Eine neue Kodierung für die Papierfaltungsfolge

Schriftliche Hausarbeit

im Prüfungsgegenstand

Mathematik

im Rahmen der

Ersten Staatsprüfung für das
Lehramt an öffentlichen Schulen

vorgelegt von

Martin Große-Schulte

E-Mail: martin.grosse-schulte@gmx.net

Referent: Dr. Reimund Albers

Korreferent: Prof. Dr. Stefan Halverscheid

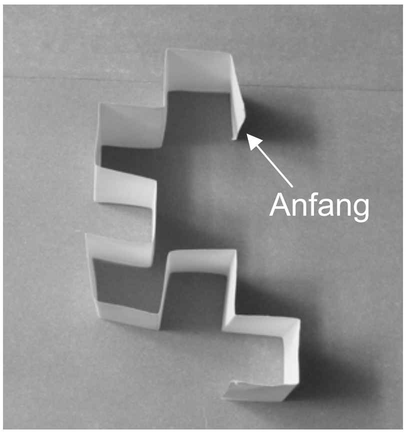
Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, durch eine neue Kodierung der Papierfaltungsfolge einen anderen Blickwinkel auf diese und damit neue Erkenntnisse über diese zu bekommen. Zunächst wollen wir kurz rekapitulieren, wie die Papierfaltungsfolge entsteht:[1]

Wir nehmen einen langen Papierstreifen, markieren sein eine kurze Seite als Anfang und falten dann die rechte Hälfte über die linke, so dass in der Mitte ein Knick entsteht. Den so gefalteten Streifen falten wir wiederum in der beschriebenen Art und Weise. Nach einigen Faltvorgängen ziehen wir den Streifen auseinander und stellen ihn wie folgt auf:

- Wir falten alle Knicke so auf, dass sich Winkel von 90° ergeben.
- Die erste Kante soll von der Anfangsmarke weg nach oben zeigen.
- Die zweite Kante soll dann nach links zeigen.



Für 4 Faltvorgänge erhält man dann eine Figur wie in der nebenstehenden Abbildung:

Wie wir zeigen werden, zeigt die letzte Kante einer derartigen Figur immer nach links; dies können wir zur Kontrolle verwenden.[2]

In der Dissertation „Papierfalten“[3] werden derartige Figuren untersucht, indem die *Knicke* als Rechts- und Linksknicke mit *R* und *L* kodiert werden. Wir wollen hier nun die *Kanten* kodieren und wählen dafür die Abkürzungen der vier Himmelsrichtungen, *N*, *W*, *S*, *O*, je nach, in welche Richtung die Kante zeigt, nachdem wir den Papierstreifen wie beschrieben aufgestellt haben und ihn von oben betrachten, wie in der Abbildung. Die Richtung der Kante ergibt sich dabei, wenn man von der Ausgangsmarke aus den Papierstreifen bis seinem Ende durchläuft. *N* steht also für den Weg nach oben, *W* für denjenigen nach links, *S* für nach unten und schließlich *O* für nach rechts zeigende Kanten.

---

[1] Vgl. Albers (2006), S. 17-27
[2] Die Betrachtung entspricht also derjenigen aus dem Kapitel 4 von Albers (2006), S. 53f
[3] Albers (2006)

Die so neu kodierten Papierstreifen betrachten wir dann als Folgen von Symbolen über einem Alphabet $A = \{N, W, S, O\}$, die wir hier untersuchen wollen. Da wir aber nur die Kodierung, nicht jedoch die ihr zugrunde liegenden Papierfaltung ändern, können wir erwarten, ähnliche Ergebnisse zu erhalten wie R. Albers in seiner Dissertation „Papierfalten".[4]
Daher werden wir uns eng an dem dortigen Vorgehen orientieren und zunächst ein Reflexionsgesetz (Kapitel 2) und ein Inflationsgesetz (Kapitel 3) für die neue Kodierung formulieren.[5] Mit diesen können wir einige Regelmäßigkeiten für unsere Papierfaltungsfolge zeigen.
Das Inflationsgesetz, das wir so für die neue Kodierung finden, unterscheidet sich in einem wesentlichen Punkt von demjenigen der alten Kodierung. Daher bietet es sich an, es auf mehrfache Anwendungen zu erweitern, wie wir es in Kapitel 4 tun werden. Dies erlaubt uns dann, einen noch besseren Einblick in das Wesen unsere Folge zu bekommen.
Die in den einzelnen Kapiteln gefundenen Regelmäßigkeiten können wir dazu verwenden, jeweils einen Algorithmus aufzustellen, der zu einer gegebenen Positionsnummer dasjenige Symbol bestimmt, das sich in der Papierfaltungsfolge an dieser Position befindet. Diese Algorithmen sind - als Excel-Tabellen programmiert – der Arbeit beigelegt.

[4] Albers (2006)
[5] zum Reflexionsgesetz vgl. Albers (2006), S. 23-36, zum Inflationsgesetz vgl. ebd. S. 37-52.

Bemerkungen zur Schreibweise

- Um Anführungsstriche zu sparen, verwenden wir die Bezeichnungen *N*, *W*, *S*, *O* in kursiver Schreibweise.
- Damit es keine Verwechslungen mit der Kantenbezeichnung *S* gibt, verwenden wir Z, um ein unbestimmtes Symbol zu bezeichnen.
- Um die Schreibweise von Symbolfolgen übersichtlicher zu gestalten, verwenden wir nach jeweils vier Symbolen einen Punkt.
- Wir verwenden der besseren Lesbarkeit halber die etwas umgangssprachlichen Begriffe „altes“ oder „neues“ Symbol oder „altes“ oder „neues“ Wort beim Betrachten des Effektes einer Anwendung eines Operators. Die Begriffe „alte“ oder „neue“ Kodierung stehen für die Kodierung mit *L* und *R* beziehungsweise mit *N*, *W*, *S* und *O*. Mit *n*-tem Symbol bezeichnen wir dasjenige Symbol, das in einem Wort an der Stelle *n* steht.

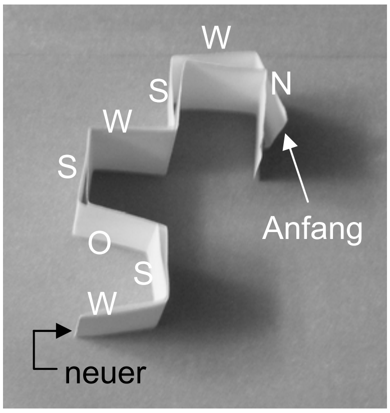
2. **Reflexionsgesetz**

Wir wollen ein Reflexionsgesetz für die beschriebene neue Kodierung finden und gehen dazu analog zum Verfahren für die alte Kodierung vor.[6]
Zunächst betrachten wir also die neue Kodierung der gefalteten Papierstreifen der ersten Stufen:

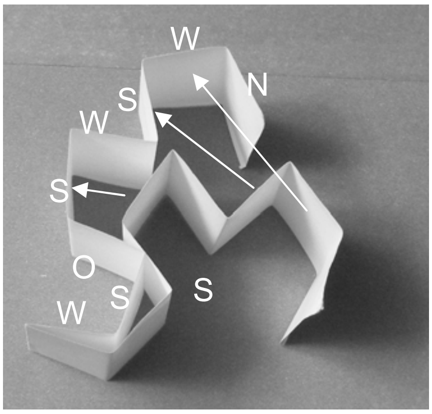
Erste Stufe:	`N`
Zweite Stufe:	`NW`
Dritte Stufe:	`NWSW`
Vierte Stufe:	`NWSW.SOSW`
Fünfte Stufe:	`NWSW.SOSW.SONO.SOSW`
Sechste Stufe:	`NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW`

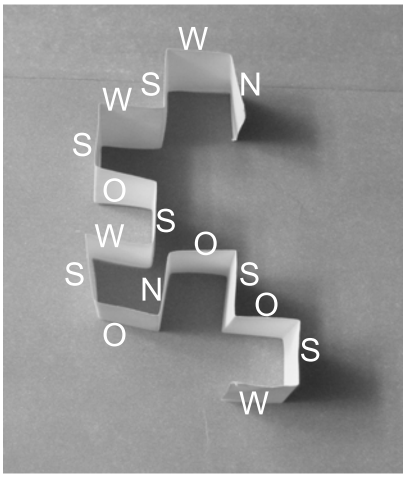
Um von einer Stufe zur nächst höheren zu gelangen, kann man offensichtlich auch in der neuen Kodierung die erste Hälfte übernehmen. Wie die zweite Hälfte aussieht, geht aus folgender Überlegung hervor:

Wir falten den Streifen einer Stufe einmal wieder zusammen und erhalten dadurch den Streifen der darunter liegenden Stufe in doppelter Ausführung. Die nebenstehende Abbildung zeigt dies für den Streifen der fünften Stufe.
Nun falten wir den Streifen wieder auseinander, wie in den beiden nachstehenden Abbildungen zu sehen:



In der linken Abbildung kennzeichnen die weißen Pfeile exemplarisch einige der Kanten, die in der ersten Abbildung noch übereinander lagen.





[6] Vgl. Albers (2006), S.23-30

Wir wollen dieses Beispiel noch einmal in unserer Kodierung betrachten:

```
Streifenende:   → WSOS.ONOS ← neuer Knick
Streifenanfang:→ NWSW.SOSW
```

Hier wird klar, dass die einzelnen Kanten der 2. Hälfte des Streifens in umgekehrter Richtung auf denen des Streifenanfangs zu liegen kommen, beziehungsweise beim Knicken so entstanden sind. Den Zusammenhang zwischen den nun übereinander liegenden Kanten kann man so beschreiben: Da der neue Knick nach der Faltungsvorschrift ein Linksknick ist, entsteht beim Auffalten zwischen der letzten Kante der 1. Hälfte und der ersten Kante der 2. Hälfte ein Winkel von 90° im Uhrzeigersinn. Dies bedeutet, dass aus einer Kante, die auf einer *N*-Kante liegt, eine *W*-Kante wird und entsprechend wird aus einem *W* ein *S*, aus einem *S* ein *O* und aus einem *O* ein *N*. Insgesamt entsteht die ganze 2. Hälfte auf diese Art. Der einzig neu hinzu kommende Winkel ist eben der beschriebene an dem neuen Knick. Beim Auffalten hat dies zur Folge, dass alle Kanten der 2. Hälfte um -90° gegenüber denjenigen der 1. Hälfte gedreht sind.

Insgesamt gilt also:

- Die Kanten der 2. Hälfte treten in der umgekehrten Reihenfolge, also in umgekehrter Richtung auf wie die dazu gehörigen der 1. Hälfte, was einer Drehung um 180° entspricht und
- sind gegenüber diesen um -90° gedreht.

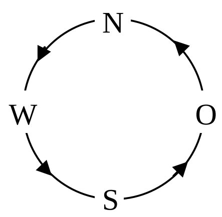
Zusammengenommen ergibt sich also eine Drehung von 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Damit erhalten wir eine vollständige Beschreibung des Reflexionsvorgangs:

Reflexionsvorgang:

Man erhält das Wort der nächsten Stufe, indem man

- das letzte Wort abschreibt und
- noch einmal in umgekehrter Reihenfolge anhängt und
- dabei die Symbole wie nebenstehend ersetzt:



Letzteren Vorgang nennen wir entsprechend *Reflektieren*.

