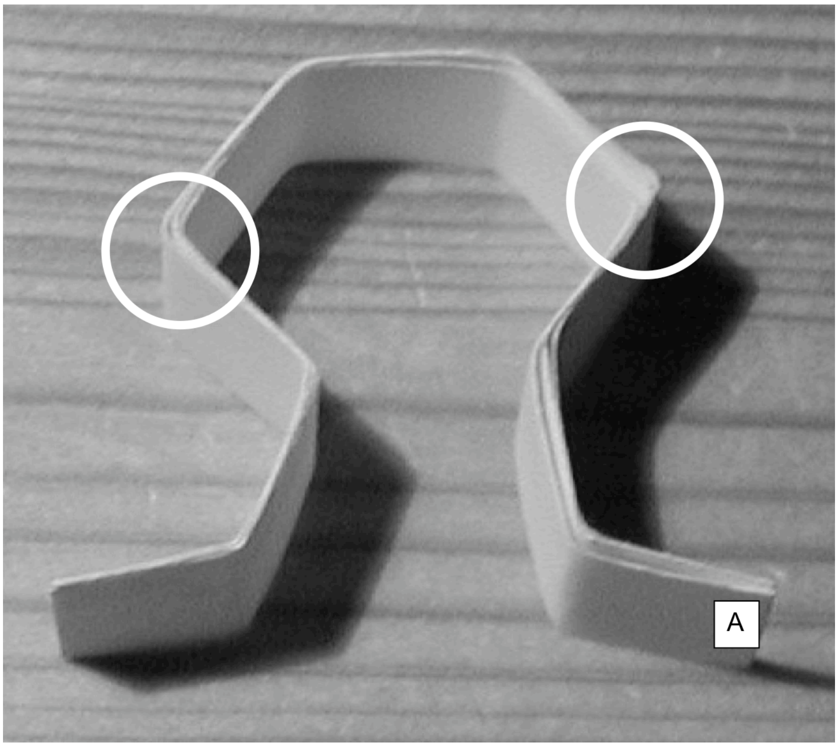

Abb. 10.10: Das Paket, ein weiteres Mal aufgefaltet. Die Anfangsmarke ist nun rechts.

Läuft man an der Anfangsmarke am rechten Ende des Streifenpaketes los, so sind die neu erkennbaren Knicke Linksknicke (siehe Kreise in Abb. 10.10.) Die „x“ der ersten Stufe sind also durch die Symbolfolge „LLxRRxLLx...“ zu ersetzen. Damit erhalten wir:

1.Stufe:	`RRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLx...`
„x“ ersetzen durch:	`L L x R R x L L x R R x...`
2.Stufe:	`RRLLLLRRxLLRRRRLLxRRLLLLRRxLLRRRRLLx...`

Auch hier haben wir durch das Hin- und Herschwingen der Anfangsmarke einen Wechsel in der Symbolfolge, die für die „x“ eingesetzt wird. Damit können wir die Töplitz-Konstruktion formulieren:

Die erste Stufe der Toeplitz-Konstruktion besteht aus der Folge

RRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLx..

Von einer ungeraden auf eine gerade Stufe geschieht das Ersetzen der „x“ durch die Symbole der Folge „LLxRRxLLxRRx...“, von einer geraden zu einer ungeraden Stufe durch „RRxLLxRRxLLx...“.

Wie auch bei der Toeplitz-Konstruktion zum Heighway-Drachen finden wir in den Symbolen bis zum ersten „x“ die Knickfolgen für die einzelnen Stufen der Sierpinski-Pfeilspitze. Allerdings nur für die ungeraden Stufen direkt, denn für die geraden Stufen beginnt ja, wie oben gesehen, die Knickfolgen mit „LL...“, während die Symbolfolgen zur Toeplitz-Konstruktion immer mit „RR...“ beginnen. Für die geraden Stufen muss man die Symbolfolge bis zum ersten „x“ reflektieren, d.h. beim „x“ beginnend lesen und „L“ und „R“ austauschen.

Damit erhalten wir für die ersten vier Stufen folgende Übersicht:

1.Stufe:	Toeplitz:	RRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLxRRxLLx...
	Symbole bis „x“:	RR
	Knickfolge:	RR
2.Stufe:	Toeplitz:	RRLLLLRRxLLRRRRLLxRRLLLLRRxLLRRRRLLx...
	Symbole bis „x“:	RRLLLLRR
	Knickfolge:	LLRRRRLL
3.Stufe:	Toeplitz:	RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRRxLLRRRRLLL...
	Symbole bis „x“:	RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRR
	Knickfolge:	RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRR
4.Stufe:	Toeplitz:	RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRRLLLRRRRLLL...
	Symbole bis „x“:	RRLLLLRRRLLRRRRLLRRRLLLLRRLLLRRRRLLL...
	Knickfolge:	LLRRRRLLLRRLLLLRRLLLRRRRLLRRRLLLLRRR...

Damit haben wir einen Überblick gewonnen, wie die drei Grundgesetze für das Papierfalten bei der Sierpinski-Pfeilspitze wirken.

