Didaktische Überlegungen

Probleme in der universitären Lehrerausbildung

Das inhaltliche Problem

Der Übergang von der schulischen zur universitären Mathematikausbildung ist schwer und wird von vielen als Bruch oder (sehr hohe) Schwelle empfunden. Diese Diskontinuität erschwert den Beginn eines mathematischen Studiums (egal mit welchem Studienziel) für die Studierenden, und wird manchmal auch von den Lehrenden provoziert. „Vergessen Sie einmal alles, was Sie in der Schule gelernt haben!" ist nicht selten ein Rat in einer mathematischen Anfängervorlesung. Die Schwierigkeiten resultieren zum einen aus den verstärkten Anforderungen an mathematisches Grundwissen, das zum Teil in der Schule nicht vermittelt wurde oder wieder in Vergessenheit geraten ist. Begriffe und Grundlagen z.B. der Mengenlehre, Logik oder Geometrie sind einfach nicht (mehr) präsent. Dazu kommt der systematische, axiomatisch-deduktive Aufbau des Stoffes mit seiner starken Orientierung auf Beweise. Hier tut sich für die meisten Studienanfänger eine ungewohnte Welt auf, die erfahrungsgemäß große Schwierigkeiten bereitet.

Während Studierende mit dem Ziel Diplom an dieser Hürde bewusst arbeiten, da sie mit einer starken Fachorientierung ihr Studium beginnen und in diese neue Welt wirklich tief eindringen wollen, fehlt Lehramtsstudierenden häufig diese Motivation. Nach meiner eigenen Erfahrung ist die Bereitschaft, sich fachlichen Problemen zu stellen, bei Studierenden für das Lehramt an Grund- und Sekundarschulen noch deutlich geringer ausgeprägt als bei Studierenden für das Gymnasiallehramt.

Diese mangelnde Bereitschaft schlägt sich oft in dem Einwand nieder „Wozu muss ich das lernen? Das brauche ich doch sowieso nicht in der Schule". Nach einer Befragung von Studierenden an der Universität Münster gehen Verstehens- und Akzeptanzprobleme Hand in Hand[1]. Diese Akzeptanzprobleme sollte man von Seiten der Lehrenden jedoch nicht voreilig als Ausrede von nachlässigen StudentInnen wegwischen.

Der Bruch mit der schulischen Mathematik wird von Lehramtsstudierenden letztlich doppelt wahrgenommen, denn die Schulmathematik ist nicht nur die Basis, auf der sie stehen, die Vergangenheit, sondern sie ist auch die Zukunft, der Inhalt ihrer beruflichen Pläne (anders als bei Diplom-StudentInnen).

Die doppelte Diskontinuität

Bereits Anfang des 20. Jahrhunderts beklagte der für die gymnasiale Schulreform einflussreiche Mathematiker Felix Klein die Defizite der Lehrerausbildung und beschrieb die inzwischen berühmte „doppelte Diskontinuität":

> „*Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; …Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen*" (Klein 1924)[2]

Auch neuere Studien belegen, dass dieses Problem auch nach 80 Jahren noch weiter besteht:

> „*Es ist eine durch empirische Studien erhärtete Tatsache, daß Lehrer, von der*

[1] siehe Stein in [D09]

[2] zitiert nach [D03]

Universität entlassen, ihren Unterricht in der Regel nach dem Muster des eigenen, seinerzeitigen Unterrichts gestalten. Das fachliche Mathematikstudium hat in der Regel wenig Spuren hinterlassen; das Studium wurde sehr oft nur als lästiges Zwischenstadium zwischen Schule und Schule empfunden.“ (Reichel 2000, S. 33)[3]

Es ist also nicht verwunderlich, wenn StudentInnen die universitäre Ausbildung als eine notwendige, aber wenig sinnvolle Zeit einstufen, die man überstehen muss, um die beiden schulischen Enden dann letztlich zu verbinden - die eigene Schulzeit in der Vergangenheit und die schulische Tätigkeit als LehrerIn in der Zukunft. Solch ein Denken fördert Akzeptanzprobleme erheblich.

Das methodische Problem

Die universitäre Ausbildung ist neben der Referendariatszeit die Phase, in der zukünftige LehrerInnen für ihren Beruf vorbereitet werden. Hier sollen sie lernen, was nach den neuesten Erkenntnissen guter Unterricht ist und wie man ihn realisiert. Das ist die eine, die offizielle Seite der Ausbildung. Aber es gibt noch eine andere, eine verdeckte, deren Wirksamkeit man nicht unterschätzen darf: die am eigenen Leib erfahrene Methode, Mathematik zu lehren, die gerade dann, wenn der junge Mensch sich für den Lehrerberuf entschieden hat, besonders bewusst erlebt wird. Das ist im universitären Alltag der ersten Semester die Vorlesung vor ungefähr 100 StudentInnen, in der in einer Einbahnkommunikation der Lehrer (Professor) den SchülerInnen (StudentInnen) von Mathematik erzählt in dem klassischen Aufbau Satz - Beweis - Folgerung - Beispiel.

„*Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und die „Übungen“ folgen in der Regel noch immer dem selben Instruktionsmuster, nicht selten sind sie reduziert auf ritualisiertes Vorrechnen von ‚perfekten' Musterlösungen.*“[4]

Dieses Problem ist nicht auf die Lehrerausbildung in Deutschland beschränkt, so nennen Th.Cooney und H.Wiegel[5] die „altbekannte Weisheit“ „*teachers teach as they were taught, not how they were taught to teach*“. Dieser Mangel im methodischen Vorgehen ist manchem Lehrenden bewusst und sie raten dann zu genau dem „Ausblenden“ des universitären Abschnitts „Das können Sie in der Schule natürlich so nicht machen“. Was für die Methoden angeraten wird, darf aber inhaltlich nicht geschehen (s.o.), eine gespaltene Situation, die die Studierenden ratlos machen kann.

Ein einseitiges Bild von Mathematik

In neuester Zeit kommt ein weiteres Problem hinzu durch die veränderte Sicht auf Lernprozesse und das damit verbundene Bild von Mathematik.