Nachstehendes Schaubild verdeutlicht diesen Vorgang. Dabei sind die abgeschriebenen und angehängten Symbole in Hellgrau dargestellt und die Pfeile symbolisieren den Ersetzungsvorgang:

Erste Stufe:	NN
	↓
Zweite Stufe:	NWWN
	↓↓
Dritte Stufe:	NWSW.WSWN
	↓↓↓↓
Vierte Stufe:	NWSW.SOSW.WSOS.WSWN
	↓↓↓↓.↓↓↓↓
Fünfte Stufe:	NWSW.SOSW SONO.SOSW.WSOS.ONOS.WSOS.WSWN
	↓↓↓↓.↓↓↓↓.↓↓↓↓.↓↓↓↓
Sechste Stufe:	NWSW.SOSW.SONO.SOSW SONO.NWNO.SONO.SOSW

Umgekehrt können wir an den bisher aus geknickten Papierstreifen abgeleitenden Zeichenfolgen leicht die Richtigkeit dieses Vorgangs überprüfen, indem wir die vordere und hinter Hälfte trennen und die einzelnen Zeichen von außen nach innen vergleichen:

Der Vergleich der Symbole für Stufe 4:	N W S W S O S W

Diese an den geknickten Papierstreifen niedriger Stufen gewonnene Erkenntnis soll nun, ganz wie bei den *LR*-Folgen[7] die Grundlage für eine formale Herangehensweise an die Papierfaltungsfolge in der Kodierung *NWSO* sein.

[7] Vgl. Albers (2006) S.24

Definition 2.1: Es sei *A*={N,W, S,O} ein Alphabet mit 4 Symbolen und $Z \in A$.

a) Dann bedeutet $Z' = \begin{cases} W, \text{wenn } Z = N \\ S, \text{wenn } Z = W \\ O, \text{wenn } Z = S \\ N, \text{wenn } Z = O \end{cases}$ und $\overline{Z} = \begin{cases} S, \text{wenn } Z = N \\ \text{N, wenn } Z = S \\ \text{O, wenn } Z = W \\ \text{W, wenn } Z = O \end{cases}$

Wir nennen Z' die *Ersetzung* von *Z*, die Operation *Ersetzen* und den Operator entsprechend *Ersetzungsoperator*. Wir nennen $\overline{Z}$ das *Inverse* von *Z* und den Übergang von *Z* zu $\overline{Z}$ *Invertieren*.

b) Es sei *w*=$Z_1Z_2Z_3\ldots Z_n$, $n \in IN$ ein Wort aus A^*. Dann bedeutet

$w' = Z_n' \ldots Z_3' Z_2' Z_1'$.

Wir nennen wieder w' die *Ersetzung* von w, die Operation *Ersetzen* und den Operator *Ersetzungsoperator.*

c) Es sei $w = Z_1 Z_2 Z_2 \ldots Z_n$, $n \in IN$ ein Wort aus A^*.

Dann bedeutet $\overline{w} = \overline{Z}_n \ldots \overline{Z}_3 \overline{Z}_2 \overline{Z}_1$.

Bemerkung:

a) In Teil b) und c) ist zu beachten, dass in w' und in $\overline{w}$ die einzelnen Zeichen sowohl ersetzt werden als auch in der umgekehrten Reihenfolge stehen.

b) Wir nennen daher w'' (und <u>nicht</u> $\overline{w}$) das *Inverse* von w, vergleiche Folgerung 2.2 e) und Bemerkung 4.8.

c) Zur Schreibweise: Der Ersetzungsoperator bezieht sich ausschließlich auf das direkt davor stehende Zeichen, soll er sich auf mehrere Zeichen beziehen, so setzen wir diese in Klammern.

Folgerung 2.2: Damit gilt:

a) $Z'' = \overline{Z}$ und

b) $\overline{\overline{Z}} = Z'''' = Z$ für alle $Z \in A$,

c) $\overline{\overline{w}} = w$ für alle $w \in A^*$ und

d) $w'''' = w$, aber

e) $w'' \neq \overline{w}$ für alle $w \in A^*$.

f) Für die Länge der Wörter: $|w| = |w'| = |\overline{w}|$.

Beweis: Die Punkte a) bis c) und f) folgen unmittelbar aus der Definition.

d) $w'''' = (Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_n)''''$

$= (Z_n' ... Z_3' Z_2' Z_1')'''$ nach Definition b)

$= (\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 ... \overline{Z}_n)''$ nach Definition b) und Folgerung a)

$= (\overline{Z}_n' ... \overline{Z}_3' \overline{Z}_2' \overline{Z}_1')'$ nach Definition b)

$= \overline{\overline{Z}}_1 \overline{\overline{Z}}_2 \overline{\overline{Z}}_3 ... \overline{\overline{Z}}_n$ nach Definition b) und Folgerung a)

$= Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_n = w$ nach Folgerung b)

e) $w'' = (Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_n)'' = (Z_n' ... Z_3' Z_2' Z_1')' = \overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 ... \overline{Z}_n \neq \overline{Z}_n ... \overline{Z}_3 \overline{Z}_2 \overline{Z}_1 = \overline{w}$ nach Definitionen b) und c) und Folgerung a) □

Definition 2.3: Es sei $A = \{N, W, S, O\}$.

Der Operator $F: A^* \to A^*$ heißt *Reflexionsoperator* und erzeugt aus einem Wort $w \in A^*$ ein anderes Wort nach der Vorschrift: $F(w) = \begin{cases} N\text{, wenn } w = \emptyset \\ ww'\text{, wenn } w \neq \emptyset \end{cases}$

Definition 2.4:

$(w_n)_{n \in IN}$ ist eine Folge von Wörtern aus $A^* = \{N, W, S, O\}^*$, die folgendermaßen rekursiv definiert ist: $w_0 = N \qquad w_{n+1} = F(w_n)$

Bemerkung: Die ersten 5 Wörter dieser Folge sind damit:

$w_0 = N$

$w_1 = F(w_0) = w_0 w_0' = NW$

$w_2 = F(w_1) = w_1 w_1' = NWSW$

$w_3 = F(w_2) = w_2 w_2' = NWSWSOSW$

$w_4 = F(w_3) = w_3 w_3' = NWSWSOSWSONOSOSW$

Damit haben wir einen formalen Aufbau der Papierfaltungsfolge erreicht. Unseren Überlegungen entsprechend leistet eine Anwendung des Reflexionsoperators auf ein gegebenes Wort auf der Ebene der *NWSO*-Wörter das Gleiche wie ein neuer Knick bei einem Papierstreifen: Entspricht

das alte Wort dem alten Papierstreifen, so wird auch das durch den Reflexionsoperator gebildete neue Wort dem durch nochmaliges Knicken entstehenden neuen Papierstreifen entsprechen.
Unsere Definitionen von Wörtern erlauben es nun, weiter gehende Überlegungen anzustellen:

Satz 2.5: Im Wort w_n, $n \in IN_0$ ist die Anzahl aller Symbole $|w_n| = 2^n$.

Beweis (vollständige Induktion über n): Induktionsanfang: $n = 0$: Da $w_0 = N$ folgt direkt $|w_0| = 1 = 2^0$ wie behauptet.

<u>Induktionsvoraussetztung:</u> Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$: $|w_n| = 2^n$.

<u>Induktionsschluss:</u> Das Wort w_{n+1} entsteht aus w_n durch einmaliges Anwenden des Reflexionsoperators: $w_{n+1} = F(w_n) = w_n w_n'$ nach Definition der Folge. Damit gilt: $|w_{n+1}| = |w_n| + |w_n'| = 2|w_n|$, da sich beim Ersetzen der Symbole beim Übergang von w_n zu w_n' nur die Symbole, nicht aber deren Anzahl ändert. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt also insgesamt:
$|w_{n+1}| = 2|w_n| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ □

Satz 2.6: über die Anzahl der einzelnen Symbole:
Es sei $A = \{N, W, S, O\}$, $Z \in A$, $n \in IN_0$.
Für $Anz_Z(w_n)$, die Anzahl des Symbols *Z* im Wort w_n, gilt:

$$Anz_Z(w_0) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } Z = N \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

$$Anz_Z(w_{n+1}) = Anz_Z(w_n) + Anz_{Z'''}(w_n)$$

Beweis (vollständige Induktion über n):
<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$: Hier ist die Behauptung klar, da $w_0 = N$.
<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$ und alle $Z \in A$.
<u>Induktionsschritt:</u>
Es gilt: $w_{n+1} = F(w_n) = w_n w_n' \Rightarrow Anz_Z(w_{n+1}) = Anz_Z(w_n) + Anz_Z(w_n')$.
Nach Definition 2.1 b) sind in w_n' alle Symbole *Z* aus w_n (und nur diese) jeweils durch das entsprechende Symbol Z' aus Definition 2.1 a) ersetzt.

Daher gilt $Anz_{Z'}(w_n') = Anz_Z(w_n)$. Da nach Folgerung 2.2 b) $Z'''' = Z$ gilt, haben wir somit: $Anz_Z(w_n') = Anz_{Z''''}(w_n') = Anz_{Z'''}(w_n)$. Insgesamt gilt also: $Anz_Z(w_{n+1}) = Anz_Z(w_n) + Anz_{Z'''}(w_n)$ und damit die Behauptung, da sie für beide Summanden nach Induktionsvoraussetzung gilt. □

Folgerung 2.7: Für die einzelnen Symbole gilt also:

$$Anz_N(w_{n+1}) = Anz_N(w_n) + Anz_O(w_n) \qquad Anz_S(w_{n+1}) = Anz_S(w_n) + Anz_W(w_n)$$

$$Anz_W(w_{n+1}) = Anz_W(w_n) + Anz_N(w_n) \qquad Anz_O(w_{n+1}) = Anz_O(w_n) + Anz_S(w_n)$$

Damit ergeben sich für die ersten 5 Wörter folgende Anzahlen:

Wort	Anzahl			
	N	W	S	O
w_0	1	0	0	0
w_1	1	1	0	0
w_2	1	2	1	0
w_3	1	3	3	1
w_4	2	4	6	4
w_5	6	6	10	10

Beim Betrachten dieser Tabelle fällt die Ähnlichkeit mit dem Pascalschen Dreieck auf. Die Anzahlen für die Wörter w_0 bis w_3 entsprechen ihm zunächst exakt. Bei den Wörtern w_4 und w_5 tritt ein Effekt der Überlappung auf, da die Spaltenanzahl des Pascalschen Dreiecks im Gegensatz zur Symbolanzahl unserer Folge nicht begrenzt ist.