Die Koch-Kurve

Die Koch-Kurve wurde 1904 von dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch veröffentlicht als ein Beispiel für eine nirgends differenzierbare Kurve.

Initiator und Generator

Der Initiator ist eine Strecke, die im Generator durch 4 neue Strecken ersetzt wird, die alle ein Drittel der ursprünglichen Länge lang sind. Alle vier Streckenabschnitte sind im Durchlaufsinn orientiert.

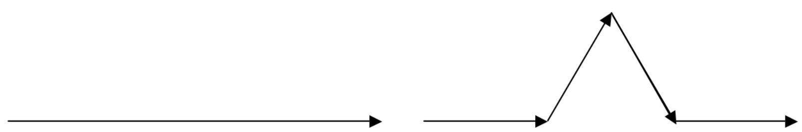

Abb. 10.11: Initiator und Generator für die Koch-Kurve

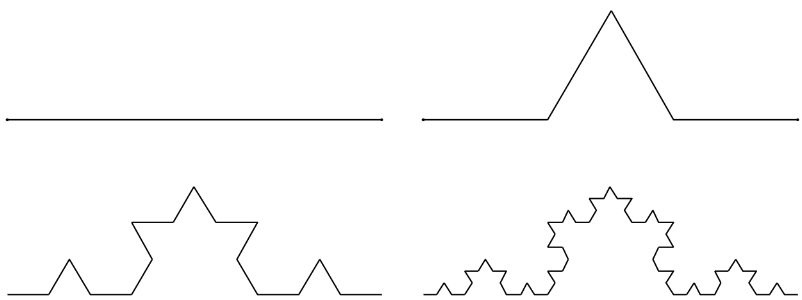

Abb. 10.12: Die 0. bis 3. Stufe für die Erzeugung der Koch-Kurve

Wie schon bei der Sierpinski-Pfeilspitze können wir dem Generator entnehmen, wie ein Papierstreifen zu knicken ist, um diese Kurve durch Papierfalten zu erzeugen. Vorteilhaft ist hier, dass wir nur halbierend knicken müssen, was sich einfach und genau durchführen lässt.

Der mittlere Knick ist ein Rechtsknick, also falten wir die rechte Hälfte unter die linke. Nun wird nur für den oben liegenden Streifenabschnitt die rechte Hälfte über die linke geknickt, der untere Streifenabschnitt ragt nun doppelt lang nach rechts heraus. Diesen Teil knicken wir auch über die drei übereinander liegenden Teile.

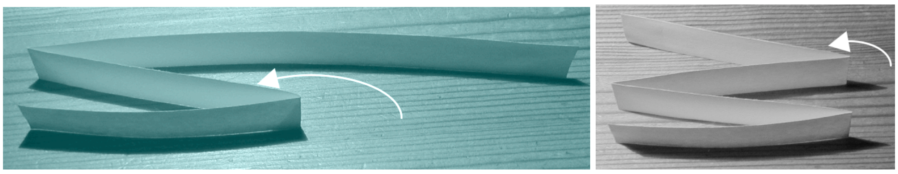

Abb. 10.13: Das Falten für die Koch-Kurve

Wenn wir den so gefalteten Papierstreifen auffalten und dabei versuchen, die 120°-(Linkskurven) bzw. 60°-Winkel (Rechtskurve) annähernd hinzubekommen, so haben wir die erste Stufe der Kochkurve gefaltet.

Für die 2. Stufe iterieren wir den Vorgang. Das Streifenpaket der 1. Stufe (vier Streifenabschnitte) wird so gehalten, dass die Anfangsmarke weiterhin in der linken Hand ist. Dann wird halbiert, rechts unter links, die obere Hälfte geviertelt, rechts über links und die überstehende untere Hälfte auch über den linken Teil geviertelt.

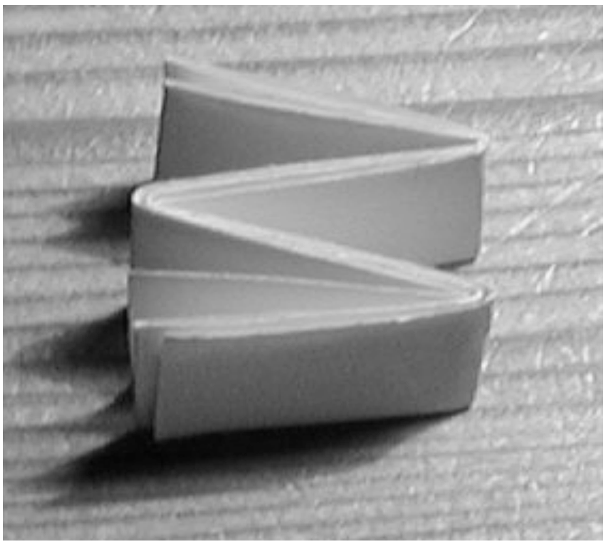

Abb. 10.14: 2. Iteration des Faltens für die Koch-Kurve

Öffnen wir nun vorsichtig das Streifenpaket und versuchen, die passenden Winkel zu formen, so sehen wir, dass wir nicht die 2. Stufe der Koch-Kurve erhalten. Im zweiten und vierten Teil weist die „Ecke“ in die falsche Richtung (siehe Abb. 10.15). Im Gegensatz zur Sierpinski-Pfeilspitze können wir also die Koch-Kurve nicht durch Papierfalten herstellen.