„*Durch den klassischen, systematischen, axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Dabei spielen die ursprünglichen Problemstellungen, die Prozesse der Begriffsbildung und Theorieentwicklung der jeweiligen Gebiete, nur eine untergeordnete Rolle. Die Methoden der Vermittlung sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung.*“[6]

Ganz ähnlich äußern sich Vertreter von DMV und GDM in der gemeinsamen Denkschrift zur Lehrerbildung:

„*Lehrerinnen und Lehrer spielen eine entscheidende Rolle dabei, welches Bild von Mathematik sich Schüler machen. Mathematik darf nicht auf eine Ansammlung*

---

[3] zitiert nach [D03]

[4] Beutelspacher, Danckwerts in [D03]

[5] siehe in [D04], S. 798

[6] Danckwerts, Prediger, Vasarhelyi in [D05]

von Lösungsverfahren für bestimmte Aufgabentypen reduziert werden, sie darf nicht als fertiges Gebäude von Lehrsätzen ohne Baupläne erscheinen. Daher ist es für die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer von prägender Bedeutung, bereits im Studium zu erfahren, dass es in der Mathematik unzählige offene Fragen gibt, durch deren Bearbeitung sich die Mathematik auch aktuell ausformt und dynamisch weiterentwickelt.“[7]

Die gemeinsame Denkschrift beschränkt sich ausdrücklich auf die Ausbildung von GymnasiallehrerInnen und setzt dort auch das Schwergewicht auf die letzte Phase, die Sekundarstufe II. Das greift meiner Ansicht nach zu kurz, gerade bei GrundschullehrerInnen trifft man oft ein verzerrtes, unzureichendes Bild von Mathematik an und der Einfluss auf die Haltung von GrundschülerInnen zur Mathematik, insbesondere in Hinblick auf den weiteren Bildungsweg, darf nicht unterschätzt werden. So bemängeln Bender et al. bereits 1997:

„*In der Vergangenheit wurde das Lehramts-Studium für alle Stufen viel zu stark an der Mathematik-Ausbildung für die Spezialistinnen und Spezialisten ausgerichtet, in der statt eines genetischen ein statisches Wissenschaftsverständnis vorherrscht: Mathematik wird dabei als fertig gegebene, von allen Beziehungen nach außen gereinigte systematische Struktur gelehrt und von den Studierenden reproduktiv nachvollzogen.*“[8]

Lösungsansätze

Diesen hier dargestellten Mängeln wird seit mehreren Jahren versucht entgegenzuwirken. Hierzu gibt es verschiedene Empfehlungen zur Veränderungen der LehrerInnenausbildung an den Universitäten. So sind in allen hier zitierten Artikeln Verbesserungsvorschläge zu finden, die insbesondere eine andere Herangehensweise an Lernprozesse fordern, basierend auf dem veränderten Bild von Mathematik.

Nicht fachliche Ziele von fachinhaltlichen Veranstaltungen

So findet man bei Bender et al.[7] folgende Liste von Zielen, die mit den fachinhaltlichen Veranstaltungen erreicht werden sollen:

Im affektiven Bereich:

- *etwa vorhandene negative Einstellungen zur Mathematik abbauen*
- *Freude an der Beschäftigung mit Mathematik entwickeln*
- *Selbstvertrauen in die Kraft der eigenen Vernunft gewinnen*
- *die Befriedigung spüren, die aus dem Entdecken von Sachverhalten und Zusammenhängen kommt oder allein aus dem Gefühl, etwas verstanden zu haben*
- *Mut zum Nachdenken haben, auch wenn zunächst kein Lösungsweg in Sicht ist*
- *zum Probieren bereit sein; Neues zu denken wagen; sich durch Fehler und Irrwege nicht entmutigen lassen*

Im Bereich didaktischer Einsichten:

- *erfahren, dass mathematisches Verstehen nicht vermittelt werden kann, indem das Individuum weitgehend passiv bleibt, sondern dass es durch intensive eigenen Aktivität erarbeitet werden muss*

[7] Stroth/Blum et. al. in [D10]

[8] Bender et al. in [D02]

- *erfahren, dass Fehler zum Alltag fruchtbarer Lernprozesse gehören, bei ihrem Zustandekommen ein Anteil richtiger Gedanken beteiligt sein kann und man aus ihnen lernen kann - jedenfalls wenn man Klarheit über die Fehlerursache gewinnt*
- *erfahren, dass man im Bereich mathematischen Denkens zu sicheren Aussagen kommen kann, ohne sich auf fremde Autoritäten stützen zu müssen, dass man sich also bei hinreichender Sorgfalt weitgehend auf das eigene Denken verlassen kann und die Mathematik daher wie kein anderes Fach geeignet ist, das Selbstvertrauen in die eigene Vernunft zu stärken*
- *durch aufmerksame Beobachtung der eigenen Lernprozesse Erfahrungen machen, die einem helfen, die Lernprozesse von Kindern besser zu verstehen*

Im Bereich mathematischen Wissens und Fähigkeiten:

- *Probleme erkennen, formulieren, mathematisch modellieren, lösen können*
- *Muster und Zusammenhänge erkennen sowie plausibel begründen können, d.h. letztlich beweisen können*
- *Raumanschauung*
- *geeignete Grundvorstellungen und Grundverständnisse elementarer arithmetischer und geometrischer Begriffe und Zusammenhänge*

Ein konkretes Projekt zur veränderten Lehrerausbildung

Einen konkreten Schritt zur Veränderung der Lehrerausbildung sind Beutelspacher und Danckwerts im Projekt „Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt“ gegangen, gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung als Leuchtturmprojekt zur Innovation in der Lehrerbildung.

Sie formulieren in der programmatischen Vorstudie zu diesem Projekt „***Desiderate*** einer verbesserten universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik:“[9] (die explizit „*unabhängig von der Schulstufe, für die ausgebildet wird*“ genannt werden)

Inhaltlich

1. *Zur prozessorientierten Auffassung der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin kann die* ***historisch-genetische*** *Sicht in besonderem Maße beitragen. Daher muss die Geschichte der Mathematik (ideengeschichtlich orientiert und curricular integriert) ihren festen Platz in den Fachstudien haben.*
2. *Zu einem gültigen prozessorientierten Bild von Mathematik gehört zwingend die Wechselwirkung zwischen der deduktiv organisierten Mathematik und ihren außermathematischen Anwendungen. Die* ***Anwendungen im Sinne modellbildender Aktivitäten*** *müssen die inhaltliche Auseinandersetzung mit den kanonischen Wissensbeständen der Mathematik durchdringen.*
3. *Ein fachlich souveräner Umgang mit den Themen des Mathematikunterrichts bahnt sich nicht von selbst an. Hierzu bedarf es eigener elementarmathematischer Lehrveranstaltungen, die die* ***Schulmathematik vom höheren*** *(aber nicht primär strukturmathematischen)* ***Standpunkt*** *behandeln und sich insbesondere der Analyse ihres Sinns und ihrer Bedeutung widmen.*

[9] Beutelspacher, Danckwerts in [D03]

4. *Die Erstbegegnung mit der* ***fachdidaktischen Ausbildungskomponente*** *ist früh zu integrieren und muss eine Brückenfunktion erfüllen: Sie gibt den hier beschriebenen fachwissenschaftlichen Anteilen eine fachdidaktische Dimension und ist anschlussfähig für das künftige didaktische Handlungsrepertoire des Fachlehrers.*

Methodisch

1. *Guter Mathematikunterricht bedarf der fruchtbaren* ***Balance zwischen Instruktion*** *(der Schüler durch den Lehrer)* ***und Konstruktion*** *(durch den Schüler selbst). Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen diese Balance selbst erfahren; sie müssen in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Daher gilt es, insbesondere die klassischen Übungen zu den Vorlesungen zu restrukturieren: Sie müssen der identitätsstiftende Ort für die Thematisierung von fachlichen Lernprozessen sein.*
2. *Für eine aktive Konstruktion des mathematischen Wissens spielen die* ***heuristischen Fähigkeiten*** *eine zentrale Rolle. Geeignete Lehr- und Lernveranstaltungen, etwa Modellierungs- oder Problemlöse-Seminare, müssen fester Bestandteil der Ausbildung sein. Hier sollen die Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens fachbezogen erlebt werden.*

Cooney und Wiegel[10] untersuchen in einem Artikel für das International Handbook of Mathematics Education in etwas allgemeinerer Form zunächst das Bild von Mathematik, das Menschen in sich tragen, um dann drei Prinzipien zu formulieren, die für die fachmathematische Ausbildung von LehramtsstudentInnen wesentlich sind. Ich möchte diesen Artikel hier genauer darstellen und dann aufzeigen, wie die drei Prinzipien mit den in dieser Arbeit dargestellten Themen des Papierfaltens erfüllt werden.