Für das Pascalsche Dreieck gilt:

$$\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1; \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

wobei *n* den Zeilen- und *k* den Spaltenindex bezeichnen. Identifiziert man unsere Symbole *N, W, S, O* in dieser Reihenfolge mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, so erkennt man für die ersten 4 Wörter direkt den Zusammenhang zwischen den Anzahlen und dem Pascalschen Dreieck:

Zeile n	Spalte k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84

Beim Wort w_4 geschieht es nun, dass die 1 aus der fünften Spalte des Pascalschen Dreiecks zu der ersten Spalte hinzukommt, analog kommen im Wort w_5 die 5 und die 1 zu der ersten und zweiten Spalte hinzu.
Insgesamt gilt damit folgender

Satz 2.8: $Anz_N(w_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4i}$ $\quad Anz_W(w_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/4 \rfloor} \binom{n}{4i+1}$

$$Anz_S(w_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-2)/4 \rfloor} \binom{n}{4i+2} \quad Anz_O(w_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-3)/4 \rfloor} \binom{n}{4i+3}$$

Beweis: (vollständige Induktion über n):

Induktionsanfang n=3:

$$Anz_N(w_3) = 1 = \binom{3}{0} = \sum_{i=0}^{\lfloor 3/4 \rfloor} \binom{3}{4i} \quad , \quad Anz_W(w_3) = 3 = \binom{3}{1} = \sum_{i=0}^{\lfloor 3/4 \rfloor} \binom{3}{4i+1}$$

$$Anz_N(w_3) = 3 = \binom{3}{2} = \sum_{i=0}^{\lfloor 3/4 \rfloor} \binom{3}{4i+2}, \quad Anz_N(w_3) = 1 = \binom{3}{3} = \sum_{i=0}^{\lfloor 3/4 \rfloor} \binom{3}{4i+3}.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$.

Induktionsschritt für $Anz_W(w_{n+1})$:

$Anz_W(w_{n+1}) = Anz_W(w_n) + Anz_N(w_n)$ nach Folgerung 2.7

$= \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/4 \rfloor} \binom{n}{4i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4i}$ nach Induktionsvoraussetzung

$= \sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4i}$, da für $i = n/4$ gilt: $\binom{n}{4i+1} = 0$ nach Def. von $\binom{n}{k}$

$= \sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n+1}{4i+1}$ Zusammenfassen der Bionomialkoeffizienten

$= \sum_{i=0}^{\lfloor ((n+1)-1)/4 \rfloor} \binom{n+1}{4i+1}$ wie behauptet.

Der Induktionsschritt für Anz_S und Anz_O verläuft analog. Beim Beweis für *Anz_N* muss man zusätzlich ausnutzen, dass mit Indexverschiebung und wegen $\binom{n}{-1} = 0$ $\sum_{i=0}^{\lfloor (n-3)/4 \rfloor} \binom{n}{4i+3} = \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/4 \rfloor} \binom{n}{4i-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/4 \rfloor} \binom{n}{4i-1}$ gilt. □

Bemerkung:

Die Zeilensumme einer Zeile *n* im Pascalschen Dreieck (= 2^n) entspricht damit der Anzahl der Symbole unseres Wortes w_n nach Satz 2.5.

Satz 2.9:

Es sei $Anz_{N+S}(w_n)=Anz_N(w_n)+Anz_S(w_n)$ und $Anz_{W+O}(w_n)=Anz_W(w_n)+Anz_O(w_n)$.
Dann gilt: $Anz_{N+S}(w_n)= Anz_{W+O}(w_n)$, $n \in IN,\ n \geq 1$

Beweis: vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang n=1:

$Anz_N(w_1) + Anz_S(w_1) = 1 + 0 = 1 = 1 + 0 = Anz_W(w_1) + Anz_O(w_1)$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$

Induktionsschritt: n → n+1:

$Anz_{N+S}(w_{n+1}) = Anz_{N+S}(F(w_n))$, da w_{n+1} durch Agieren des Reflexionsoperators auf w_n entsteht

$= Anz_{N+S}(w_n w_n') = Anz_{N+S}(w_n) + Anz_{N+S}(w_n')$

$= Anz_{W+O}(w_n) + Anz_{W+O}(w_n')$ nach Induktionsvoraussetzung.[8]

$= Anz_{W+O}(w_n w_n') = Anz_{W+O}(F(w_n)) = Anz_{W+O}(w_{n+1})$ □

Bemerkung 2.10:

Auf das Pascalsche Dreieck übertragen besagt dieser Satz, dass in einer Zeile *n* die Summe der Zahlen in den geraden Spalten gleich der Summe derjenigen in den ungeraden Spalten ist. Auf die gefalteten Papierstreifen übertragen bedeutet er, dass es genauso viele Kanten in Nord- und Südrichtung gibt wie in West- und Ostrichtung.

Wir wollen in diese Richtung nun noch eine genauere Aussagen treffen. Dazu definieren wir zunächst eine Funktion $\tilde{\sigma}$, die das Symbol an einer gegebenen Stelle im Wort angibt:

Definition 2.11:

Es sei *A* das Alphabet {*N,W,S,O*}. Dann sei $\tilde{\sigma}: A^* \times IN \to A$ eine Funktion, wobei $\tilde{\sigma}(v,k)$ im Wort *v* das *k*-te Symbol angibt, $0 \le k \le |v| - 1$.

Beispiel:

$\tilde{\sigma}(w_3, 5) = O$, denn im Wort w_3 = *NWSWSOSW* ist der Buchstabe an der Stelle 5 ein O.

Die Funktion $\tilde{\sigma}$ gibt uns nun die Möglichkeit, die Regelmäßigkeiten in den Wörtern w_n, die durch wiederholtes Anwenden des Reflexionsoperators entstehen, wie folgt zu beschreiben:

---

[8] Diese gilt auch für w_n', weil gilt: $Anz_{N+S}(w_n') = Anz_{W+O}(w_n)$ und $Anz_{W+O}(w_n') = Anz_{N+S}(w_n)$, da $S = W'$ und $N = O'$ einerseits und $W = N'$ und $O = S'$ andererseits, das heißt, *N* und *S* in w_n' entstehen ausschließlich aus *W* und *O* in w_n und *W* und *O* in w_n' entstehen ausschließlich aus *N* und *S* in w_n.

Satz 2.12:

a) Für alle $n \in IN, m \in IN, k \in IN, m < n, \quad k \leq 2^m - 1$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_m, k)$

b) Für alle $n \in IN$ und alle $k \in IN_0,\ k < 2^{n-1}$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, k) = (\tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1 - k))'''$

beziehungsweise: $(\tilde{\sigma}(w_n, k))' = \tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1 - k)$

c) Für alle $n \in IN,\ n \geq 2$ und alle $k \in IN$, $0 < k < n$ gilt:

i) $\tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1) = W$

ii) $\tilde{\sigma}(w_n, 2^k - 1) = W$

iii) $\tilde{\sigma}(w_n, 2^k) = S$

Das heißt, auf allen Positionen mit den Nummern 2, 4, 8, 16… steht ein *S* und je auf derjenigen davor sowie auf der letzten Position im Wort w_n ein *W*.

Beweis:

a) Besagt, dass an der festen Position *k* in allen kürzeren Wörtern als w_n das gleiche Symbol steht wie in w_n und folgt direkt aus der Definition 2.4 der Wörter mittels des Reflexionsoperators und aus Folgerung 2.2 f).

b) Die Behauptung beschreibt direkt die Funktionsweise des Reflexionsoperators und folgt somit direkt aus dessen Definition 2.3.

c) <u>Beweis i)</u> Es gilt: $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^{n+1} - 1) = (\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^{n+1} - 1 - (2^{n+1} - 1)))'$ nach Teil b)

$$= \tilde{\sigma}(w_{n+1}, 0) = N' = W$$

<u>Beweis ii) und iii)</u> (vollständige Induktion über n):

Zunächst gilt wegen $w_0 = N$ nach Teil a) für alle $n \in IN_0$: $\tilde{\sigma}(w_n, 0) = N$.

<u>Induktionsanfang</u>: n=2 $\Rightarrow k = 1$: Da w_2=*NWSW* , gilt wegen

ii) $\tilde{\sigma}(w_2, 2^1 - 1) = W$ und

iii) $\tilde{\sigma}(w_2, 2^1) = S$ die Behauptung.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$.

<u>Induktionsschritt</u>: $n \to n + 1$:

Nach Induktionsvoraussetzung und Teil a) gelten die Behauptungen für alle *k<n*. Zu zeigen sind sie nun für *k=n*:

ii) Es gilt: $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^n - 1) = \tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1) = W$ nach Teil a) und Teil d) i)

iii) Es gilt: $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^n) = \tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^{n+1} - 1 - (2^n - 1)) = (\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2^n - 1))'$ nach Teil b)

$= (\tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1))' = W'$ nach Teil a) und da $\tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1) =$ *W* nach Teil d) i)

$= S$ nach Definition 2.1 a) □

Bemerkung: Aus Teil a) folgt mit $m := n-1$, dass die erste Hälfte von w_n gerade w_{n-1} ist.

Beispiel:[9] Wort w_5

b) NWSW.SOSW.SO**N**O.SOSW.SONO.N**W**NO.SONO.SOSW
c) i)und ii) N**W**S**W**.SOS**W**.SONO.SOS**W**.SONO.NWNO.SONO.SOS**W**
iii) NW**S**W.**S**OSW.**S**ONO.SOSW.**S**ONO.NWNO.SONO.SOSW
1 2 3
0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901

Die erste Zeile zeigt, dass *N*=$\tilde{\sigma}(w_5,10) = \tilde{\sigma}(w_5,2^5-1-10)''' = \tilde{\sigma}(w_5,21)''' = W'''$.
In der zweiten sind die *W* an den Stellen 2^k-1 und das *W* am Ende des Wortes dargestellt und die letzte veranschaulicht die *S* an den Stellen 2^k.
Da bei der neuen Kodierung für kein Symbol *Z* gilt: $Z'' = Z$ sondern erst das viermalige Ersetzen die Identität ergibt: $Z'''' = Z$, fällt das Translationsgesetz für die neue Kodierung etwas komplizierter aus als für die alte und die Abstände zwischen den ursprünglichen Symbolen und ihren Translationen sind etwas größer:

Satz 2.13: Translationsgesetz
Für alle $n \in IN$, alle $m \in IN_0$, $m \le n-4$ und alle $k \in IN_0$, $k \le 2^m - 1$ gilt:

$$\tilde{\sigma}(w_n,k) = \tilde{\sigma}(w_n,10\cdot 2^m + k)$$

Beweis: $\tilde{\sigma}(w_n,k) = \tilde{\sigma}(w_{m+1},k)$ nach Satz 2.12 a), da m+1<n

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+1},2^{m+1}-1-k)'''$ nach Satz 2.12 b)

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+2},2^{m+1}-1-k)'''$ nach Satz 2.12 a), da m+1<m+2

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+2},(2^{m+2}-1)-(2^{m+1}-1-k))''''''$ nach Satz 2.12 b)

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+2},(2^{m+2}-1)-(2^{m+1}-1-k))''$ Folgerung 2.2 d)

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+2},(2^{m+1}+k))''$ Zusammenfassen der Potenzen

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+3},(2^{m+1}+k)''$ nach Satz 2.12 a), da m+2<m+3

[9] In den Beispielen haben wir die Positionsnummern eingefügt; in der ersten Zeile davon stehen die Zehnerstellen und in der zweiten die Einerstellen.