Diese veränderte Koch-Kurve hat allerdings die gleiche Selbstähnlichkeits-Dimension wie die originale Koch-Kurve, nämlich $\frac{\log 4}{\log 3}$ (siehe Ende Kapitel 9).

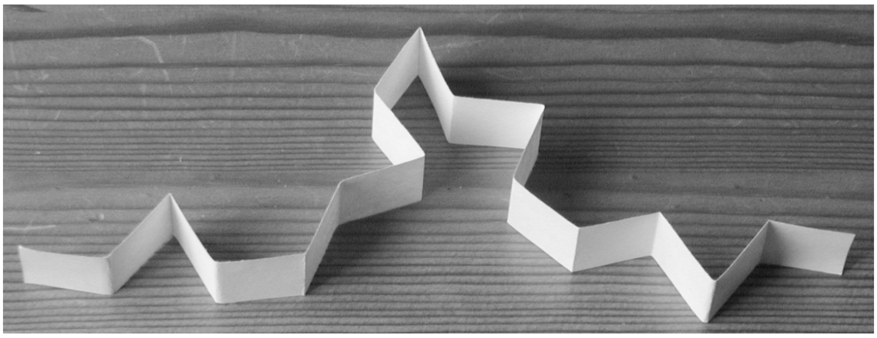

Abb. 10.15: Die aufgefaltete zweite Stufe für die Koch-Kurve

Wir wollen nun am „Generator“ als auch an den Protokollen der Knickfolgen für die Kurven erkennen, warum das so ist und wie man allgemein entscheiden kann, ob eine Kurve durch Papierfalten herstellbar ist oder nicht.

Bedingung für eine faltbare Kurve

In Kapitel 3 hatten wir das Inflationsgesetz dadurch entdeckt, dass wir uns überlegt haben, wie die geraden Streifenabschnitte verändert werden, wenn wir einen Faltungsschritt ausführen. Dabei liegen alle Streifenabschnitte übereinander und werden durch den nächsten Faltungsprozess alle in der gleichen Weise „geprägt“.

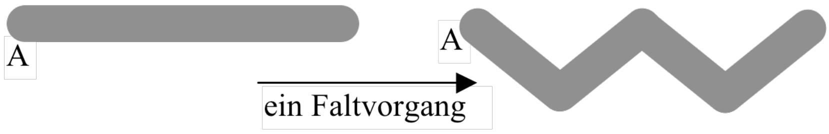

Abb. 10.16: Die „Prägung“ eines Streifenpaketes durch einen Faltvorgang

Durchläuft man nun den gesamten Papierstreifen von der Anfangsmarke, so werden die einzelnen Streifenabschnitte innerhalb des Paketes nacheinander in abwechselnder Richtung durchlaufen, von links nach rechts und dann von rechts nach links.

Notiert man die Erzeugung einer fraktalen Kurve in der Mandelbrot’schen Weise mit Initiator und Generator, so müssen im Generator aufeinander folgende Abschnitte die entgegengesetzte Orientierung haben, damit die Kurve durch Papierfalten erzeugt werden kann.

Das ist bei der Koch-Kurve nicht der Fall, denn alle Abschnitte des Generators haben die gleiche Orientierung (siehe Abb. 10.11).

Eine zweite Bedingung

Ein zweites Kriterium für die Erzeugung einer Kurve durch Papierfalten liefern die Knickfolgen der einzelnen Stufen. Dazu protokollieren wir die Knickfolgen der Koch-Kurve und betonen dabei den Inflationsprozess, indem die Symbole der letzten Folge jeweils fett gedruckt werden.

1.Stufe: LRL

2.Stufe: LRL**L**LRL**R**LRL**L**LRL

3.Stufe: LRL**L**LRL**R**LRL**L**LRL**L**LRL**L**LRL**R**LRL**L**LRL**R**LRL**L**LRL**R**LRL...

In den Knickfolgen kann man deutlich erkennen, dass zwischen die „alten“ Symbole immer die gleiche Zeichenfolge „LRL“ eingefügt wird. Das ist eine Folge der gleichen Orientierungen der Abschnitte des Generators.

Auch hier wollen wir uns allgemein klar machen, welche notwendige Bedingung beim Einfügen der neuen Symbole gelten muss, damit eine Kurve durch Papierfalten erzeugt werden kann. Wir greifen dazu das Beispiel aus Abb. 10.16 auf.