Das Bild von Mathematik prägt den Unterrichtsstil

Ganz wesentlich für die Art und Weise, Mathematik zu unterrichten ist das Bild, das der Lehrende über Mathematik in sich trägt. Wie Cooney und Wiegel in einem geschichtlichen Rückblick zeigen, gibt es im Wesentlichen drei prinzipielle Sichtweisen auf Mathematik:

1. Die Platonische Sichtweise, nach der Mathematik eine Menge von idealen, unabhängig von der menschlichen Erfahrung existierenden Gesetzen ist. Erkenntnis geschieht ausschließlich durch Deduktion. Daher ist Mathematik ein Gebäude von absolut wahren Gesetzen. Diese Herangehensweise sehen Cooney und Wiegel über Descartes bis Frege fortgesetzt.
2. Die Aristotelische Sichtweise, nach der alle Erkenntnis aus der Sinneswahrnehmung resultiert, so auch die Mathematik. Diese Grundannahme mündete in den Empirismus und für die Logik der Neuzeit in die intuitionistische Mathematik von Luitzen E. J. Brouwer.
3. Die von Hilbert begründete formale Axiomatik, die eine weitere Sichtweise auf Mathematik darstellt.

Alle drei Auffassungen von Mathematik hatten gemeinsam, dass Mathematik absolut wahr und nicht falsifizierbar ist. Cooney und Wiegel schreiben es der grundlegenden Arbeit von Lakatos „Beweise und Widerlegungen“ [S03] zu, dass Mathematik auch als eine falsifizierbare Wissenschaft betrachtet wird. Das meint nicht, dass Ergebnisse der Mathematik, also bewiesene Sätze, sich dann doch als falsch

[10] siehe Cooney, Th., Wiegel, H. [D04]

herausstellen, sondern dass falsche Annahmen und Vorstellungen ein unvermeidbarer Teil auch der mathematischen Forschung und Erkenntnisgewinnung sind. Diese erkenntnistheoretische Auffassung wurde vor allem durch das Buch von Davis und Hersh (1984) [S01] einem breiterem Publikum vermittelt. Etwa ab 1990 fand diese Auffassung auch Niederschlag in der Mathematikdidaktik und bereitete der heute herrschenden, konstruktivistischen Auffassung von Lernprozessen den Weg.

Drei Prinzipien für die Ausbildung von Lehramtsstudierenden

Auf der Basis der beschriebenen Analyse, wie Mathematik aus erkenntnistheoretischer Sicht gesehen wurde und heute mehrheitlich gesehen wird, formulieren Cooney und Wiegel drei Prinzipien für die Ausbildung von Lehramtsstudierenden. Ziel der Ausbildung ist, sie zu einem prozessorientierten Lehrstil zu befähigen.

1. Prinzip:
   Lehramtsstudierende sollten Mathematik als ein pluralistisches Gebiet erfahren.
2. Prinzip
   Lehramtsstudierende sollten explizit Schulmathematik studieren und darüber reflektieren (also Schulmathematik vom höheren Standpunkt).
3. Prinzip
   Lehramtsstudierende sollten Mathematik auf solch eine Weise erfahren, dass prozessorientierte Lehrstile gefördert werden.

zum 1. Prinzip (Mathematik als pluralistisches Gebiet)

Empirische Daten als Ausgangspunkt für mathematische Betrachtungen

Die pluralistische Erfahrung von Mathematik kann nach Cooney und Wiegel in der Konstruktion von mathematischen Ideen auf der Basis von empirischen Daten geschehen. Sie verdeutlichen das in dem zentralen Beispiel zu ihrem Artikel, in dem die Messdaten eines rollenden Versuchswagens mathematisch ausgewertet werden. Ich möchte diesem Experiment die forschende Herangehensweise an das Papierfalten gegenüber stellen, denn jedes der drei „Kerngesetze“ wird genau auf diese Art eingeführt und die Gesetzmäßigkeiten erarbeitet. In Kapitel 2 wird das Reflexionsgesetz aus den protokollierten Knickfolgen erkannt und am realen Papierfalten begründet. In Kapitel 3 wird ebenfalls im konkreten Experiment mit den Papierstreifen das Inflationsgesetz hergeleitet und in Kapitel 5 mit einem Gedankenexperiment die Toeplitz-Konstruktion veranschaulicht. Das Besondere des Papierfaltens ist, dass die empirischen Daten nicht aus einem mit Naturwissenschaften verbundenen Gebiet stammen und so ohne diesbezügliche Vorkenntnisse verarbeitet und analysiert werden können. Ein weiterer, wesentlicher Vorteil ist, dass die Daten „digital“ sind und nicht wie die üblichen, „analogen“ Daten aus Messungen mit Messfehlern behaftet sein können. Ob an der 17. Stelle ein Links- oder Rechtsknick vorliegt, lässt sich ganz genau feststellen, ob der Wagen nun 20,4 cm zurückgelegt hat oder ob es nicht doch 20,5 cm sind, ist eine Frage der Messgenauigkeit.

Verschiedene Lösungswege für ein Problem

Weiterhin kann nach Cooney und Wiegel pluralistische Erfahrung mit Mathematik bedeuten, dass mathematische Probleme auf verschiedenen Wegen gelöst werden und dass der Untersuchungsgegenstand auf mehrere Arten dargestellt wird. Ich möchte hier „verschiedene Lösungen“ und „verschiedene Repräsentationen“, die Cooney und Wiegel zusammen nennen, für das Papierfalten getrennt aufzeigen. Das Grundproblem für das Papierfalten ist, für die entstehenden Knickfolgen eine Gesetzmäßigkeit zu finden. Diese Lösung des Problems erfolgt insgesamt drei Mal und führt zu den drei Kerngesetzen: Reflexionsgesetz (Kapitel 2), Inflationsgesetz (Kapitel 3) und Toeplitz-Konstruktion (Kapitel 5). Diese drei Lösungen sind nicht an verschiedene Repräsentationen gebunden, sondern bewegen sich alle drei in derselben Darstellung von

Knickfolgen. Jeder der drei Zugänge ist unabhängig von den anderen und stellt einen eigenständigen, forschenden Zugang dar. Der krönende Abschluss dieser unterschiedlichen Betrachtungsweisen ist, die Äquivalenz der drei Gesetzmäßigkeiten nachzuweisen.