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+3}, 2^{m+3} - 1 - (2^{m+1} + k))'''''$ nach Satz 2.12 b)

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+3}, 2^{m+3} - 1 - (2^{m+1} + k))'$ nach Folgerung 2.2 d)

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+3}, 4 \cdot 2^{m+1} - 1 - (2^{m+1} + k)))'$ Umformung

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+3}, 3 \cdot 2^{m+1} - 1 - k))'$ Zusammenfassen der Potenzen

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+4}, 3 \cdot 2^{m+1} - 1 - k))'$ nach Satz 2.12 a), da m+3<m+4

$= (\tilde{\sigma}(w_{m+4}, 2^{m+4} - 1 - (3 \cdot 2^{m+1} - 1 - k)))''''$ nach Satz 2.12 b)

$= \tilde{\sigma}(w_{m+4}, 2^{m+4} - 1 - (3 \cdot 2^{m+1} - 1 - k))$ nach Folgerung 2.2 d)

$= \tilde{\sigma}(w_{m+4}, 8 \cdot 2^{m+1} - 1 - (3 \cdot 2^{m+1} - 1 - k))$ Umformung

$= \tilde{\sigma}(w_{m+4}, 5 \cdot 2^{m+1} + k)$ Zusammenfassen der Potenzen

$= \tilde{\sigma}(w_{m+4}, 10 \cdot 2^{m} + k)$

$= \tilde{\sigma}(w_{n}, k + 10 \cdot 2^{m})$ nach Satz 2.12 a), da $m + 4 \leq n$ nach Voraussetzung. □

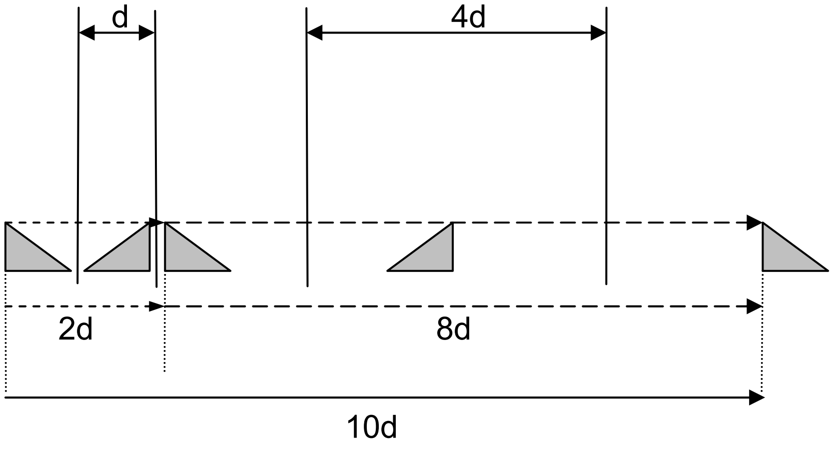
Beispiel 2.14: *n*=7, *m*=2:

```
NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW     31
SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW     63
SONO.NWNO.NWSW.NWNO.NWSW.SOSW.NWSW.NWNO     95
SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW    127
```

Die Zahlen am Zeilenende tragen die Nummer des letzten Platzes der betreffenden Zeile. Das Wort w_2 taucht in w_7 zweimal verschoben auf: ab Stelle 40 und ab Stelle 80. Die Verschiebung an Stelle 40 ($= 10 \cdot 2^2$) erklärt sich direkt aus obigem Satz. Die Verschiebung an Stelle 80 ($= 10 \cdot 2^3$) entspricht der Verschiebung des Wortes w_3 an diese Stelle, dessen erste Hälfte nach Satz 2.12 a) w_2 ist. Dem entsprechend kommt w_2 als nächstes an der Stelle 160 ($= 10 \cdot 2^4$) als Anfang des Wortes w_4 vor.

Wie für bei den *LR*-Wörtern ist der Name des Gesetzes in Anlehnung an die Geometrie passend: Da es aber in der neuen Kodierung nicht nur zwei, sondern vier Symbole gibt, erreicht man mit zwei Spiegelungen nicht das Ausgangswort *w*, sondern $\overline{w} = w''$. $\overline{w}$ steht also in der richtigen Reihenfolge, aber die einzelnen Symbole $Z \in w$ sind durch das jeweilige Inverse $\overline{Z}$ ersetzt.

Erst nach vier Spiegelungen entsteht als Resultat wieder das Anfangswort, da $w'''' = \overline{\overline{w}} = w$.



Die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden, die den Abstand *d* haben, ergibt eine Translation. Dabei ist der Translationsvektor senkrecht zu den Geraden und hat die Länge *2d*. Hier im Bild wird das Dreieck insgesamt vier Mal gespiegelt: zunächst an den beiden vorderen Geraden mit Abstand *d* und dann an den beiden hinteren Geraden mit Abstand *4d*. Insgesamt ergibt sich so eine Verschiebung um $2 \cdot (d + 4d) = 10d$.

```
NWSW|SOSW|SONO.SOSW|SONO.NWNO.SONO.SOSW|SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
    |    |    1    |     2         3   |          4         5              6
0123|4567|8901.2345|6789.0123.4567.8901|2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123
    |    |         |                   |
    1.   2.        3.                  4.     ← Spiegelachse
```

Von Platz 0 bis 3 steht das Wort w_2 (**fett** gedruckt). Dieses wird an der 1. Spiegelachse reflektiert und wird so zu w_2' auf den Plätzen 4 bis 7 (*SOSW*). Die nächste Spiegelung an der 2. Achse führt zu w_2'' auf den Plätzen 8 bis 11 (*NWNO*). Durch die Spiegelung an der 3. Achse entsteht auf den Plätzen 20 bis 23 $w_2''' = NWNO$. Schließlich, nach dem Spiegeln an der 4. Achse erhalten wir wieder w_2 (**fett** gedruckt) ab der Stelle 40. In der Abbildung sind die Zwischenergebnisse unterstrichen.

Die ersten beiden Achsen haben einen Abstand von 4, die 3. und 4. Achse einen Abstand von 16 Symbolen. Nach dem geometrischen Gesetz ist daher das Wort w_2 insgesamt um $2 \cdot (4 + 16) = 40$ Symbole verschoben, dem Abstand der beiden fett gedruckten *NWSW* in der Abbildung. Nach dem Translationsgesetz ergibt sich dieser Abstand als $10 \cdot 2^2 = 40$.

Folgerung: Das Translationsgesetz, wie es für die *LR*-Wörter formuliert worden ist, ist hier für die Wörter $\overline{w}$ gültig:

Satz 2.15: Translationsgesetz für $\overline{w}$:

Für alle $n \in IN$, alle $m \in IN$, $m \leq n-2$ und alle $k \in IN_0$, $k \leq 2^m - 1$ gilt:

$$\tilde{\sigma}(w_n, k) = \overline{\tilde{\sigma}(w_n, k + 2^{m+1})}$$

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 2.13 bis Zeile 6 gilt:

$$\tilde{\sigma}(w_n, k) = (\tilde{\sigma}(w_{m+2}, (2^{m+1} + k))''.$$

Dies wiederum ist gleich $\overline{\tilde{\sigma}(w_n, k + 2^{m+1})}$ nach Folgerung 2.2 a) und nach Satz 2.12 a), da $m + 2 \leq n$. □

Beispiel 2.16: $n = 6,\ \mathrm{m} = 3$:

```
NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
          1         2         3         4         5         6
0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123
```

Verschiebung um 16 Plätze

Verschiebung um 32 Plätze

Das Wort $\overline{w_3}$ (=*SONO.NWNO*), das aus w_3 (=*NWSW.SOSW* **fett** gedruckt) entsteht, kommt zwei Mal verschoben im Wort w_6 vor, einmal um $2^{3+1} = 16$ Plätze und einmal als Beginn des Wortes $\overline{w_4}$ um $2^{4+1} = 32$ Plätze verschoben.

Bemerkung 2.17: $\overline{w_3}$ taucht in der Abbildung noch einmal ab Stelle 48 auf. Dieses Auftauchen können wir geometrisch als Spiegelung zuerst an der Achse zwischen Position 7 und 8 und dann an der Achse zwischen Position 31 und 32 erklären. Der Abstand zwischen diesen beiden Achsen beträgt ja gerade $32 - 8 = 24$ Symbole und daher die Verschiebung nach dem geometrischen Gesetz $48 = 2 \cdot 24$ Symbole. Diese Beobachtung führt uns zu einer Verallgemeinerung der Translationsgesetze aus Satz 2.13 und 2.15:

Satz 2.18:

a) Für alle $n \in IN$, alle $m, a_1, a_{2,} a_3 \in IN_0$ mit $m+1 < a_1 < a_2 < a_3 \leq n$, und alle

$k \in IN_0$, $k \leq 2^m - 1$ gilt:

$\tilde{\sigma}(w_n, k) = \tilde{\sigma}(w_n, (2^{(a_3-m-1)} - (2^{(a_2-m-1)} - (2^{(a_1-m-1)} - 1))) \cdot 2^{m+1} + k)$

b) Für alle $n, a \in IN$, alle $m \in IN_0$ mit $m+1 < a \leq n$, und alle $k \in IN_0$,

$k \leq 2^m - 1$ gilt: $\tilde{\sigma}(w_n, k) = \overline{\tilde{\sigma}(w_n, k + (2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1})}$.

Beweis: Der Beweis ist analog zu den Beweisen für die genannten Sätze. Dabei übernimmt a_1 die Rolle von *m*+2 und entsprechend a_2 und a_3 die Rolle von *m*+3 und *m*+4. Die Terme $(2^{(a_3-m-1)} - (2^{(a_2-m-1)} - (2^{(a_1-m-1)} - 1))) \cdot 2^{m+1} + k$ und $(2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1}$ ergeben sich dann beim Zusammenfassen der Potenzen. □

Bemerkung 2.19:

a) Anschaulich gesprochen befinden sich direkt vor den Stellen *m*, 2^{a-1} und 2^{a_i-1}, $i = 1,2,3$ die Achsen, an denen wir die Symbole des Wortes w_m spiegeln.

b) Für $a_1 = m+2$, $a_2 = m+3$ und $a_3 = m+4$ erhält man aus Teil a) Satz 2.13 und für $a = m+2$ erhält man aus Teil a) Satz 2.15.

Beispiel 2.20:

a) Für $m = 3$ und $a = 6$ erhält man $\tilde{\sigma}(w_6, k) = \overline{\tilde{\sigma}(w_6, k + 3 \cdot 16)}$ für $k \leq 2^3 - 1$ vergleiche Bermerkung 2.17.

b) Wegen $(2^{(9-3-1)} - (2^{(7-3-1)} - (2^{(6-3-1)} - 1))) \cdot 2^4 = 27 \cdot 16 = 432$ haben wir in w_9 ab Stelle 432 die Symbolfolge *NWSWSOSW* $= w_3$.

Ebenso wie bei der Betrachtung der *LR*-Wörter wollen wir nun unsere Betrachtungen über die Wörter w_n für den Grenzwert $n \to \infty$ erweitern. Da auch in der neuen Kodierung nach Satz 2.12 a) das Symbol an einem gegebenen Platz *k* unabhängig vom Index *n* des Wortes w_n fest ist, existiert dieser Grenzwert.

Definition 2.21:

Das Wort $\omega \in \{N,W,S,O\}^*$ ist unendlich lang und heißt *Papierfaltungsfolge.* Das Symbol auf Platz *k* in *ω* ist definiert durch das *k*-te Symbol im Wort w_n , $n,k \in IN_0$, $2^n - 1 \geq k$.

Definition 2.22:

Es sei $\sigma : IN \to \{N,W,S,O\}$ eine Funktion, wobei $\sigma(k), k \in IN_0$, das *k*-te Symbol in der Papierfaltungsfolge *ω* angibt.

Insbesondere gilt also für $\sigma : \sigma(k) = \tilde{\sigma}(w_n, k)$ für alle $n \in IN \text{ mit } k \leq 2^n - 1$.