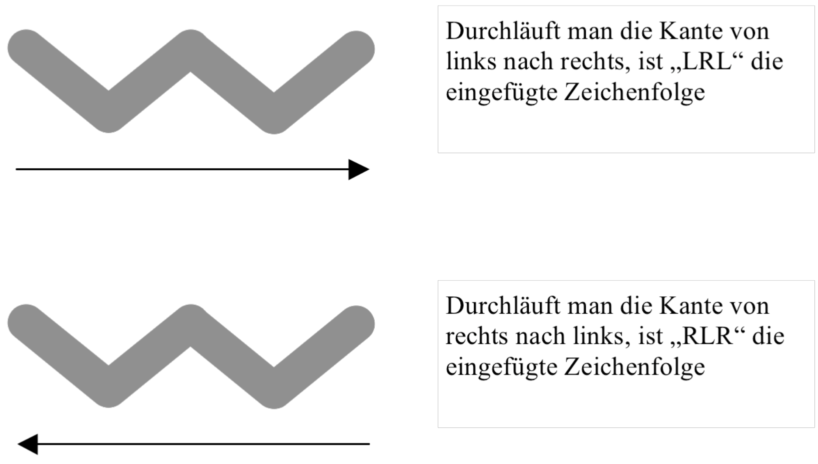

Abb. 10.17: Die Umkehrung der Richtung führt zur reflektierten Zeichenfolge

Allgemein müssen die eingefügten Symbolfolgen einer lokalen Reflexionsregel gehorchen: die beim Inflationsgesetz eingefügten Zeichenfolgen müssen abwechselnd in der ursprünglichen und dann in der reflektierten Form eingefügt werden. Die reflektierte Form entsteht dadurch, dass die Reihenfolge der Zeichen umgedreht wird und die Zeichen des zweibuchstabigen Alphabets ausgetauscht werden.

Beim Protokoll der Knickfolgen für die ersten drei Stufen der Koch-Kurve erkennen wir, dass die eingefügten Zeichenfolgen „LRL“ stets im Original eingefügt werden. Die Bedingung für das Abwechseln von originaler und reflektierter Form wird nicht erfüllt. Auch hier erkennen wir, dass die Koch-Kurve also nicht durch Papierfalten erzeugbar ist.

Modifikation der Koch-Kurve

Es bleibt nun die Frage, welche Kurve man erhalten würde, wenn man den ersten Schritt für das Erzeugen der Koch-Kurve iterierte. Dazu korrigieren wir den Generator so, dass er das von uns erkannte Kriterium erfüllt.

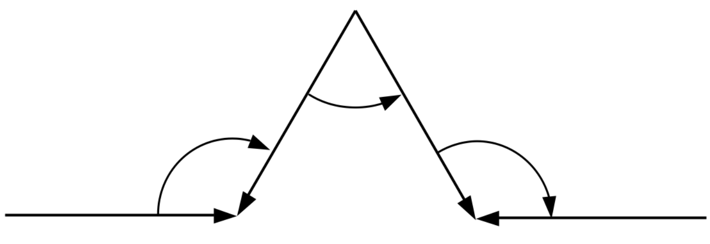

Abb. 10.18: Die Kanten und ihre Orientierung gehen jeweils durch Drehung auseinander hervor

Hier sind also die Orientierungen der 2. und der 4. Kante gegenüber dem originalen Generator in Abb. 10.11 umgedreht. Die sich daraus ergebenden Kurven sind eine von mehreren möglichen Variationen der Kochkurve. Doch dieses Gebiet wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

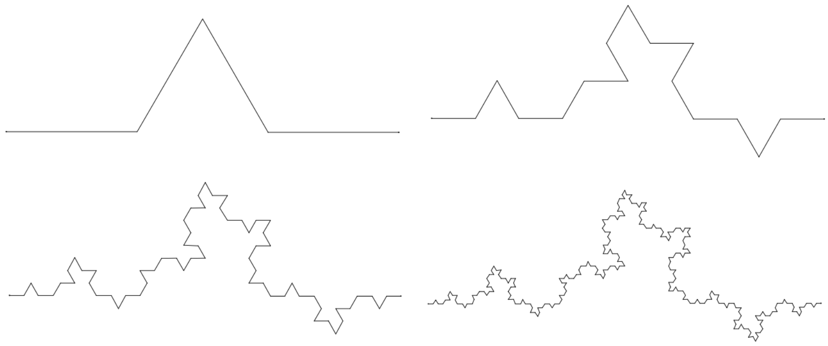

Abb. 10.19: Die 1. bis 4. Stufe der alternativen Koch-Kurve

Die Peano-Kurve

Die Peano-Kurve wurde 1890 vom italienischen Mathematiker Giuseppe Peano veröffentlicht und war das erste Beispiel für eine flächenfüllende Kurve.

Initiator und Generator

Der Generator besteht aus neun Streckenabschnitten, die ein Drittel der Länge des Initiators sind.

