

# Papierfalten

von

## Reimund Albers

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
- Dr. rer. nat. -

vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik & Informatik)  
der Universität Bremen

im Oktober 2006

Datum des Promotionskolloquiums: 13.12.2006

Gutachter: Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen (Universität Bremen)  
Prof. Dr. Thomas Weth (Universität Erlangen-Nürnberg)

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	i
Didaktische Überlegungen .....	1
Persönliche Erfahrungen .....	11
Bisherige Verwendung des Themas „Papierfalten“ in Unterrichtssituationen ..	15
Übersichten über die Vernetzung des Themas „Papierfalten“ .....	16
Kapitel 1 Erste Entdeckungen beim Papierfalten .....	17
Kapitel 2 Das Reflexionsgesetz .....	23
Definition der Papierfaltungsfolge .....	28
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	30
Kapitel 3 Das Inflationsgesetz .....	37
Die Äquivalenz von Reflexions- und Inflationsprozess .....	40
Berechnung des Symbols an einem beliebigen Platz .....	40
Die Papierfaltungsfolge als Fixpunkt des Inflationsoperators .....	43
Deflation .....	47
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	49
Kapitel 4 Die geometrische Interpretation .....	53
Die Polygone $Q_n$ zum Inflationsprozess .....	58
Der Heighway-Dragon .....	65
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	69
Kapitel 5 Die Toeplitz-Konstruktion .....	73
Die Äquivalenz von Reflexionsprozess und Toeplitz-Konstruktion .....	84
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	87
Kapitel 6 Die Papierfaltungszahl .....	91
Kettenbrüche .....	92
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	97
Kapitel 7 Endliche Automaten .....	103
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	108

Kapitel 8 Iterierte Funktionensysteme und Selbstähnlichkeit .....	111
Zusammenhang zur Zeltfunktion .....	121
Der Highway-Dragon ist selbstähnlich .....	123
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	124
Kapitel 9 Das Problem der Überschneidung .....	129
Überschneidungsfreiheit bei $90^\circ$ .....	129
Spiralige Struktur in den Polygonen .....	135
Berechnung des Grenzwinkels .....	143
Überlappende Polygoneckpunkte .....	147
Selbstähnlichkeitsdimension .....	148
Kapitel 10 Papierfalten und fraktale Kurven .....	153
Die Sierpinski-Pfeilspitze .....	153
Die Koch-Kurve .....	159
Die Peano-Kurve .....	163
Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung .....	165
Literaturverzeichnis .....	169

## Vorwort

Im Alter von deutlich über 50 Jahren und nach mehr als 25 Jahren Berufserfahrung habe ich mich entschlossen, eine Dissertation zu schreiben. Damit unterscheidet sich meine Situation deutlich von der, in der üblicherweise solch eine Arbeit geschrieben wird. Ein junger Mensch ist nach der universitären Ausbildung noch ganz im Lernprozess, er möchte diesen normalerweise mit der Dissertation auf die Spitze treiben. In der Regel wird dabei ein Spezialgebiet vorangetrieben und vertieft. Das passt zu der Situation, in der sich ein junger Mensch befindet: er möchte vorankommen.

Wenn man auf viele Jahre Tätigkeit und der dabei gewonnenen Erfahrung zurückblickt, ist die Situation naturgemäß eine andere. Nicht das spezialisierte Vorschreiten steht im Vordergrund, sondern der Blick auf das Ganze, die Vielfalt. Ich verspüre eher das Bedürfnis, Verknüpfungen aufzuzeigen, Dinge zu vernetzen und Erfahrungen zusammenzufassen.

Diese Arbeit ist eine didaktische Arbeit, schließlich sollen 25 Berufsjahre gewinnbringend eingebracht werden. Wenn man in die nachfolgenden Seiten schaut, wird man den Eindruck haben, dass sie überwiegend mit Mathematik gefüllt sind. Das ist gut so, denn das spiegelt meine persönliche Überzeugung zur Mathematik und der Didaktik wider. Guter Mathematikunterricht, gleich auf welcher Ebene, lebt vom gehaltvollen mathematischen Inhalt. Um eine Sprechblase aus dem schulischen Analysisunterricht zu verwenden: der gute Inhalt ist für guten Unterricht notwendig, aber nicht hinreichend.