Verschiedene Darstellungsformen für ein Problem

Der Untersuchungsgegenstand „Papierfalten" wird in dieser Arbeit aber auch auf verschiedene Arten dargestellt. Neben der symbolischen Darstellung als Knickfolgen wird er geometrisch dargestellt (Kapitel 4) und dort eine typisch geometrische Fragestellung nach der Größe der Figur aufgeworfen. Diese Repräsentation des Papierfaltens wird in Kapitel 8 (iterierte Funktionensysteme) und Kapitel 9 (Überschneidungsproblem) erneut aufgegriffen. In Kapitel 6 wird die Papierfaltungsfolge als Zahl dargestellt und in Kapitel 7 unter dem Aspekt einer automatischen Folge betrachtet. Diese verschiedenen Darstellungsweisen mit ihren spezifischen Lösungsmethoden verdeutlichen, dass ein Problem auf verschiedene Art betrachtet werden kann und ein Problem auf verschiedene Weisen gelöst werden kann. Da sich die verschiedenen Darstellungen und Lösungswege aber auf das gleiche Problem beziehen, findet automatisch eine Vernetzung der verwendeten Mathematik statt.

Zu diesen vielfältigen Darstellungsweisen und Lösungswegen gehört natürlich auch die formale Repräsentation eines Untersuchungsgegenstandes, verbunden mit der exakt logischen, deduktiven Beweisführung. Es ist eine spezifische Eigenart der Mathematik, die sie von empirischen Wissenschaften unterscheidet. Dazu werden in Kapitel 2 die aus empirischen Daten und der Analyse von Mustern gefundenen Erkenntnisse in eine formale Sprache übersetzt und neue, formalisierte Objekte geschaffen. Die exakte Darstellung wird in jedem Kapitel zum Papierfalten aufgegriffen und durchgeführt. Diese Inhalte werden durch grau unterlegte Texte speziell hervorgehoben und können für eine erste Information auch überlesen werden.

Die pluralistische Betrachtung eines Gegenstandes entwickelt erst dann seine ganze Stärke, wenn die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungsweisen und Lösungswegen hergestellt und untersucht werden. Dieses geschieht beim Papierfalten dadurch, dass jede Gesetzmäßigkeit (Reflexion, Inflation, Toeplitz-Konstruktion) mit den anderen verglichen und in Zusammenhang gebracht wird. Die Vernetzung erfolgt sowohl für die empirisch forschenden Prozesse als auch für die formale Betrachtung.

Ein älteres Beispiel für forschendes Lernen

Die Forderung nach forschendem Lernen als eine wesentliche, mathematische Tätigkeit, ist auch schon erhoben worden, noch bevor sich eine konstruktivistische Auffassung von Lernprozessen durchgesetzt hat. So hat D.E. Knuth 1974 ein kleines Büchlein „Insel der Zahlen" herausgebracht (siehe [S02]) in der Absicht, auf einfachem Niveau einen forschenden Zugang zu einem Stück Mathematik zu ermöglichen. Er selbst schreibt im Nachwort zu diesem Buch:

> *Ich wollte Material zur Verfügung stellen, welches helfen sollte, eines der am meisten vernachlässigten Gebiete unseres gegenwärtigen Ehrziehungssystems zu überwinden: das Üben selbständiger Forschungsarbeit. Es gibt für Studenten nämlich relativ wenig Möglichkeiten zu erfahren, wie Neues in der Mathematik erfunden wird, bevor sie selbst an der Diplomarbeit sitzen.*

Das Buch wurde zur Blütezeit der „New Maths" geschrieben und befasst sich dementsprechend auf eine abstrakte, formal logisch aufgebaute Weise mit Mathematik. Knuth erkennt das Problem, das mit einer Auffassung von Mathematik als einer hoch strukturierten, deduktiv zusammenhängenden Wissenschaft eng verbunden ist: die vorherrschende Lehrmethode ist die Instruktion und das eigene Tun kommt zu kurz. Interessanter Weise ist der Verfasser D.E. Knuth derselbe, der 1970 mit einem Artikel über Papierfalten (siehe [P03]) wesentlich zur Verbreitung des Themas beigetragen hat.

zum 2. Prinzip (Mathematik als Schulmathematik vom höheren Standpunkt)

Mathematik mit direktem Bezug zur Schule

Es gibt verschiedene Untersuchungen, die aufzeigen, dass angehende MathematiklehrerInnen nur unzureichende Mathematikkenntnisse aus dem universitärem Studium mitbringen. Die Hintergründe dafür sind oben mit der „doppelten Diskontinuität“ beschrieben. Nach Cooney und Wiegel ist es daher notwendig, dass angehende MathematiklehrerInnen im Studium mehr Mathematik lernen, und zwar mehr schulbezogene Mathematik. Diese Forderung findet man auch in den oben dargestellten Aussagen von Bender et al. (siehe [D02]) und Beutelspacher & Danckwerts (siehe [D03]) als Forderung nach dem Studium von Schulmathematik vom höheren Standpunkt. Nur angehende Lehrkräfte, die solide Fachkenntnisse besitzen, sind nach Cooney und Wiegel in der Lage, Mathematik auf pluralistische Weise darstellen zu können.

Dabei ist es nicht sinnvoll, schulische Themen identisch zum Schulunterricht zu wiederholen. Es soll vom höheren Standpunkt aus betrachtet werden, wobei der schulische Bezug aber immer sichtbar sein muss. Hilfreich dafür sind andere, neue Zugänge und Zusammenhänge, als sie direkt im Schulunterricht verwendet werden.

In diesem Sinn eröffnet Papierfalten zum einen ein neues Gebiet, es eignet sich auf der universitären Ebene aber besonders dafür, schulmathematischen Themen einen neuen, unverbrauchten Zugang zu eröffnen. Ich möchte im Folgenden für die einzelnen Kapitel der vorliegenden Arbeit die schulrelevanten Themen aufzeigen.

Mathematik mit direktem Bezug zur Schule

Kapitel 1 Einführung

- einfache Potenzrechnung und Potenzgesetze

Kapitel 2 Reflexionsgesetz

- Potenzrechnung
- geometrische Zahlenfolge
- Aufstellen von Gleichungen und deren algebraische Umformung
- Verknüpfung von Spiegelungen
- Logarithmen

Kapitel 3 Inflationsgesetz

- Erkennen von Gesetzmäßigkeiten in Zahlenfolgen
- Modulorechnung (Teilen mit Rest)
- vollständige Induktion

Kapitel 4 Geometrische Interpretation

- Punkte im Koordinatensystem
- Satz des Pythagoras
- Abschätzung einer Größe
- geometrische Reihe
- Grenzwertsätze

Kapitel 5 Die Toeplitz-Konstruktion

- Periodizität
- abschnittsweise definierte Funktionen
- vollständige Induktion
- Potenzrechnung

Kapitel 6 Die Papierfaltungszahl
- Zahldarstellung im Binärsystem
- periodische und nicht periodische Dezimal- und Binärzahlen
- Kettenbrüche
- geometrische Reihe
- Zahldarstellung in verschiedenen Basissystemen und deren Umrechnung