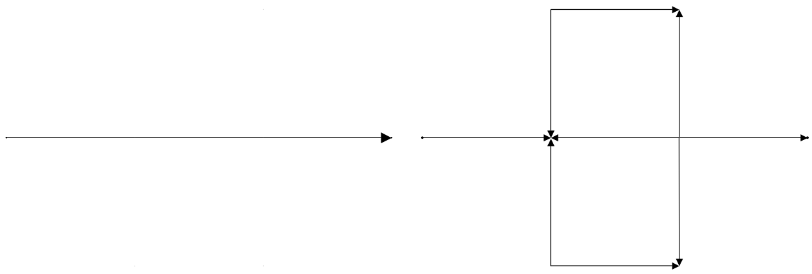

Abb. 10.20: Initiator und Generator für die Peano-Kurve

In dieser Darstellung ist der genaue Kurvenverlauf nicht erkennbar, was für das iterativen Konstruktionsverfahren auch nicht notwendig ist.

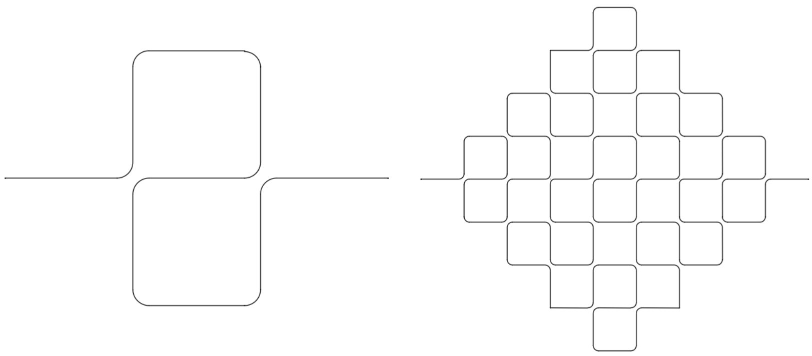

Abb. 10.21: Die erste und zweite Stufe der Peano-Kurve

Überlegungen zur Faltanweisung

In Abb. 10.21 haben wir die Ecken abgerundet, damit der Kurvenverlauf erkennbar ist. Wir wollen nun auch wieder untersuchen, ob diese Kurve durch Papierfalten erzeugbar ist. Eine praktische Überprüfung ist schwierig, denn diese greift erst für die 2. Stufe. Da wir den Streifen in neun Teile teilen müssen, was praktisch auch schwierig ist, besteht die 2. Stufe aus 81 Teilen. Soll jeder dieser Abschnitte 1 cm lang sein, muss man das Faltexperiment mit einem 81 cm langen Papierstreifen starten, der günstigerweise 1cm-Marken hat.

Einfacher ist es, die bei der Koch-Kurve aufgestellten Kriterien für den Generator bzw. die Knickfolgen zu überprüfen. Verfolgen wir entlang des Kurvenverlaufs die Abschnitte des Generators, so stellen wir fest, dass die Orientierungen in jedem Knickpunkt wechseln. Daher liefert dieses Kriterium, dass die Peano-Kurve faltbar ist.

Aus der Abb. 10.21 können wir zusätzlich das Protokoll der Knickfolge aufschreiben.

1.Stufe: LRRRLLLR

2.Stufe: LRRRLLLR**L**LRRRLLLR**R**LRRRLLLR**R**LRRRLLLR**R**LRRRLLLR**L**...

Wenn wir wieder auf das Inflationsgesetz zielen, markieren wir jedes neunte Symbol fett. Zunächst sieht es so aus, als wenn immer die gleiche Zeichenfolge eingefügt würde. Tatsächlich kann man aber jeden zweiten Abschnitt zwischen den fett markierten Symbolen der 1. Stufe als reflektierte Zeichenfolge interpretieren, denn „LRRRLLLR" ist gegenüber Reflexion invariant. Dieser Test bestätigt also noch einmal, dass die Peano-Kurve durch Papierfalten erzeugbar ist.

Wenn also die Peano-Kurve faltbar ist, so können wir auch unsere drei grundlegenden Veränderungsprozesse finden: den Reflexions- und Inflationsprozess und die Toeplitz-Konstruktion.

Der Reflexionsprozess

Der Reflexionsprozess repräsentiert den Auffaltvorgang, wobei das Streifenpaket, das aufgefaltet wird, eine Stufe der Kurve darstellt. Da das Zusammenfalten für einen Schritt aus insgesamt acht Einzelfaltungen besteht, müssen wir für den Reflexionsprozess ebenfalls die letzte, abgeschriebene Knickfolge acht Mal reflektieren. Übersichtlich und klar kann man das am besten formal aufschreiben.

Ist w_k die betrachtete Knickfolge, zu der wir mit dem Reflexionsvorgang die nächste Knickfolge erzeugen wollen, so ist $w_{k+1} = w_k \mathrm{L} \overline{w}_k \mathrm{R} w_k \mathrm{R} \overline{w}_k \mathrm{R} w_k \mathrm{L} \overline{w}_k \mathrm{L} w_k \mathrm{L} \overline{w}_k \mathrm{R} w_k$ die erzeugte Knickfolge. Wir können aus dem vorliegenden Datenmaterial nur die 2. Stufe überprüfen und feststellen, dass diese Knickfolge aus der Knickfolge zur 1. Stufe tatsächlich aus einem Reflexionsprozess entsteht. Höhere Stufen lassen sich nur mit einem erheblichen Aufwand erzeugen, denn bereits die 3. Stufe besteht aus $9^3 = 729$ Streifenabschnitten, also 728 Knicke.