Nun können wir wieder die bisher für den endlichen Fall festgestellten Eigenschaften auf die unendliche Papierfaltungsfolge *ω* übertragen:

Satz 2.23:

a) Für alle $k \in IN$ gilt: $\sigma(2^k)=S$

b) Für alle $k \in IN_0$ gilt: $\sigma(2^k-1)=W$

c) Für alle $n,k \in IN_0$ mit $k \leq 2^n - 1$ gilt: $\sigma(k) = (\sigma(2^n - 1 - k))'''$

beziehungsweise: $\sigma(k)' = \sigma(2^n - 1 - k)$

Beweis: Teil a) folgt direkt aus Satz 2.12 c) iii), Teil b) aus Satz 2.12 c) ii) und Teil c) aus Satz 2.12 a). □

Die den Translationsgesetzen entsprechenden Gesetze sind:

Satz 2.24: Seien $k,m \in IN_0$ mit $k \leq 2^m - 1$. Dann gilt:

a) für alle $a_1, a_2, a_3 \in IN$ mit $m+1 < a_1 < a_2 < a_3$:

$$\sigma(k) = \sigma(k + (2^{(a_3-m-1)} - (2^{(a_2-m-1)} - (2^{(a_1-m-1)} - 1))) \cdot 2^{m+1}),$$

b) für $a \in IN$ mit $m+1 < a$: $\sigma(k) = \overline{\sigma(k + (2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1})}$.

Beweis:

a) Für alle $k,m \in IN_0$ mit $k \le 2^m - 1$ und für alle $a_1, a_{2,} a_3 \in IN$ mit

$m+1 < a_1 < a_2 < a_3$ existiert ein *n* mit

$k + (2^{(a_3 - m - 1)} - (2^{(a_2 - m - 1)} - (2^{(a_1 - m - 1)} - 1))) \cdot 2^{m+1}) \le 2^n - 1$.

Dann ist $\sigma\left(k + (2^{(a_3-m-1)} - (2^{(a_2-m-1)} - (2^{(a_1-m-1)} - 1))) \cdot 2^{m+1}\right)$

$= \tilde{\sigma}\left(w_n, k + (2^{(a_3-m-1)} - (2^{(a_2-m-1)} - (2^{(a_1-m-1)} - 1))) \cdot 2^{m+1}\right)$

$= \tilde{\sigma}(w_n, k)$ nach Satz 2.18 a)

$= \sigma(k)$ nach Definition 2.22.

b) Es existiert für alle $k,m \in IN_0$ mit $k \le 2^m - 1$ und für alle $a \in IN$ mit

$m+1 < a$ ein *n* mit $k + (2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1} \le 2^n - 1$.

Dann ist $\sigma\left(k + (2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1}\right) = \tilde{\sigma}\left(w_n, k + (2^{(a-m-1)} - 1) \cdot 2^{m+1}\right)$

$= \tilde{\sigma}(w_n, k) = \sigma(k)$ nach Satz 2.18 b) und Definition 2.22. □

Folgerung 2.25:

a) $\sigma(k) = \sigma\left(k + 10 \cdot 2^m\right)$ und

b) $\sigma(k) = \overline{\sigma(k + 2^{m+1})}$ erhält man dann für $a_1 = m+2$, $a_2 = m+3$ und

$a_3 = m+4$ beziehungsweise für $a = m+2$ aus Satz 2.24 a) und b)

c) Dieser Satz gilt insbesondere für die minimale Wahl von *m* zu einem Platz *k*, gefordert ist aber nur, dass $k \le 2^m - 1$. Das heißt, wenn man a_1, a_2, a_3 beziehungsweise a in Abhängigkeit von *m* definiert, ist die Voraussetzung in jedem Falle auch bei jedem *m*, das größer als dieses minimale ist, erfüllt. Daher gilt der Satz für jedes Symbol, das sich unter den ersten 2^m Zeichen befindet.

Folgende Beispiele veranschaulichen diese Gesetzmäßigkeiten:

Beispiel 2.26:

a)

```
NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
            1            2           3       3    4           5            6
0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123

SONO.NWNO.NWSW.NWNO.NWSW.SOSW.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
                                             1           1            1
       7            8           9            0           1            2
4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567
```

Für die ersten zwei Symbole auf den Plätzen 0 und 1 ist die Voraussetzung von Satz 2.24 wegen $1 \leq 2^1 - 1$ bereits für *m=1* erfüllt. Also müssen die gleichen Symbole nach Folgerung 2.25 a) in der gleichen Reihenfolge $10 \cdot 2^1 = 20$, $10 \cdot 2^2 = 40$ und $10 \cdot 2^3 = 80$ Plätze weiter wieder vorkommen (in der Abbildung **fett** gedruckt). Wählt man $a_1 = m + 2$, $a_1 = m + 4$ und $a_1 = m + 5$, so erhält man aus Satz 2.24 a), dass diese Symbole $(2^4 - (2^3 - (2^1 - 1))) \cdot 2^2 = 9 \cdot 2^2 = 36$ und $9 \cdot 2^3 = 72$ Plätze weiter wieder vorkommen (in der Abbildung eingerahmt).

b)

```
NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
            1            2           3            4           5            6
0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123

SONO.NWNO.NWSW.NWNO.NWSW.SOSW.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
                                             1           1            1
       7            8           9            0           1            2
4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567
```

Die zu den ersten 5 Symbolen auf den Plätzen 0 bis 4 gehörenden Inversen sind *S*, *O, N, O* und *N*. Da *m*=3 wegen $2^2 - 1 < 4 \leq 2^3 - 1$ der kleinste Wert für *m* ist, der die Voraussetzung von Satz 2.24 erfüllt, muss die Zeichenfolge *SONON* nach Folgerung 2.25 b) ab Platz $2^4 = 16$, ab Platz $2^5 = 32$ und ab Platz $2^6 = 64$ wieder vorkommen (in der Abbildung **fett** gedruckt). Wählt man hier $a = m + 3$, so erhält man aus Satz 2.24 b), dass diese Sequenz ab den Plätzen $(2^2 - 1) \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ und $3 \cdot 2^5 = 96$ wieder auftritt (in der Abbildung eingerahmt).

Das Reflexionsgesetz und die damit zusammenhängenden Translationsgesetze geben uns einen ersten Überblick über Regelmäßigkeiten in der Papierfaltungsfolge nach neuer Kodierung. Der Reflexionsoperator ist eine erste Möglichkeit, diese Stufe für Stufe zu erzeugen. Unser Wissen über seine Funktionsweise wollen wir nun dazu verwenden, einen Algorithmus zu entwickeln, der uns für jeden Platz *k* in *ω* angibt, welches der vier Symbole *N,* *W, S, O* an dieser Stelle steht. Wir gehen dabei analog zu dem Verfahren für die *LR*-Folge vor: Zunächst kehren wir den Vorgang des Reflexionsoperators um und spüren den Weg auf, den ein Symbol bei mehrmaligem Anwenden dieses Operators nimmt, um schließlich an dem betroffenen Platz zu landen. Bei diesem Rückwärts-Reflektieren kommen wir schließlich immer am Platz 0 an, von dem wir wissen, dass dort ein *N* steht. Schreiten wir mit diesem den gefundenen Weg zurück, finden wir schließlich das gesuchte Symbol.

Um diesen Weg im Rückwärtsgang zu verstehen, verfolgen wir ihn erst einmal beispielhaft für ein beliebiges, konkretes Symbol vorwärts, für das Symbol *S* an der Stelle 2. Da $2^1 - 1 < 2 < 2^2 - 1$, ist w_2 das kürzeste Wort, in dem es vorkommt. Durch einmaliges Anwenden des Reflexionsoperators entsteht daraus w_3, das von Platz 0 bis 7 reicht. In diesem steht dann $S' = O$ an Platz $5 = 7 - 2$. Die nächste Anwendung des Reflexionsoperators ergibt das 16-stellige Wort w_4. Daher steht dort *O'=N* an Stelle $10 = 16 - 1 - 5$. Eine Reflexion weiter findet sich entsprechend *W* an der Stelle $21 = 32 - 1 - 10$. Statt den Abstand des Symbols zum Anfang der Folge zu betrachten und vom Ende des jeweils nächst größeren Wortes w_{n+1} abzuziehen, können wir auch den Abstand zur nächsten Spiegelachse betrachten. Diese befindet sich direkt hinter dem Ende des kleinsten Wortes, dass das betreffende Symbol enthält, im Falle des W auf Platz 21 also direkt nach der Position 31. Zwischen diesem *W* und der 4. Achse befinden sich 10=32-1-21 Plätze. Daraus folgt, dass es an Platz 42=32+10 gespiegelt wird und dort folglich ein $S = W'$ stehen muss. Die folgende Abbildung veranschaulicht diesen Weg:

```
··S·|·O··|··N·.····|····.·W··.····.····|····.····.··S·.····.····.····.····.····
            1            2           3            4           5            6
0123|4567|8901.2345|6789.0123.4567.8901|2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123
    |    |         |                   |
    1.   2.        3.                  4.     ← Spiegelachse
```

Wir wollen letzteres Vorgehen formalisieren und dessen Richtigkeit absichern:

Satz 2.27: Für alle $n \in IN$ und alle $k \in IN_0$ mit $k \le 2^n - 1$ gilt:

$$\sigma(2^n - 1 - k)' = \sigma(2^n + k)$$

Beweis: Nach Satz 2.23 gilt direkt: $\sigma(2^n - 1 - k)' = \sigma(2^{n+1} - 1 - (2^n - 1 - k))$

$$= \sigma(2^n + k) \qquad \square$$

Bemerkung 2.28:

Um den Weg eines Symbols mit den Augen zu verfolgen, ist letzteres Verfahren übersichtlicher, deshalb ist es hier der Vollständigkeit halber erwähnt. Im Algorithmus spart erstere Art der Betrachtung aber eine Umformung und erhält daher den Vorzug.

Beim Rückwärts-Spiegeln müssen wir nun nur noch darauf achten, dass nach Definition 2.2 b) gilt: $Z' = X \Rightarrow Z = X'''$.

Wir erhalten dann folgenden

Algorithmus 2.29:

Welches Symbol steht an Platz *k*?	Beispiel: Welches Symbol steht an Platz *k=92* ?
1. Bestimme die kleinste Zweierpotenz 2^n echt größer als *k* : $2^n > k \geq 2^{n-1}$	1. $2^7 = 128 > 92 > 64 = 2^6$
2. Der Abstand von *k* zu dieser um 1 verringerten Zweierpotenz[10] ist gleich dem Abstand des rückwärts gespiegelten Platzes *l* zum Beginn des Wortes: Du erhältst so direkt den Platz *l*: $l = 2^n - 1 - k$	2. $l = 128 - 1 - 92 = 35$ $\quad m = 1$ 1. $2^6 = 64 > 35 > 32 = 2^5$ 2. $l = 64 - 1 - 35 = 28$ $\quad m = 2$ 1. $2^5 = 32 > 2 > 16 = 2^4$ 2. $l = 32 - 1 - 28 = 3$ $\quad m = 3$ 1. $2^2 = 4 > 3 > 2 = 2^1$ 2. $l = 4 - 1 - 3 = 0$ $\quad m = 4$
3. Setze $k := l$ und wiederhole die ersten beiden Schritte, bis die neue Platznummer $l = 0$ ist. Zähle dabei die Anzahl *m* der Rückwärts-Spiegelungen.	3. $l = 0 \Rightarrow$ Ende.
4. An Platz 0 steht ein *N*. Spiegele dieses genau *m* –mal vorwärts. Das so erhaltene Symbol ist das gesuchte.	4. Auf Platz 92 steht ein *N''''=N.*

Es bleibt noch zu klären, warum dieser Algorithmus erfolgreich abbricht, das heißt, warum für jeden beliebigen Ausgangsplatz nach endlich vielen Rückspiegelungen schließlich das *N* auf Platz 0 erreicht wird.[11] Im

[10] Nach Satz 2.23 c). Die Zweierpotenz muss deshalb um 1 verringert werden, da das Wort w_n die Plätze 0 bis 2^n-1 belegt.