Kapitel 7 Endliche Automaten
- Teilbarkeitsregeln
- Zahldarstellung im Binärsystem

Kapitel 8 Iterierte Funktionensysteme
- Drehung und Translation als gleichsinnige Kongruenzabbildungen
- Zentrische Streckung als Ähnlichkeitsabbildung
- Abbildungen der Ebene auf sich in Matrix-Vektor-Darstellung

Kapitel 9 Das Problem der Überschneidung
- Satz von Pythagoras
- Trigonometrie
- Strahlensätze
- lineare Funktionen
- elementare Sätze der Dreiecksgeometrie
- numerisches Lösen von Gleichungen

Kapitel 10 Papierfalten und Fraktale Kurven
- Satz von Pythagoras
- Trigonometrie
- Kongruenzabbildungen

zum 3. Prinzip (Mathematik als Prozess lehren)

In gewisser Weise ist nach Cooney und Wiegel dieses Prinzip eine Folgerung aus den ersten beiden Prinzipien. Wenn Lehramtsstudierende Mathematik als ein pluralistisches Gebiet kennen gelernt haben und Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus betrieben haben, so ist eine solide Grundlage gelegt, dass sie einen prozessorientierten Lehrstil entwickeln.

„Papierfalten“ animiert zu einem prozessorientierten Unterrichtsstil

Papierfalten scheint ein Katalysator zu sein, insbesondere das 3. Prinzip schnell zu realisieren. Im Sommer 2005 habe ich in einem Seminar mit 22 StudentInnen „Papierfalten“ als Seminarthema behandelt. Nach einer kurzen Einführung hatten die StudentInnen in Zweiergruppen je ein Teilgebiet vorzubereiten und „vorzutragen“. Ohne dass ich selbst auf einen prozessorientierten Lehrstil gedrungen hätte - ein reiner, instruierender Vortrag war explizit als mögliche Präsentationsform akzeptiert -, haben alle 11 Gruppen einen experimentellen Weg gewählt, in dem die übrigen StudentInnen aktiv einbezogen wurden. Natürlich ist ein Unterrichtsstil denkbar, in dem „Papierfalten“ als fertiges Regelsystem begriffen wird und daher das zu vermittelnde Teilgebiet rein instruktiv den zuhörenden StudentInnen mitgeteilt wird. Doch die beiden parallel verwendbaren Darstellungsformen des realen Papierstreifens und der abstrakten Folge von (Knick-) Symbolen befördern in einem so starken Maße einen experimentellen, forschenden Zugang, dass selbst noch unerfahrene StudentInnen zu diesem Unterrichtsstil verführt wurden.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass das Thema „Papierfalten“ für die von Cooney und Wiegel aufgeführten drei Prinzipien ein paradigmatisches Beispiel ist, in dem alle drei hervorragend umgesetzt sind. Von daher ist „Papierfalten“ ein ausgezeichnetes Beispiel, das sich in ein adäquates Bild von Mathematik einfügt und mit dem man moderne Prinzipien für Unterricht realisieren kann.

Die Rolle des Computers für das Unterrichten von Mathematik

Im Abschluss ihrer Darstellung gehen Cooney und Wiegel kurz auf die Rolle der Verwendung von Technologie ein. Sie ist für alle 3 Prinzipien förderlich. Mit Hilfe der Technologie können weitere, insbesondere dynamische Darstellungsformen gefunden werden und experimentelle Herangehensweisen werden durch den Einsatz eines Computers oder Taschenrechners erst möglich oder zumindest erheblich erleichtert. Zu nennen sind dabei vor allem dynamische Geometriesoftware, die für die Geometrie den experimentellen Zugang eröffnet hat, und Rechenblattprogramme, die in ähnlicher Weise numerische Experimente zulassen und zudem die grafische Veranschaulichung von Daten unterstützen. Beiden Einsatzmöglichkeiten wird in letzter Zeit vermehrt Aufmerksamkeit geschenkt. Ich selbst habe in zwei solchen Projekten[11] mitgearbeitet bzw. bin heute noch tätig.

C. Laborde (Mitarbeiterin an der Dynamischen Geometriesoftware Cabri Géomètre) erwähnt in einem Aufsatz[12], dass die Umsetzung von Schulstoff mit Hilfe von Computerprogrammen eine Rekonstruktion des Stoffes bei Lehramtsstudierenden bewirken kann. Insofern wird auch das Prinzip 2 (Mathematik als Schulmathematik vom höheren Standpunkt) durch den Einsatz von Technologie in der Lehramtsausbildung umgesetzt.

„Papierfalten“ erfordert den Computereinsatz

Papierfalten ist ohne den Einsatz von Computern kaum durchführbar. Insbesondere bei der geometrischen Interpretation sind Darstellungen hilfreich, die aus bis zu 65000 Linien bestehen, eine Arbeit, die nur über die Programmierung eines Computers erreicht werden kann. Die Aufgabe, mit einem Programm das Drachen-Fraktal z.B. auf einem grafischen Taschenrechner darzustellen, kann die Motivation sein, die Gesetzmäßigkeiten beim Papierfalten näher zu untersuchen. Umgekehrt kann man mit fertigen, computergenerierten Bildern manche Eigenschaft des Papierfaltens veranschaulichen. Das Prinzip 1 (Mathematik als Pluralistisches Gebiet) wird so verwirklicht.

Papierfalten bietet immer wieder die Gelegenheit, den Computer für mathematische Experimente einzusetzen. In dieser Arbeit habe ich ein numerisches Experiment mit Excel zum Reflexionsgesetz vorgeschlagen (siehe Kapitel 2) und ein weiteres zur Darstellung des Drachen-Fraktals mit Hilfe von iterierten Funktionensystemen (Kapitel 8). In beiden sind nur schulmathematische Kenntnisse erforderlich, so dass für Lehramtsstudierende damit das Prinzip 2 (Schulmathematik vom höheren Standpunkt) verwirklicht wird.

Neue Denkweisen und Forschungsmethoden

Eine besondere Stärke des Computers sind kleine Animationen, die Zusammenhänge und funktionale Abhängigkeiten besonders anschaulich darstellen können. Solche Animationen dienen aber nicht nur der (instruierenden) Lehre, sondern können sich auch im forschenden Lernprozess als äußerst fruchtbar erweisen. So habe ich selbst bei der Arbeit an Animationen für das Papierfalten neue Zusammenhänge

[11] Bremer Netzwerk Mathematik und Computer (Leitung Peitgen) seit 2002 und Pattern Recognition Through Chaos and Fractals, Florida (Leitung Peitgen, Voss) 1999 bis 2003

[12] siehe C.Laborde in [D07]

entdeckt, die z.B. meine Untersuchungen für das Überschneidungsproblem (siehe Kapitel 9) entscheidend gefördert haben.