Der Inflationsprozess

Auf formale Weise lässt sich auch der Inflationsprozess übersichtlich aufschreiben. Ist $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5\mathrm{A}_6...\mathrm{A}_n$ die Knickfolge auf einer Stufe, so erhält man nach den Inflationsprozess die Knickfolge

$$\mathrm{LRRRLLLRA}_1\mathrm{LRRRLLLRA}_2\mathrm{LRRRLLLRA}_3\mathrm{LRRRLLLR}...\mathrm{LRRRLLLRA}_n\mathrm{LRRRLLLR}$$

Zumindest für die 2. Stufe ist das überprüfbar richtig. Vor allem wird einem aber bewusst, dass beim Übergang von der Knickfolge der 1. Stufe zur 2. Stufe im Prinzip der gleiche Prozess wirkt wie beim Reflexionsprozess. Rückblickend erkennen wir, dass das auch beim „normalen" Papierfalten, also beim Falten des Heighway-Drachens, der Fall ist und beim Falten der Sierpinski-Pfeilspitze. Die Symbole, die beim Reflexionsgesetz eingefügt werden und an denen die vorhandene Knickfolge reflektiert wird, ist immer die Symbolfolge der 1. Stufe.

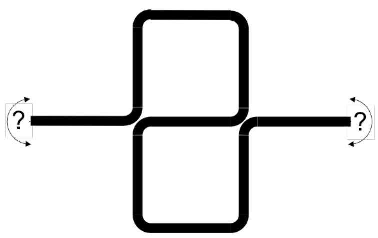

Abb. 10.22: Ein Streifenpaket ist einmal aufgefaltet

Die Toeplitz-Konstruktion

Für die Toeplitz-Konstruktion haben wir schrittweise ein Streifenpaket aufgefaltet und die Knicke analysiert. Bei der Peano-Kurve bedeutet ein Faltungsschritt, die acht einzelnen Knicke freizulegen. Das führt auf LRRRLLLR, worauf wir an eine Kehre kommen mit unbekanntem Knick. Das Zurücklaufen im Streifenpaket liefert wieder LRRRLLLR, da diese Knickfolge gegenüber Reflexion invariant ist. Damit ergibt sich für die erste Stufe der Toeplitz-Konstruktion:

LRRRLLRxLRRRLLRxLRRRLLRxLRRRLLRxLRRRLLRxLRRRLLRx...

Im nächsten Auffaltschritt werden die „x“ durch die Symbole dieser Folge ersetzt. Das führt dazu, dass die ersten acht „x“ ersetzt werden und erst an der 81. Stelle bleibt zum ersten Mal das „x“ stehen. Das kann hier schon nicht mehr in einer Zeile dargestellt werden.

Wir wollen die Toeplitz-Konstruktion nicht weiter verfolgen, da wir bereits aus den Anfängen erkennen, dass das eine Gesetzmäßigkeit ist, die wir hier zwar auch konstruieren können, die aber wegen der Länge der einzelnen Abschnitte nicht nahe liegend ist. Das Übertragen der bereits erkannten Gesetzmäßigkeiten auf andere Fälle, hier die Peano-Kurve, kann vertiefte Einsichten verschaffen, wie wir es oben beim Reflexions- und Inflationsprozess erlebt haben. Bei der Übertragung der Toeplitz-Konstruktion sehen wir aber, dass das Übertragen von Gesetzmäßigkeiten auch seine Grenzen hat. Aus didaktischer Sicht sind solche „Anwendungen“ zu vermeiden, da sie keine neuen, tieferen Einsichten liefern, sondern eher im Lernprozess kontraproduktiv wirken.

Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung

Durch die Variation des Faltprozesses ist ein nahezu unerschöpfliches Feld von Übungen und neuen Forschungsaufgaben aufgezeigt, ganz im Sinne der Weth’schen Kreativitätsroutine. So kann man zum Beispiel zu der Variation, die zur Sierpinski-Pfeilspitze führt, durch eigene Forschungen die drei Grundgesetze (wieder-)entdecken lassen. Ich möchte hier als Anregung für weitere Forschungen einen Aufgabenblock formulieren, der sich im Prinzip auf alle Variationen des Faltprozesses anwenden lässt.

1. **Die grundlegenden Gesetze**

   Untersuchen Sie, in welcher Form jeweils gilt:

   a. das Reflexionsgesetz

   b. das Inflationsgesetz

   c. die Toeplitz-Konstruktion

2. **Anzahlen von „L“- und „R“-Knicken**

   a. Bestimmen Sie durch Nachzählen für die ersten, konkret herstellbaren Stufen die Anzahl der „L“- und „R“-Knicke und die Gesamtzahl der Knicke.

   b. Leiten Sie daraus eine allgemeine Gesetzmäßigkeit für die n-te Stufe ab.

   c. Begründen Sie die Gesetzmäßigkeiten mit dem in 1.a. gefundenen Reflexionsgesetz.

   d. Begründen Sie die Gesetzmäßigkeiten mit dem in 1.b. gefundenen Inflationsgesetz.