[11] Zum Vergleich: Beim Algorithmus für die *LR*-Folge wird nicht unbedingt das erste Zeichen erreicht, aber in jedem Fall ein Zeichen auf einem Platz, dessen Nummer ein Zweierpotenz ist und das daher ein „L“ ist.

Gegensatz zu den *LR*-Folgen gehören die Achsen, an denen gespiegelt wird, bei der *NWSO*-Folge nicht selbst zur Folge, vielmehr liegen sie hier zwischen zwei Positionen der Folge. So fügt auch der Reflexionsoperator der neuen Kodierung kein zusätzliches Zeichen zwischen den kopierten und den reflektierten Teil ein, wie es bei der alten Kodierung mit dem *L* der Fall ist. Da aber die Achsen nicht zur Folge gehören, kann man beim Zurückspiegeln nicht auf eine solche treffen und daher ist ein weiteres Zurückspiegeln bis zum Platz 0 immer gewährleistet. Das erfolgreiche Beenden des Algorithmus wird formal gesichert durch folgenden

Satz 2.30: Für alle $n \in IN$, $k \in IN$, $l \in IN_0$

mit $2^n > k \geq 2^{n-1}$ und $l = 2^n - 1 - k$ gilt: $l < k$.

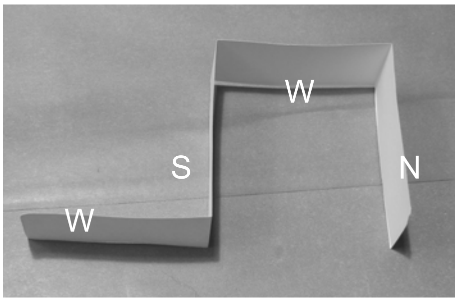
Beweis: Annahme: Sei $l \geq k$. Aus $l = 2^n - 1 - k$ folgt $l + k = 2^n - 1$.

Wegen $l \geq k$ gilt dann $2k = k + k \leq 2^n - 1$. Da $k \in IN$, gilt dann $2k < 2^n$ und damit $k < 2^{n-1}$. Nach Voraussetzung gilt aber $k \geq 2^{n-1}$ im Widerspruch zur Annahme, daraus folgt die Behauptung. □

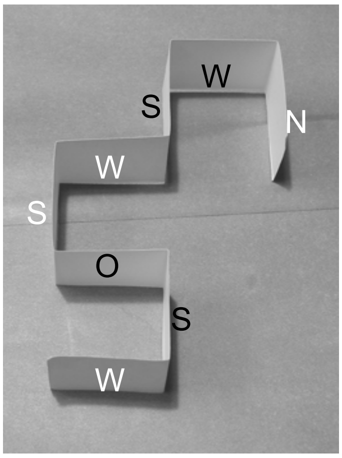
Da also die neue Platznummer *l* bei jedem Schritt echt kleiner ist, als die vorherige *k* und die Platznummern natürliche Zahlen sind, sind wir sicher, dass *l* nach einer endlichen Anzahl von Schritten 0 wird. Denn andererseits ist $l < 0$ unmöglich, da wir *n* gerade so wählen, dass $k < 2^n$ und somit $l = 2^n - 1 - k \geq 0$ gilt.

3. Inflationsgesetz

Wir wollen für unsere neue Kodierung ein Gesetz finden, das dem Inflationsgesetz der alten Kodierung entspricht. Passend dazu gehen wir so vor, dass wir beobachten, was passiert, wenn man einen gegebenen Papierstreifen ein weiteres Mal knickt.



Zunächst nehmen wir also einen Papierstreifen und knicken ihn zwei Mal. Die so entstehenden 4 Kanten markieren wir entsprechend mit *N*, *W*, *S* und wieder *W*:



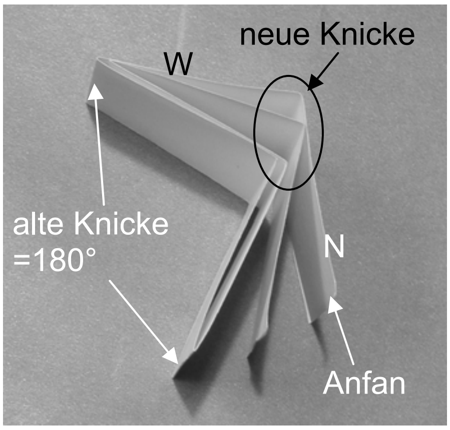
Diesen Streifen falten wir nun wieder zusammen, knicken ihn entsprechend unserer Vorschrift ein weiteres Mal, ziehen ihn dann wieder auseinander und stellen ihn wie verabredet auf. In den Abbildungen markieren wir dabei die alten Kanten mit weißen Symbolen, die neu hinzugekommenen mit schwarzen.

Wir stellen fest, dass aus jeder alten (weiß beschrifteten) Kante zwei geworden sind: die weiß beschriftete und eine neu hinzugekommene, schwarz beschriftete. Aus unseren Abbildungen halten wir fest:
Beim nochmaligen Falten wie in den Abbildungen wurde…

- aus der *N*-Kante eine *N*-Kante gefolgt von einer *W*-Kante,
- aus der *W*-Kante eine *S*-Kante, die von einer *W*-Kante gefolgt wird,
- aus der *S*-Kante eine *S*-Kante und eine *O*-Kante und
- aus der anderen *W*-Kante eine *S*-Kante und eine *W*-Kante.

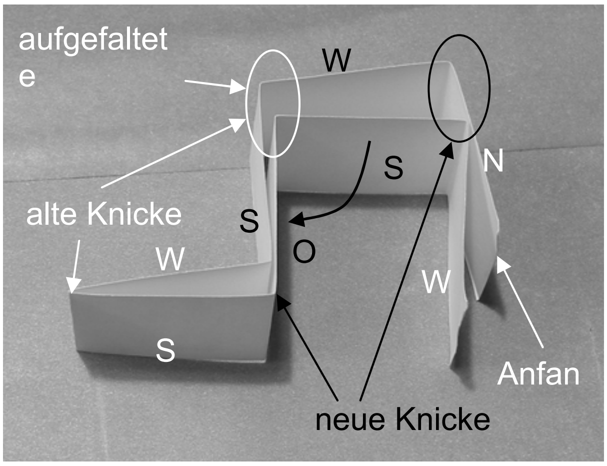
Auf der Suche nach einer Erklärung gehen wir wie bei der alten Kodierung vor: wir falten den Papierstreifen wieder bis zum Zustand zusammen, den er hatte, bevor wir ihn noch einmal geknickt haben. Aus dieser Perspektive ist sofort einsichtig, dass bei diesem erneuten Knicken aus je einer alten zwei neue Kanten geworden sind, da dieser Knick durch das ganze Streifenpaket geht.

Um zu verstehen, aus welcher alten welche neuen Kanten entstehen, denken wir uns den neu hinzugefügten Knick nun als 90° Winkel vor und stellen unser Streifenpaket so auf, dass die Kante mit der Anfangsmarke eine *N*-Kante und der Knick ein Linksknick ist. Für die alte *N*-Kante ist der Übergang zu den neuen *N*- und *W*-Kanten so unmittelbar klar. Nun scheint es so, als seien alle alten Kanten links geknickt und entsprechend, als würden aus allen *N*-Kanten *NW*-Kanten, aus den *W*-Kanten *WS*-Kanten, aus den *S*-Kanten *SO*-Kanten und aus den *O*-Kanten *ON*-Kanten. Dass dies nicht der Fall sein kann, zeigt schon unser Beispiel.



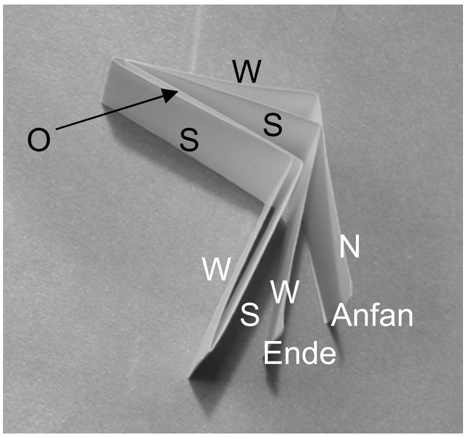
Wir müssen also wiederum die Knickfolge genauer analysieren: Nachdem wir den ersten Linksknick durchlaufen haben, kommen wir am Rand unseres Streifenpaketes an einen alten Knick, der eine 180°-Kehre bildet. Durch diesen dreht sich unsere Laufrichtung um und damit auch die Ausrichtung des nächsten Knicks, den wir nun als Rechtsknick durchlaufen. Danach kommen wir wiederum an eine 180°-Kehre, haben als wiederum einen Richtungswechsel und erhalten so als nächsten neuen Knick wiederum einen Linksknick. Um zu verstehen, was dies für die betroffenen Kanten bedeutet, falten wir zunächst besagten alten Knick so auf, dass er einen 90° Winkel mit der davorliegenden Kante bildet und verfolgen unseren Weg durch das Streifenpaket von der Anfangsmarke aus:

Zunächst laufen wir also die alte *N*-Kante entlang, stoßen auf besagten Linksknick und biegen dadurch in eine neue *W*-Kante ein. Sodann kommen wir zu dem alten Knick, das heißt der 180°-Kehre, die wir soeben aufgefaltet haben. Dahinter begann die alte *W*-Kante. Die erste Hälfte von dieser ist aber durch das Entstehen der neuen *W*-Kante zu einer *S*-Kante geworden, denn durch den neu hinzu gekommenen Linksknick hat sich die



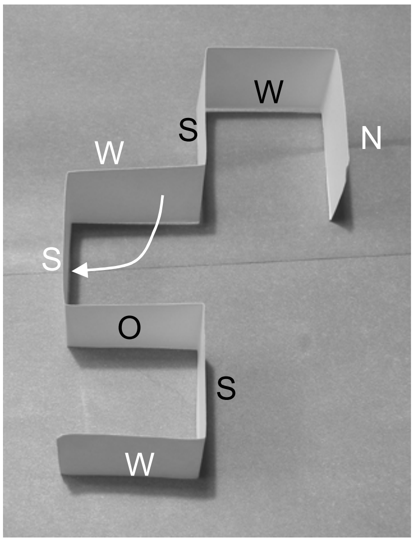
Ausrichtung aller nachfolgenden Kanten um 90° gegen den Uhrzeigersinn geändert und nicht nur diejenige der zweiten Hälfte der ersten Kante. Uns auf dieser *S*-Kante befindend, durchlaufen wir dann den neuen Knick als Rechtsknick und unsere *S*-Kante wird nun im 90° Winkel im Uhrzeigersinn zu einer *W*-Kante. Danach stoßen wir wieder auf eine 180°-Kehre und ändern die Laufrichtung. An diesem Punkt stellen wir fest, dass wir im Gegensatz zu unserer Überlegung an der ersten 180°-Kehre hier keine Richtungsänderung der alten Kante beachten müssen, denn wir haben einen Linksknick und einen Rechtsknick durchlaufen, also sind die nun nachfolgenden Kanten einmal um 90° gegen und einmal um 90° im Uhrzeigersinn gedreht worden, was sich insgesamt aufhebt. Wir stoßen nun also auf die alte *S*-Kante, die durch den Linksknick in eine *O*-Kante übergeht, dann wieder an die 180°-Kehre, an der nun die alte *W*-Kante in der ersten Hälfte zu einer *S*-Kante geworden ist, um dann nach dem Rechtsknick in der zweiten Hälfte eine *W*-Kante zu bleiben.