Gerade in der Arbeit mit dem Computer und der Bemühung um Visualisierung erwächst eine fruchtbare Methode der Erkenntnisgewinnung, die noch nicht die ihr gebührende Anerkennung gefunden hat - auch hier hat sich das Bild von Mathematik in den letzten Jahren deutlich verändert. Die kreative Arbeit im Vorfeld von beweisbaren Sätzen, ist der wesentliche Teil der mathematischen Arbeit. Dieser Aspekt der Mathematik muss stärker in den schulischen Alltag einfließen, aber auch in die universitäre Ausbildung, insbesondere die der Lehramtsstudierenden. Dazu braucht man passende Materialien. Mit der hier vorgelegten Arbeit zum Papierfalten möchte ich solche Materialien bereitstellen.

Persönliche Erfahrungen

Ich möchte diesen Abschnitt mit einigen persönlichen Anmerkungen abschließen, die das Bild von Mathematik und dessen Einfluss auf das Lehren von Mathematik betreffen. Diese Gedanken sind im Laufe meiner langen Lehrtätigkeit entstanden und immer wieder durch praktische Erfahrung und Gespräche mit KollegInnen revidiert und verändert worden. Naturgemäß haben diese Gespräche in letzter Zeit, in der ich an dieser Arbeit schreibe, intensiver stattgefunden.

Wenn Cooney und Wiegel in ihrem ersten Prinzip fordern, dass Mathematik als ein pluralistisches Gebiet behandelt werden soll, so bleibt für mich offen, wie weit die innermathematische Fachstruktur im Bild von Mathematik eine Rolle spielt.

Die klassische Fachsystematik

Noch heute wird die Ausbildung von Mathematikstudenten, inklusive Lehramtskandidaten, nach den klassischen, fachlichen Strukturen vermittelt: Analysis, Lineare Algebra, Funktionentheorie, Geometrie, u.s.w.. Das führt vor allem dazu, dass Aufgaben, Probleme immer nur mit den ganz speziellen Mitteln gelöst werden, die gerade „dran“ sind. Auf der schulischen Ebene heißt das zum Beispiel, dass beim Thema quadratische Gleichungen über Wochen auch nur Aufgaben gelöst werden, die die quadratischen Gleichungen benötigen. Ein Thema ist bestimmend, die fachmathematischen Strukturen bekommen ein fast monströses Gewicht. In bemühten Übungsaufgaben ist man ängstlich darauf bedacht, das gerade aktuelle Themengebiet nicht zu verlassen.

Sehr viel realistischer ist es, dass für die Lösung eines Problems die ganze Mathematik herangezogen werden muss, Algebra, Numerik, Geometrie, u.s.w. und ein Problem ist in vielen Fällen nicht von sich aus linear, quadratisch oder exponentiell, sondern die gewünschte Lösung spielt für solche Entscheidungen eine Rolle.

In einem Lernprozess lässt sich zugegebenermaßen solch eine Vielfalt nicht anwenden. Irgendwann müssen neue Dinge eingeführt und zum ersten Mal gelernt werden. Aber auch dabei kann man ein pluralistisches Bild von Mathematik zeichnen, wenn man aufzeigt, wie ein Problem in den verschiedenen Sparten der Mathematik gelöst werden kann. Dazu eignet sich nicht jedes mathematische Problem, solche Themen müssen gesucht und aufgearbeitet werden.

Das Betonen der hergebrachten, klassischen Systematik vermittelt nicht nur ein unzutreffendes Bild von Mathematik. Nach meinen Erfahrungen als Lehrer auf den verschiedensten Ebenen, Sekundarstufe 1, 2 und Universität, handeln wir uns durch dieses Bild von Mathematik weitere Nachteile und Probleme ein:

a) „Wir bauen in der Mathematik hohe Leitern und erklimmen sie. Ein falscher Schritt führt jedoch zum jähen Absturz.“[13] Der systematische Aufbau lässt uns weit kommen - vorausgesetzt, die Schüler folgen unserem Tempo fehlerfrei. Lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Differential- und Integralrechnung. Jeder kennt diese Autobahn der Schulmathematik. Doch auch die Gefahren, denn die Mängel und Lücken in einem vorangehenden Gebiet wirken sich nachhaltig in allen folgenden Gebieten aus.

Die fachliche Systematik auflösen

Wenn es um das Strukturieren des Lernstoffes in der Schule geht, sollte man immer wieder versuchen, sich von der fachlichen Systematik zu lösen. Das gelingt, wenn man sich an Themen orientiert, die als Kristallisationspunkte dienen, in denen viele mathematische Linien zusammenlaufen. Der „Goldene Schnitt“, Spiralen, die Zahl π sind solche Themen, die in vielfältiger Weise aufgearbeitet und dargestellt worden sind. „Papierfalten“ reiht sich in diese Reihe ein, ist aber ein sehr viel neueres Thema und beiweitem nicht so ausgearbeitet. Diese Themen sind rein mathematisch motiviert und natürlich gibt es auch anwendungsbezogene Themen. So kann man „Häuser“, „Verpackungen“ oder „Pyramiden“ heute bereits in Schulbüchern finden. Ich persönlich halte von solchen Zugängen nicht so viel, da ich mich zu wenig mit solchen Inhalten wirklich befasst habe. Für einen überzeugenden Unterricht, wenn solche Herangehensweisen mehr sein sollen als nur „eingekleidete“ Aufgaben, halte ich fundierte Kenntnisse für unabdingbar. Ich verstehe etwas von Mathematik und kenne dort die Verknüpfungen und die Relevanz eines Themas. Deshalb bevorzuge ich persönlich rein mathematische Themen. Natürlich kann ich mir sehr gut vorstellen, dass ein Bauingenieur, der als „Quereinsteiger“ Mathematiklehrer geworden ist, mit dem Thema „Häuser“ einen sehr überzeugenden Mathematikunterricht gestalten kann.

Solche Themen können auf verschiedene Arten behandelt werden, sowohl in den Lösungswegen als auch in den Darstellungsweisen. So wird für mich die Forderung nach einer pluralistischen Herangehensweise erfüllt. Um auf das oben genannte Bild der Leitern zurückzukommen: Wir haben es dann mit Sandhaufen zu tun, die immer wieder von verschiedenen Seiten bestiegen und breitgetreten werden und deren Hänge so die Gefährlichkeit verlieren. Ein Fehltritt führt zu einem leichten Abrutschen und der nächste Aufstieg an einer anderen Stelle kann durchaus erfolgreich sein. Beim Lernenden bildet sich dabei ebenfalls eine Struktur, er erlebt im eigenen Lernprozess eine Vernetzung - algebraische Lösungswege, geometrische Darstellungen und numerische Experimente oder Beispiele greifen ineinander. Diese Herangehensweise wird beispielhaft in dieser Arbeit zum Papierfalten verdeutlicht.

Die „unmethodische“ Methode

Schon vor über 200 Jahren formuliert der Physiker Georg Christoph Lichtenberg als Prinzip seiner Forschungsweise:

> *„Die Lehre von der Elektrizität ist jetzt da, wo man gewöhnlich passiert, so abgetreten und abgesucht, daß an der Heerstraße nichts mehr zu gewinnen ist; man muß querfeldein marschieren, und über die Gräben setzen. Diese Methode, die man wohl die unmethodische nennen könnte, ist überhaupt nebenher sehr zu empfehlen.“* [14]

So betont auch Peitgen im Vorwort von [M09] die Querverbindungen:

> *Mathematik ist die Ordnungsmacht im Dschungel der Phänomene. Deshalb ist Mathematik lebendig und frisch und aktuell. Deshalb gibt es zwischen*

[13] Ein Zitat, das mich beeindruckt hat, das ich aber heute nicht mehr auf den Ursprung zurückverfolgen kann.