Im didaktischen Kapitel zu Beginn der Arbeit setze ich mich unter der Berücksichtigung von aktuellen Diskussionen und Projekten fundiert mit der Frage auseinander, was gute Lehre in der Lehramtsausbildung an der Universität ist.

Neben dieser sachlichen Auseinandersetzung möchte ich hier einige persönliche, wissenschaftlich weniger abgesicherte Ansichten zur Rolle der Didaktik der Mathematik darstellen, die sehr viel besser in das Vorwort passen.

Ziel aller didaktischen Forschung ist der gute Unterricht. Was sind erstrebenswerte Bildungsziele, notwendige und lohnende Inhalte und wirksame Methoden? In den 30 Jahren Ausbildung und Berufstätigkeit habe ich z.T. deutliche Antworten auf diese grundlegenden Fragen gehört. Über einen längeren Zeitraum hinweg erwiesen sie sich als widersprüchlich oder standen im deutlich empfundenen Widerspruch zur eigenen Erfahrung. Ich möchte das an einigen Beispielen erläutern.

1979/80 wurde ich nach dem rein fachlich ausgeprägten Studium unter dem Paradigma des Behaviorismus in den Lehreralltag eingeführt. Die Reflexion über Unterricht mündete in der Formulierung von Lernzielen, die beobachtbare, abprüfbare Verhaltensweisen nennen mussten. Gefühle, Emotionen waren explizit ausgeblendet. Neben der damals schon empfundenen Lücke erfahre ich heute, knapp 30 Jahre danach, von der Hirnforschung, dass die Emotionen beim Lernen extrem wichtig sind und über den Lernerfolg entscheiden. Letzteres stimmt mit den von mir gemachten Erfahrungen überein, und gerade jetzt, wo ich in der Lehrerausbildung tätig bin, ist mir deutlich, dass die emotionale Hinwendung zum Fach mindestens genau so wichtig ist wie die solide, fachliche Kenntnis. Oder besser, um den Zusammenhang von oben aufzugreifen: die emotionale Hinwendung zum Fach ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Erlernen solider, fachlicher Kenntnisse.

Als Junglehrer habe ich einer 6. Klasse versucht, die Bruchrechnung nach dem „Operatorkonzept“ zu vermitteln. Während ich dabei sehr viel gelernt habe, war der

Misserfolg bei den Kindern so offensichtlich, dass ich auch ohne Erfahrungshintergrund wusste, dass dieser Weg nicht noch einmal beschritten werden sollte. Die „Mengenlehre“, besser die „new maths“, habe ich nur noch in schwachen Ausläufern erlebt. 1980 war sie bereits so stark im Niedergang begriffen, dass ich ihr nur noch wenig begegnet bin. TIMSS und PISA haben den Nachweis erbracht, dass didaktische Forschung den realen Mathematikunterricht in Deutschland nicht vor dem Versagen in internationalen Vergleichen retten konnte. Heute beobachte ich, dass die Mathematikdidaktik mit Vehemenz einem neuen Paradigma, ich könnte es etwas bössartiger auch „Mode“ nennen, huldigt: dem Konstruktivismus. Ich habe allen Anlass anzunehmen, dass auch diese Grundströmung das gleiche Schicksal erleiden wird wie dereinst der Behaviorismus, in dessen Geist ich als Referendar erzogen wurde.

Der größte Fehler, den man in der Mathematikdidaktik machen kann und immer wieder macht, ist der Glaube an eine perfekte Lösung, den „Königsweg“. Den gibt es meiner Meinung nach nicht. Die Lösung für guten Unterricht liegt in der Breite und der Vielfalt. Ein guter Lehrer verfügt neben einer gehörigen Portion Talent, Begabung über einen prall gefüllten Werkzeugkasten, den er klug und virtuos einsetzen kann. Zu jedem Problem besitzt er das passende Werkzeug und hat die Kenntnisse, oftmals erst durch Erfahrung erworben, in einer Unterrichtssituation das richtige Werkzeug einzusetzen.