Unsere für den zunächst zwei- dann drei Mal gefalteten Papierstreifen angestellten Überlegungen können wir nun verallgemeinern: Durchlaufen wir ein Streifenpaket von der Anfangsmarke aus, so bewegen wir uns zunächst auf einer Kante, die dieselbe Richtung hat wie die alte Kante und wechseln dann auf eine Kante, die gegenüber der alten um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist. An der linken 180°-Kehre wechseln wir dann auf eine Kante, die gegenüber der alten Kante wiederum um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist. Auf dieser durchlaufen wir dann einen neuen Rechtsknick, daher muss die neue Kante wieder in die gleiche Richtung zeigen wie die alte.



Für die nächste Kante nach der unteren 180°-Kehre gilt dann wieder, dass sie gegenüber der alten Kante die Richtung nicht geändert hat, da die Kehre ein alter Knick ist. Mit ihr beginnt somit ein neuer Zyklus im Durchlaufen; der neue Knick wird jetzt wieder als Linksknick durchlaufen. Das bedeutet, dass sich das Beschriebene bei der Vorgang bei jedem Durchlaufen wiederholt, bis wir schließlich unten an das Ende des Papierstreifens stoßen. Insbesondere haben wir also festgestellt, dass jeweils die neuen Kanten, die durch die untere 180°-Kehre verbunden sind, die gleiche Richtung aufweisen wie die alten Kanten. Dahingegen zeigen die neue entstandenen Kanten (schwarz) in andere Richtungen als vorher.

Betrachten wir nun noch einmal den fertigen Papierstreifen, aufgefaltet und die Kante mit der Anfangsmarke als *N*-Kante und der zweiten Kante als *W*-Kante ausgerichtet:



Dadurch, dass zwischen zwei Kanten immer ein Winkel von 90° liegt, ist unabhängig von allen anderen Überlegungen klar, dass die nächste Kante nur eine *W* oder *O*-Kante sein kann und entsprechend die darauf folgende in *N* oder *S*-Richtung steht. Nummerieren wir unsere Kanten mit 0 beginnend durch, so gilt also, dass alle Kanten mit gerader Nummer in *NS*-Richtung liegen und alle Kanten mit ungerader Nummer in *WO*-Richtung.

Zusammen mit unseren obigen Überlegungen ergibt sich so insgesamt: Knicken wir ein gegebenes Streifenpaket noch einmal, so wird

- aus einer *N*-Kante eine *N*-Kante gefolgt von einer *W*-Kante,
- aus einer *S*-Kante eine *S*-Kante gefolgt von einer *O*-Kante,
- aus einer *W*-Kante eine *S*-Kante gefolgt von einer *W*-Kante und
- aus einer *O*-Kante eine *N*-Kante gefolgt von einer *O*-Kante.

Diesen Vorgang, bei dem eine alte Kante durch zwei neue Kante ersetzt wird, wollen wir in Analogie zu der alten Kodierung *Inflation* nennen. Wir haben ja festgestellt, dass jeweils eine der beiden Kanten, die eine alte Kante ersetzen, in die gleiche Richtung zeigt wie diese, insofern können wir oben beschriebene Ersetzung auch als Einfügen einer neuen Kante beschreiben und erhalten so eine Vorstellung des Inflationsprozesses, die derjenigen für die alte Kodierung eher ähnelt.

Wir wollen nun den Inflationsprozess formal modellieren, indem wir für eine gegebene Zeichenkette einen Operator definieren, der auf diese in der Art und Weise wirkt, die unseren Beobachtungen am Papierstreifen entspricht:

Definition 3.1:

Es sei *A*={*N, W, S, O*} ein Alphabet mit vier Symbolen.

Der Operator $J : A^* \to A^*$ heißt *Inflationsoperator* und erzeugt aus einem Wort $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_n \in A^*$, $n \in IN_0$ ein Wort aus A^* nach der Vorschrift

$$J(w) = \begin{cases} N & \text{, wenn } w = \text{Ø} \\ Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 ... Y_n & \text{, wenn } w \neq \text{Ø} \end{cases}$$

mit $$Y_k = \begin{cases} NW, & \text{wenn } Z_k = N \\ SO, & \text{wenn } Z_k = S \\ SW, & \text{wenn } Z_k = W \\ NO, & \text{wenn } Z_k = O \end{cases}$$ für alle $k \in IN_0$, $k \le n$.

Bemerkung 3.2:

a) Es gilt also: $|Y_n| = 2$ für alle $n \in IN_0$ und sogar $Y_n \in \{N, S\} \times \{W, O\}$.

b) Mit der Bezeichnung aus Definition 2.1 a) gilt also:

$$Y_k = \begin{cases} Z_k Z_k', & \text{wenn } Z_k = N \vee Z_k = S \\ Z_k' Z_k, & \text{wenn } Z_k = W \vee Z_k = O \end{cases}$$

c) Der Operator *J ersetzt* also jedes Symbol des Wortes *w* durch zwei Symbole aus *A*. Dabei ist eins der beiden neuen Symbole immer dasjenige, welches ersetzt wird. Man kann den Operator also auch so verstehen, dass er jeweils vor oder nach dem alten Symbol ein neues Symbol *einfügt* und zwar in Abhängigkeit von dem alten: bei *N* und *S* *dahinter* und bei *W* und *O davor*. Wir haben den Operator als genau unseren Beobachtungen an unseren Papierstreifen entsprechend definiert.

Wir unterstreichen aber diesen wesentlichen Unterschied zwischen dem Inflationsoperator für die *LR*-Folgen und demjenigen für die *NWSO*-Folgen: Ersterer fügt neue Symbole *unabhängig* von den alten Symbolen ein, letzterer in *Abhängigkeit* davon.

Folgerung 3.3:

a) Aus $|Y_n| = 2$ folgt direkt, dass gilt: $|J(w)| = 2 \cdot |w|$.

b) Es gilt für $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_n \in A^*$: $J(w) = J(Z_0)J(Z_1)J(Z_2)J(Z_3)...J(Z_n)$, das heißt, J agiert in der Reihenfolge der Symbole. Diese Eigenschaft von J nennen wir *Distributivgesetz.*

c) Aus der Definition der Y_k folgt direkt, dass J injektiv ist.

Mit Hilfe des Inflationsoperators wollen wir nun wieder eine Folge von Wörtern bilden:

Definition 3.4:

$(v_n)_{n \in IN}$ ist eine Folge von Wörtern aus $\{N, W, S, O\}^*$, die folgendermaßen rekursiv definiert ist: $\quad v_0 = N$, $\quad v_{n+1} = J(v_n)$.

Bemerkung 3.5:

Aus den Definitionen 3.1 und 3.4 können wir direkt folgern, dass für die Anzahlen der einzelnen Symbole im Wort v_n genau das gilt, was wir im Zusammenhang mit dem Reflexionsoperator in Folgerung 2.7 festgestellt hatten:

$Anz_N(v_{n+1}) = Anz_N(J(v_n)) = Anz_N(v_n) + Anz_O(v_n)$, da nach Definition 3.1 ausschließlich N und O durch solche Y_n ersetzt werden, in denen ein N vorkommt und diese Y_n in beiden Fällen genau ein N enthalten. Für Anz_W, Anz_S und Anz_O gilt dies analog.

Wie für die *LR*-Folgen erscheint es auch in unserer neuen Kodierung geradezu verwunderlich, dass Reflexions- und Inflationsoperator die gleiche Folge von Wörtern erzeugen. Dass dies aber auch hier gilt, besagt

Theorem 3.6: Für alle $n \in IN_0$ gilt: $v_n = w_n$.

Für den Beweis dieses Theorems brauchen wir noch folgenden Satz:

Satz 3.7: Sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen, $w \in A^*$ bestehe aus *n*+1 Symbolen, $n \in IN_0$, $w = Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_n$ mit $Z_k \in A$, $k \in IN_0$, $k \le n$.

Dann gilt:

a) $J(Z_k') = (J(Z_k))'$

b) $J(w') = (J(w))'$

Beweis:

a) **(**Durch Fallunterscheidung; es gibt nur 4 Fälle)

i) $Z_k = N$: Dann folgt $Z_k' = W$ nach Definition 2.1 a) und damit

$J(Z_k') = J(W) = SW$ nach Definition 3.1,

$= W'N' = (NW)'$ nach Definition 2.1 b),

$= (J(N))'$ nach Definition 3.1,

$= (J(Z_k))'$ wie behauptet.

Analog folgt:

ii) $Z_k = W$: $Z_k' = S \Rightarrow$ $J(Z_k') = J(S) = SO = W'S' = (SW)' = (J(W))'$,

iii) $Z_k = S$: $Z_k' = O \Rightarrow$ $J(Z_k') = J(O) = NO = O'S' = (SO)' = (J(S))'$

und

iv) $Z_k = O$: $Z_k' = N \Rightarrow$ $J(Z_k') = J(N) = NW = O'N' = (NO)' = (J(O))'$

und damit insgesamt die Behauptung.

b) $J(w') = J(Z_n' Z_{n-1}' ... Z_1' Z_0')$ nach Voraussetzung,

$= J(Z_n') J(Z_{n-1}') .... J(Z_1') J(Z_0')$ nach Folgerung 3.3 b),

$= (J(Z_n))'(J(Z_{n-1}))' .... (J(Z_1))'(J(Z_0))'$ nach Teil a),

$= Y_n' Y_{n-1}' ... Y_1' Y_0'$ nach Definition 3.1,

$= (Y_0 Y_1 Y_2 ... Y_{n-1} Y_n)'$ nach Definition 2.1 b)

$= (J(Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_{n-1} Z_n))'$ nach Definition 3.1,

$= (J(w))'$ nach Voraussetzung,

damit gilt die Behauptung. □

Bemerkung 3.8:
Die Aussage von Satz 3.7 ist, dass der Inflationsoperator und der Ersetzungsoperator *kommutativ* sind, wir bezeichnen ihn daher als *Kommutativgesetz.*

Beweis des Theorems 3.6: (vollständige Induktion über n)
Induktionsanfang: Wegen $v_0 = N = w_0$ gilt die Behauptung für $n = 0$ und

wegen $v_1 = NW = w_1$ gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n \in IN$ und für $n-1$.

Induktionsschritt: $n-1,\ n \to n+1$: Behauptung: $v_{n+1} = w_{n+1}$.