3. **Der Algorithmus zur Bestimmung des Symbols**

   Finden Sie einen Algorithmus, mit dem Sie aus der Positionsnummer und der Stufe (wegen des möglicherweise alternierenden Einfügens beim Inflationsprozess) berechnen können, ob an der gegebenen Position ein „L“ oder „R“ steht.

   a. auf der Basis des Reflexionsgesetzes (wiederholtes Zurückreflektieren)

   b. auf der Basis des Inflationsgesetzes

4. **Baumdiagramm**

   Interpretieren Sie den Inflationsprozess und die Toeplitz-Konstruktion an einem Baumdiagramm.

5. **Beweis der Äquivalenz von Reflexions- und Inflationsprozess**

   a. Formalisieren Sie den Reflexionsprozess so, dass Sie einen Reflexionsoperator definieren können. (Analog zur Definition 2.2) Definieren Sie zur Sierpinski-Pfeilspitze die Folge von Wörtern, die mit dem Reflexionsoperator gebildet wird. (Analog zur Definition 2.3)

   b. Definieren Sie zur Sierpinski-Pfeilspitze den Inflationsoperator (Analog zur Definition 3.1) und die Folge der Wörter, die mit dem Inflationsoperator gebildet wird. (Analog zur Definition 3.2)

   c. Beweisen Sie, dass die Folge aus a. mit der Folge aus b. übereinstimmt. (Analog zu Theorem 3.1)

6. **Geometrische Interpretation**

   a. Wie groß ist der Verkleinerungsfaktor für die Liniensegmente von Stufe zu Stufe beim Papierfalten?

   b. Welchen der „regelmäßigen“ Auffaltwinkel von 60°, 90° oder 120° kann man wählen, ohne dass es zu Überschneidungen kommt. Wählen Sie für c. und d. den kleinst möglichen.

   c. Wie groß muss der Verkleinerungsfaktor für die Liniensegmente sein, damit von Stufe zu Stufe die Entfernung Anfangspunkt-Endpunkt konstant bleibt?

   d. Wie groß ist folglich der Vergrößerungsfaktor zwischen den Kurven des wirklichen Papierfaltens (a.) und den Polygonen aus c.?

Am naheliegensten ist es wohl, diesen Aufgabenblock für die Sierpinski-Pfeilspitze durchzuführen. Entsprechend gut vorbereitet ist die Variation zur Kochkurve, bei der der Streifen in vier Teile geteilt wird und nach dem ersten Viertel ein Linksknick, nach dem zweiten Viertel ein Rechtsknick und nach dem dritten Viertel wieder ein Linksknick gefaltet wird (siehe Abb. 10.13 bis 10.15).

Wie wir oben schon angedeutet haben, sind die Untersuchungen zur Peano-Kurve mühsam, da durch die hohe Anzahl von Knicken pro Stufe die Beispiele für erste Untersuchungen unhandlich groß werden.

Für handhabbare Beispiele muss man also darauf achten, dass die Anzahl der Knicke pro Stufe klein bleibt. Bei einem Knick pro Stufe erhalten wir das ausführlich dargestellte Papierfalten, das zum Heighway-Drachen führt. Beim Falten zur Sierpinski-Pfeilspitze hatten wir zwei Knicke ausgeführt, dabei aber die Anfangsmarke abwechselnd an der linken oder rechten Seite des Streifenpaketes gehabt. Bei zwei Knicken pro Stufe können wir weitere Fälle systematisch mit der Darstellung der Generatoren aufzählen.

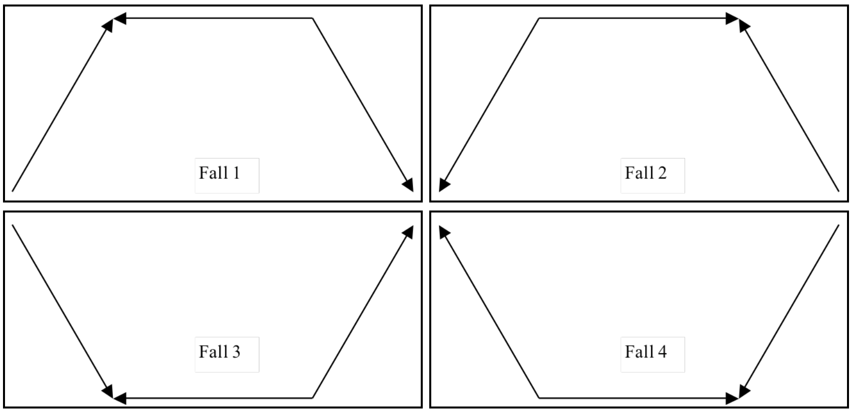

Abb. 10.23: Die vier Fälle für den Generator, wenn beide Knicke in die gleiche Richtung ausgeführt werden

Hier erhalten wir aber nur für den Fall 1 ein neues Muster, Fall 2 ist der bekannte Fall der Sierpinski-Pfeilspitze. Die Fälle 3 und 4 wiederholen nur die Fälle 1 und 2 in gespiegelter Form.