[14] zitiert nach [S04]

einzelnen Teilgebieten und Ergebnissen der Mathematik immer wieder überraschende Querverbindungen, die oft das tiefere Verständnis erst wirklich ermöglichen. Und deshalb bietet es sich an, durch entdeckendes, explorierendes Lernen die Anziehungskraft dieser Eigenschaften der Mathematik im Unterricht zu nutzen.

Themen vernetzen, Querverbindungen herstellen und untersuchen, den Sandberg ein weiteres Mal an einer anderen Stelle erklimmen, diese Vorgehensweisen erkenne ich auch in den Kreativitätsroutinen von Weth. Dazu nennt er in [D11]:

- *Modifizieren: Gehe von einer bekannten Definition oder Konstruktionsvorschrift aus und ändere eine Bedingung ab.*
- *Kombinieren: Stelle zwischen zwei Begriffen, Operationen oder Konstruktionen eine Verbindung her.*
- *Analogisieren: Passe eine Definition auf einen Begriff an, für den sie ursprünglich nicht gedacht war.*

Unterhaltsame Mathematik

b) Das Pressen in eine fachimmanente Systematik steht einem ansprechenden, motivierenden Mathematikunterricht im Wege. Jeder Verlag hat Bücher in seinem Programm, die Mathematik als (Freizeit-) Vergnügen anpreisen. Das Stichwort „unterhaltsame Mathematik" liefert bei Google 15000 Fundstellen, viele davon von Buchhändlern oder Verlagen. „Unterhaltsame Mathematik" ist also real, nicht nur eine seltene Randerscheinung. Zielgruppe dieser Veröffentlichungen sind unter anderem auch LehrerInnen. Der Schulzusammenhang findet sich fast immer in dem Stichwort „Vertretungsstunden". In Vertretungsstunden darf also Mathematik unterhaltsam sein - im regulären Unterricht etwa nicht? In Vertretungsstunden springt man irgendwo auf, man muss nicht eine vorgegebene Linie verfolgen. Man darf dann Lichtenbergs „unmethodischer Methode" folgen und das ist offenbar motivierend und unterhaltsam.

Ich möchte hier für Lehrpläne plädieren, die mehr Raum für solches „unmethodische" Arbeiten lassen, oder pluralistische Zugänge (Cooney und Wiegel) oder kreative Aufgaben (Weth) ermöglichen. Begleitend dazu muss es Schulbücher oder Materialsammlungen geben, die diese thematischen Knotenpunkte[15] in ihrer Vielfalt darstellen und Unterrichtsideen bereitstellen. In dieser Absicht ist diese Arbeit zum Papierfalten geschrieben worden.

Wiederholung durch themenübergreifende Aufgaben

c) Das eilige Voranschreiten entlang einer fachlichen Systematik verursacht vor allem in der Schule ein Problem, unter dem die Mathematik mehr leidet als jedes andere Fach: Wiederholung und Wachhalten von behandelten Dingen. Ist ein Themengebiet behandelt, so gerät es schnell in Vergessenheit, wenn es nicht immer wieder angesprochen und reaktiviert wird. Sinnvolle, fruchtbare Wiederholung benötigt aber sinnvolle Inhalte. Eine gute Wiederholung sollte die Inhalte nicht identisch zum ersten Lernprozess behandeln, sondern diese in einen neunen Zusammenhang stellen und nach Möglichkeit mehrere Themen miteinander verknüpfen. Dieses kann mit den oben genannten mathematischen Knotenpunkten geschehen, zu denen ich auch das Thema „Papierfalten" zähle.

Der Computer schafft eine neue Systematik

d) Die klassisch überlieferte Systematik wird heute durch den Computer zunehmend in Frage gestellt. Waren z.B. früher Extremwertprobleme erst nach dem Erarbeiten von Grundkenntnissen der Differentialrechnung lösbar, können sie heute als numerisches Experiment am Computer (z.B. mit Tabellenkalkulation) sinnvoll erforscht werden. Ebenso sind in der Geometrie Zusammenhänge mit dynamischer

[15] Dazu zähle ich die oben schon erwähnten Themen „Goldener Schnitt", „Spiralen", „Die Zahl π", u.s.w.

Geometrie erforschbar, weit bevor ein Beweis möglich ist. Das Erforschen von Regelmäßigkeiten, das Aufdecken von Gesetzmäßigkeiten bekommt durch den Einsatz des Computers einen größeren Stellenwert, als es früher hatte, was sich auch auf die Bedeutung des Beweises auswirkt. Nach meinen eigenen Unterrichtserfahrungen ist gerade die forschende Tätigkeit etwas, von dem eine hohe Motivation ausgeht und die in der Schule das Bild von Mathematik und die Einstellung zu diesem Fach nachhaltig verändern kann. Zudem entspricht es mehr dem aktuellen, modernen Bild von Mathematik.

Die Bedeutung von Systematik

e) Nach meiner eigenen Unterrichtserfahrung, aus Gesprächen mit SchülerInnen und deren Reaktionen auf vorgestellte Stoffpläne, meine ich, dass die Bedeutung eines systematischen Aufbaus überschätzt wird. Beim ersten Voranschreiten in einem neuen Wissensgebiet ist eine Systematik für den Lernenden nur schwer erkennbar und wenig nützlich. Systematiken, Strukturen, Zusammenhänge konnte ich immer dann sinnvoll aufzeigen und vermitteln, wenn wir nach einer gewissen Lernphase zurückgeschaut haben. Das waren dann auch sinnvolle Gelegenheiten für eine Wiederholung.

In der Lehrerausbildung an der Universität hat Systematik eine andere Bedeutung, da insbesondere dann, wenn die Inhalte nach dem Prinzip der „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ ausgewählt werden, die StudentInnen keine „Erstlerner“ sondern „Zweitlerner“ sind oder sein sollten. Sie müssen Zusammenhänge kennen, um sie später in der Schule in geeigneter Form an die SchülerInnen weitergeben zu können. Dennoch möchte ich gegen die zurzeit noch vorherrschende, klassische Systematisierung, die Einteilung in Analysis, Lineare Algebra, Geometrie u.s.w. sprechen. Genau so wie methodisch die Universität die zukünftigen LehrerInnen durch das erlebte Beispiel prägt, geschieht das auch durch die inhaltliche Strukturierung. Wenn ich möchte, dass zukünftige LehrerInnen die Inhalte an zentralen Themen, an Kristallisationspunkten ausrichten, dann muss dieses auch vorbildhaft in der universitären Lehre geschehen. Das ist wohlgemerkt eine Forderung, die ich an die Lehrerausbildung stelle, nicht an die Ausbildung von Diplommathematikern. Daher ist die gemeinsame Ausbildung beider Studentengruppen zunehmend problematisch.