In diesem Zusammenhang halte ich es auch für einen Fehler, wenn in der Vergangenheit bewährte, ja propagierte Methoden später, aus einer anderen Sichtweise heraus, kritisiert und abgelehnt werden. So zum Beispiel das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch. Im Zuge der TIMS-Studie wurde es als Hauptübel des deutschen Mathematikunterrichtes ausgemacht. Ich meine, dass es immer noch seinen Platz haben sollte und ein kluger Lehrer es sehr wohl nutzbringend verwenden kann. Von Übel und sicher kritikwürdig ist der übermäßige, einseitige Einsatz dieser Unterrichtsmethode, so wie es in der Vergangenheit der Fall war. Dieses ist zu Recht kritikwürdig. Doch diesen Fehler kann man auch mit heute anerkannten Methoden oder Inhalten machen. In Hinblick auf die derzeit propagierten „offenen Aufgaben“ kritisierte Herget einen übermäßigen Gebrauch mit: „Wer immer nur offen ist, kann nicht ganz dicht sein.“

Neben allen neuen Methoden, sei es Gruppen-Puzzle, Stationenlernen oder Wochenplanarbeit, sollte man nicht außer Acht lassen, dass von guten, gehaltvollen mathematischen Themen immer schon eine starke Motivation ausging und ausgehen wird, zumal wenn der Lehrende selbst von diesem Thema begeistert ist. Womit wir wieder bei den Emotionen sind, die am Anfang meiner Ausbildung so gar nicht gern gesehen wurden.

Ein gehaltvolles, begeisterndes Thema und ein breit angelegter, vielfältiger Ansatz - diese beiden Grundüberzeugungen bilden die Basis für die vorliegende Arbeit. Daher ist es für mich konsequent, dass diese Arbeit vor allem von Mathematik handelt und daraus ihre didaktische Kraft zieht.

Begeisterung für ein Thema ist kein Zufall, kein seltener Glücksumstand. Man kann sie lernen, vor allem, vielleicht sogar nur, von der vorgelebten Begeisterung eines Lehrenden. Ich habe diese Begeisterung bei Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen erlebt, ein Mensch von so hoher Intensität, dass es schwer ist, sich seiner Überzeugungskraft zu entziehen und nicht von seiner Begeisterung angesteckt zu werden. Er hat meine Sicht auf Mathematik und Mathematikunterricht deutlich verändert und geprägt. Und er hat mir, in einer Gruppe von Lehrerinnen und Lehrern, die vor gut zehn Jahren von ihm für die Mathematik des Chaos begeistert wurden, das Thema „Papierfalten“ näher gebracht und im Laufe der Jahre immer wieder wichtige Impulse gegeben, sowohl inhaltlich als auch didaktisch. Insofern bin ich froh, dass er die Betreuung der Arbeit übernommen

hat. Ein anderer Betreuer war nach dieser langen Zeit der gemeinsamen Arbeit an diesem und vielen anderen Themen aber auch nicht denkbar.

Dass ein Thema gehaltvoll ist und vielfältige Ansätze ermöglicht, ist schon eher ein glücklicher Umstand. Nicht jedes Thema eignet sich dafür, man muss schon danach suchen. Dennoch gibt es Möglichkeiten, die Vielfältigkeit zu erhöhen und kreativ neue Ansatzmöglichkeiten zu suchen oder zu erzeugen. Für diesen Prozess hat Prof. Dr. Thomas Weth mit seinen Kreativitätsroutinen Wege aufgezeigt und vor allem in aussagekräftigen Beispielen erläutert. Daher bin ich froh, dass er als zweiter Gutachter für diese Arbeit gewonnen werden konnte.

Natürlich gab es auf dem langen Weg zu dieser Arbeit viele Menschen, die direkt oder indirekt einen Beitrag geleistet haben, mich beeinflusst oder mir mit ihrem Wissen oder in Diskussionen weitergeholfen haben. Ihnen allen möchte ich danken. Zuletzt, aber umso nachdrücklicher, danke ich meiner Frau Jutta, deren Beitrag zu dieser Arbeit sehr deutlich beschrieben werden kann: Ohne ihre moralische Unterstützung und ihr Wirken im Hintergrund wäre diese Arbeit nicht verwirklicht worden.