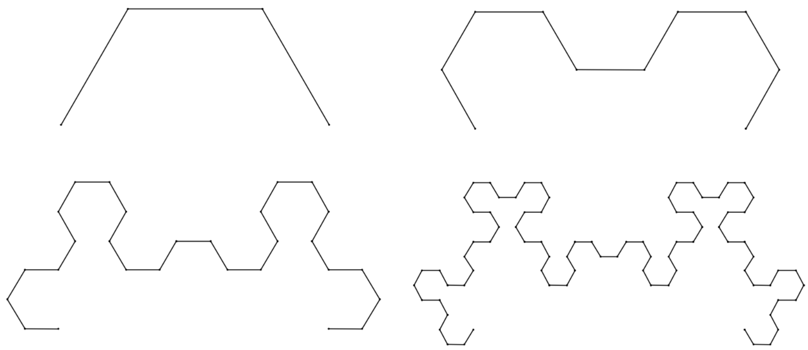

Abb. 10.24: Stufe 1 bis 4 für die Kurve, die sich nach dem Generator „Fall 1“ ergibt

Eine weitere Variation der Möglichkeiten besteht darin, dass die beiden Knicke in unterschiedliche Richtungen ausgeführt werden. Wird also der eine als „rechts über links“ ausgeführt, so der andere als „rechts unter links“. Unter der Berücksichtigung von verschiedenen Orientierungen der Abschnitte ergeben sich vier weitere Fälle, die in Abb. 10.25 dargestellt sind.

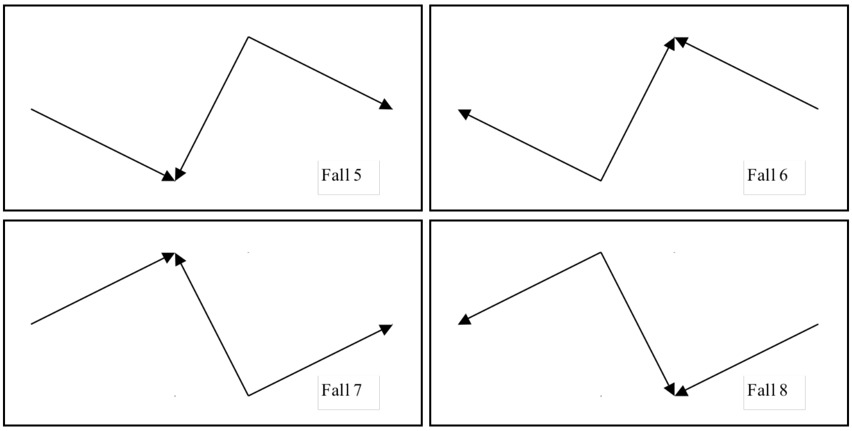

Abb. 10.25: Die vier Fälle für den Generator, wenn beide Knicke in verschiedene Richtungen ausgeführt werden

Da die eingefügte Symbolkette „LR“ bzw. „RL“ gegenüber Reflexion invariant ist, ergibt sich in allen vier Fällen die gleiche (kongruente) Kurve[1].

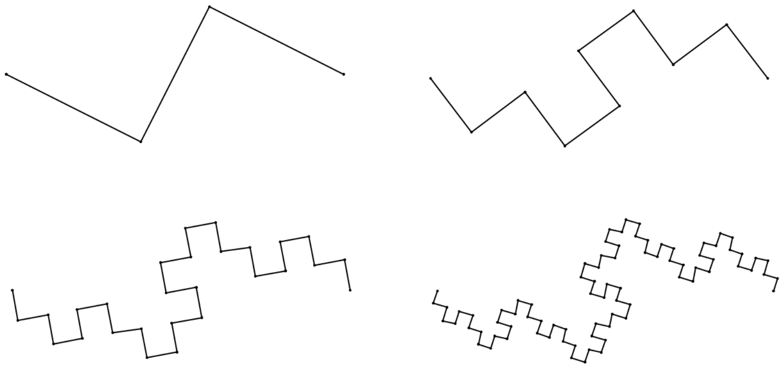

Abb. 10.26: Stufe 1 bis 4 für die Kurve, die sich nach dem Generator „Fall 5“ ergibt

Die hier nun noch vorgestellten Kurven sind einerseits nicht neu[2], gehören andererseits aber auch nicht zu den „klassischen“ Kurven. Sie sind jedoch die geeigneten Beispiele, mit denen man den Aufgabenblock 1 bis 6 durchgehen kann.

[1] Entsprechend zur Aufgabe 6b. kann man bei dieser Kurve einen Auffaltwinkel von 60° wählen. Das resultierende Fraktal ist als „Ter-Dragon“ bekannt. Nähere Darstellungen dazu findet man in [P03], Seite 140 ff.

[2] Man findet sie z.B. in Mandelbrot [M07]