Für diese in den Punkten a) bis e) dargestellten Probleme sehe ich in dem Thema „Papierfalten“ einen beispielhaften Lösungsansatz. Das bezieht sich zum einen auf die vernetzten Inhalte, zum anderen auf die in der Arbeit dargestellte Art der vielfältigen Behandlung eines Themas von verschiedenen Seiten.

Bisherige Verwendung des Themas „Papierfalten“ in Unterrichtssituationen

Das Thema Papierfalten ist ein prototypisches Beispiel für Mathematikunterricht, das nicht der hergebrachten Fachsystematik folgt. Damit erhebt sich die Frage, ob dieser Unterrichtsansatz bereits erprobt wurde und sich bewährt hat. Ich selbst kenne „Papierfalten“ seit 1992, als H.-O. Peitgen dieses Thema in einem Lehrerfortbildungskurs in Bremen vorgestellt hat. Seitdem wurde es an verschiedenen Stellen intensiv erprobt. Ich möchte hier alle Einsätze nennen, an denen ich selbst beteiligt war.

Lehrerakademie 1994: Vortrag von H.-O. Peitgen,
Workshop von A. Rodenhausen und G.Skordev

Lehrerakademie 1995: Vortrag von H.-O. Peitgen,
Workshop von A. Rodenhausen und G.Skordev

Lehrerakademie 1996: Workshop von mir

Lehrerakademie 2002: Workshop von mir

Von **1995 - 1998** fand ein **Lehrerfortbildungsprojekt „Pattern Exploration“** in Ft. Lauderdale, Florida statt, das von H.-O. Peitgen geleitet wurde und an dem ich auch teilnahm. Dabei war Papierfalten eines von 6 Workshopthemen in den dreiwöchigen Kursen. Hier wurden jährlich ca. 100 LehrerInnen geschult.

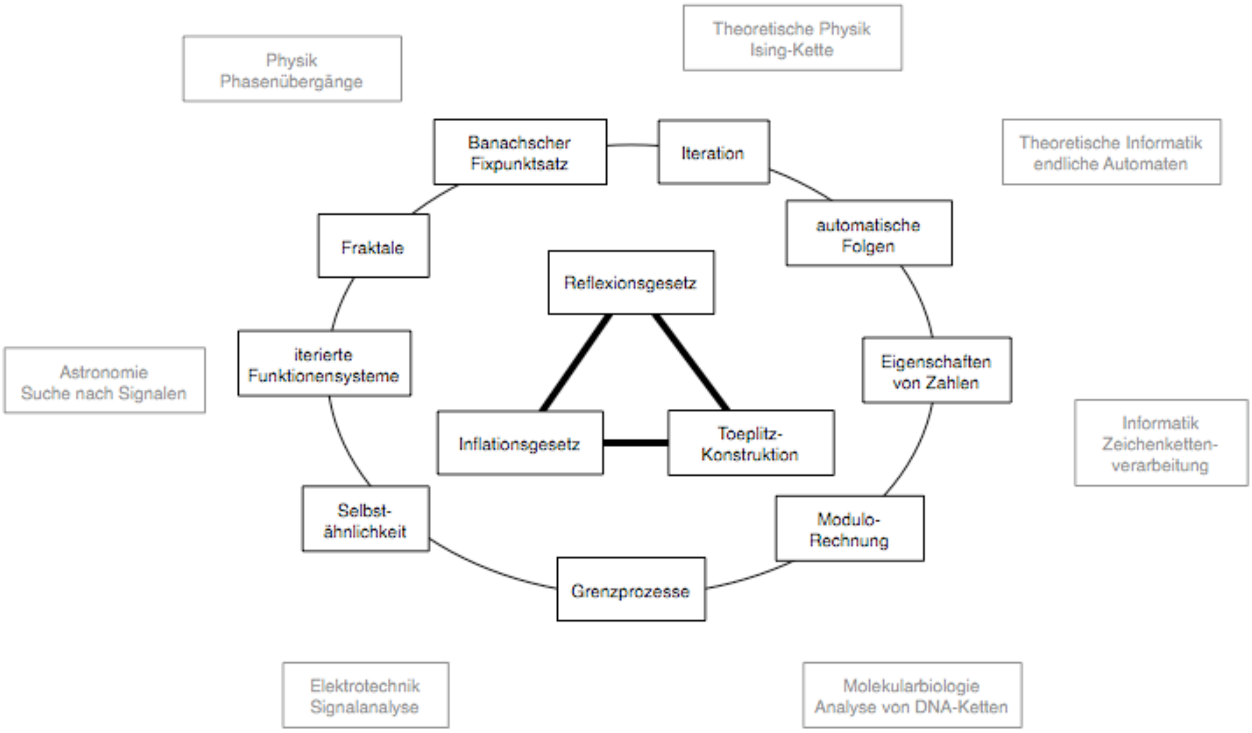
Von **1999-2003** fand das **Nachfolgeprojekt „Integrating Mathematics and Science for the Middle Grades“** statt, an dem jährlich bis zu 150 LehrerInnen teilnahmen. In den dreiwöchigen Kursen wurden 9 Themen unterrichtet, von denen eines „Papierfalten“ war.

Von **1997 bis 2003** habe ich am Schulzentrum Findorff unterrichtet und hatte dabei Gelegenheit, über vier Jahre ein **Projekt zum Thema „Fraktale Geometrie“** mit 10. Klassen durchzuführen, das jeweils ein Viertel Jahr dauerte. Behandelt wurden fünf zentrale Themen, von denen eines „Papierfalten“ war. Ich konnte so insgesamt 15 Realschul- und Gymnasialklassen unterrichten. Zum Teil entstanden beachtliche Ausarbeitungen zum Thema „Papierfalten“. Hier entstanden viele Unterrichtsvorschläge, die jeweils zum Ende eines Kapitels vorgestellt werden.

Im **Sommersemester 2005** habe ich an der Universität Bremen ein **didaktisches Seminar** zum Thema Papierfalten durchgeführt (siehe dazu Seite 9).

Vor dem Wintersemester 2005 und 2006 wurden an der Universität Bremen jeweils ein zweiwöchiges **Vorsemester** durchgeführt. Dabei stand jeder Tag (2005 10 Tage, 2006 8 Tage) unter einem anderen Thema, eines davon war in beiden Jahren „Papierfalten“. Diese Tage wurden in den Abschlussfragebögen positiv bewertet und die Übungen und das Plenum dazu zeichneten sich jeweils durch eine hohe studentische Aktivität aus.

Übersichten über die Vernetzung des Themas „Papierfalten“



Die obere Abbildung zeigt die Vernetzung des Themas „Papierfalten“ mit mathematischen Inhalten (innerer Kreis) und Bezüge zu Fachgebieten im weiteren Sinn (graue Rahmen im äußeren Umfeld)

Die untere Abbildung stellt Zusammenhänge zu anderen mathematischen Themen auf Schulniveau (Klasse 9 bis 13) her.