Es sei $w_n = Z_0 Z_2 Z_3 ... Z_{2^n-1}$.Dann gilt:

$v_{n+1} = J(v_n) = J(w_n)$, nach Induktionsvoraussetzung,

$= J(w_{n-1} w_{n-1}')$ nach Definition 2.4,

$= J(w_{n.-1}) J(w_{n-1}')$ nach dem Distributivgesetz für *J* (Folgerung 3.3),

$= w_n J(w_{n-1}')$ nach Induktionsvoraussetzung und Definition 3.4.

Das heißt: v_{n+1} und w_{n+1} stimmen in der ersten Hälfte überein. Um die Übereinstimmung auch der zweiten Hälften der Wörter zu sichern, bleibt nun also zu zeigen: $w_n' = J(w_{n-1}')$ Dies gilt aber wegen

$w_n' = (J(w_{n-1}))' = J(w_{n-1}')$ nach Kommutativgesetz Satz 3.7 b)

Insgesamt haben wir also: $v_{n+1} = w_n J(w_{n-1}') = w_n w_n' = w_{n+1}$ und damit die Behauptung. □

Wir wollen nun weiter damit fortfahren, Regelmäßigkeiten in unseren Wörtern aufzuspüren. Zunächst wollen wir einen vergleichenden Blick auf die Wörter *v₅* und *v₆* werfen:

```
N W  S W  S O  S W  S O  N O  S O  S W  S O  N O  N W  N O  S O  N O  S O  S W
NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
```

Die vom Inflationsoperator hinzugefügten Symbole unterliegen offensichtlich nicht einer so einfach zu erkennenden Gesetzmäßigkeit wie bei der alten Kodierung. Wir haben bereits bei der Herleitung und der Vorstellung des Inflationsoperators bemerkt, dass in Abhängigkeit von jedem einzelnen

Symbol jeweils davor oder dahinter eingefügt wird.[12] Wie im obigen Beispiel haben einerseits *N* und *S* zur Folge, dass dahinter *W* oder *O* eingefügt wird und andererseits *W* und *O*, dass *N* oder *S* eingefügt wird. Wir können daher folgenden Satz formulieren und beweisen:

Satz 3.9: Für alle Wörter w_n, $n \in IN$ und alle $k \in IN_0$, $k \leq 2^n - 1$ gilt:

a) $\tilde{\sigma}(w_n, k) = N$ oder $\tilde{\sigma}(w_n, k) = S$, falls *k* gerade und

b) $\tilde{\sigma}(w_n, k) = W$ oder $\tilde{\sigma}(w_n, k) = O$, falls *k* ungerade.

Beweis: (vollständige Induktion über n):

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$:

Da $w_1 = NW$ gilt mit $\tilde{\sigma}(w_1, 0) = N$ und $\tilde{\sigma}(w_1, 1) = W$ die Behauptung.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$.

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$:

a) *k* sei gerade. Dann ist $\tilde{\sigma}(w_n, k)$ nach Induktionsvoraussetzung ein *N* oder *S*.

Dann lautet entsprechend $J(\tilde{\sigma}(w_n, k)) = NW$ oder $J(\tilde{\sigma}(w_n, k)) = SO$.

Da nach Funktionsweise des Operators *J* in $w_{n+}1$ pro Symbol von w_n zwei Symbole stehen, wobei die Reihenfolge nicht verändert wird, steht $J(\tilde{\sigma}(w_n, k))$ in w_{n+1} ab Position *2k*. Entsprechend haben wir :

$\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+0) = N$ oder $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+0) = S$ und

$\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+1) = W$ oder $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+1) = O$ wie behauptet.

b) *k* sei ungerade. Dann ist $\tilde{\sigma}(w_n, k)$ nach Induktionsvoraussetzung ein *W* oder *O*. Dann lautet entsprechend $J(\tilde{\sigma}(w_n, k)) = SW$ oder $J(\tilde{\sigma}(w_n, k)) = NO$.

Damit erhalten wir analog zu Teil a) :

$\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+0) = S$ oder $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+0) = N$ und

$\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+1) = W$ oder $\tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+1) = O$ wie behauptet. □

Die Aussage dieses Satzes zusammen mit dem Wissen aus Bemerkung 3.2 c), dass *J* hinter *N* und *S*, jedoch vor *W* und *O* einfügt, führt direkt zu folgender Erkenntnis:

[12] vgl. Bemerkung 3.2 c)

Folgerung 3.10: Die Symbole des Wortes w_n stehen im Wort $w_{n+1} = J(w_n)$ an folgenden Positionen $k \in IN_0$, $k \leq 2^n - 1$:

$$\tilde{\sigma}(w_{n,}k) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k), & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \tilde{\sigma}(w_{n+1}, 2k+1), & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis:

Sei *k* gerade. Dann steht nach Satz 3.9 auf Position *k* in w_n ein *N* oder *S*, das heißt, in w_{n+1} steht ab Stelle *2k* nach Definition 3.1 die Symbolfolge *NW* oder *SO* und damit das *N* beziehungsweise *S* an Stelle *2k*.
Sei *k* ungerade. Dann steht nach Satz 3.9 auf Position *k* in w_n ein *W* oder *O*, das heißt, in w_{n+1} steht ab Stelle *2k* nach Definition 3.1 die Symbolfolge *SW* oder *NO* und damit das *W* beziehungsweise *O* an Stelle *2k+1*. Insgesamt gilt also die Behauptung □

Beispiel 3.11: Anhand der Wörter w_5 und w_6 wollen wir die Wirkung von *J* auf die Positionsnummern veranschaulichen:

```
                         1                        2                        3
0  1 2  3 4  5 6  7 8  9 0  1 2  3 4  5 6  7 8  9 0  1 2  3 4  5 6  7 8  9 0  1
N--W.S--W.S--O.S--W.S--O.N--O.S--O.S--W.S--O.N--O.N--W.N--O.S--O.N--O.S--O.S--W

NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW.NWNO.SONO.NWNO.SONO.SOSW
            1            2           3            4           5            6
0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123.4567.8901.2345.6789.0123
```

In der oberen Hälfte der Abbildung steht w_5 mit den dazugehörigen Positionsnummern, in der unteren Hälfte entsprechend w_6. Man erkennt, dass der Inflationsoperator bei der Entstehung des Wortes w_6 je Viererblock, der bei einer Position *4k*, $k \in IN_0$ beginnt, die mittleren beiden Symbole einfügt.

Dies gilt allgemein: Da in w_n nach Satz 3.9 abwechselnd *N* oder *S* und *W* oder O auftreten, bietet es sich an, w_n in Zweierblocks, also modulo 2 zu betrachten. Durch Anwendung des Inflationsoperators verdoppelt sich die Anzahl der Symbole, daher ist die Betrachtung von w_{n+1} modulo 4 sinnvoll. Die Aussagen von Satz 3.9 und Folgerung 3.10 ergeben dann folgenden

Satz 3.12: a) Die Symbole aus w_n stehen in w_{n+1} an den Stellen $k \equiv 0 \bmod 4$ und $k \equiv 3 \bmod 4$.

b) An den Positionen $k \equiv 1 \bmod 4$ und $k \equiv 2 \bmod 4$ stehen neu eingefügte Symbole.

Bemerung 3.13:

Nach Satz 3.9 wissen wir sogar genauer, dass an den Stellen $k \equiv 0 \bmod 4$ ein *N* oder *S* steht und an den Stellen $k \equiv 3 \bmod 4$ ein *W* oder *O*. Mit diesem Wissen können wir in Analogie zum Beweis von Folgerung 3.10 nach Definition 3.1 darauf schließen, welches Symbol auf den Positionen $k \equiv 1 \bmod 4$ und $k \equiv 2 \bmod 4$ steht und haben damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.14: Steht…

a) an der Stelle $k \equiv 0 \bmod 2$ in w_n ein *N*, so steht an der Stelle $2k \equiv 0 \bmod 4$ in w_{n+1} auch ein *N* und an der Stelle $2k+1 \equiv 1 \bmod 4$ ein *W*,

b) an der Stelle $k \equiv 0 \bmod 2$ in w_n ein *S*, so steht an der Stelle $2k \equiv 0 \bmod 4$ in w_{n+1} auch ein *S* und an der Stelle $2k+1 \equiv 1 \bmod 4$ ein *O*,

c) an der Stelle $k \equiv 1 \bmod 2$ in w_n ein *W*, so steht an der Stelle $2k+1 \equiv 3 \bmod 4$ in w_{n+1} auch ein *W* und an der Stelle $2k \equiv 2 \bmod 4$ ein *S*,

d) an der Stelle $k \equiv 1 \bmod 2$ in w_n ein *O*, so steht an der Stelle $2k+1 \equiv 3 \bmod 4$ in w_{n+1} auch ein *O* und an der Stelle $2k \equiv 2 \bmod 4$ ein *N*.

Bemerkung 3.15:

In Bemerkung 3.2 b) hatten wir schon festgestellt, dass das vom Inflationsoperator *J* neben Z_k eingefügte Symbol gerade Z_k' ist, wie wir es für das Reflexionsgesetz definiert hatten.

Nach unseren ausführlichen Vorüberlegungen zu der Wirkungsweise des Inflationsoperators können wir nun einen Algorithmus aufstellen, der zu einer gegebenen Position ermittelt, welches Symbol dort zu finden ist, wie wir es bereits für das Reflexionsgesetz getan haben. In unseren bisherigen Überlegungen sind wir vom Wort w_n ausgegangen und haben dann den Übergang zum Wort w_{n+1} untersucht. Diese Vorgehensweise wollen wir mit dem Ziel, einen solchen Algorithmus zu gewinnen, zunächst umkehren. Wir gehen also von einer gegebenen Position aus und verfolgen zurück, wie das Symbol durch die einzelnen Inflationsschritte auf diese Position gekommen ist. So werden wir schließlich an die Position *0* kommen, von der wir wissen, dass dort ein *N* steht. Diese Position, beziehungsweise das Wort w_0, das nur aus dieser Position besteht, ist ja nach Definition 3.4 der Ursprung aller nachfolgenden. Von diesem *N* aus können wir dann wieder in Vorwärtsrichtung auf das gesuchte Symbol schließen. Unseren bisherigen Überlegungen entsprechend betrachten wir das Wort w_n in Abschnitten Modulo 4. Dann gilt der

Satz 3.16:

Sei $n \in IN$ und $k \in IN_0$ mit $k \leq 2^n - 1$ sei eine Position im Wort w_n.

Sei $\tilde{\sigma}(w_n, k)$ das Symbol an der Position *k* im Wort w_n. Dann gilt:

a) $\tilde{\sigma}(w_{n-1}, \frac{k}{2}) = \tilde{\sigma}(w_n, k)$, $\quad$ für $k \equiv 0 \bmod 4$ nach Satz 3.14 a) und b),

b) $\tilde{\sigma}(w_{n-1}, \frac{k-1}{2}) = (\tilde{\sigma}(w_n, k))'''$, $\quad$ für $k \equiv 1 \bmod 4$ nach Satz 3.14 a) und b),

c) $\tilde{\sigma}(w_{n-1}, \frac{k}{2}) = (\tilde{\sigma}(w_n, k))'''$, $\quad$ für $k \equiv 2 \bmod 4$ nach Satz 3.14 c) und d),

d) $\tilde{\sigma}(w_{n-1}, \frac{k-1}{2}) = \tilde{\sigma}(w_n, k)$, $\quad$ für $k \equiv 3 \bmod 4$ nach Satz 3.14 c) und d)

mit $\tilde{\sigma}(w_n, k)'''$ nach Definition 2.1 a).

Es findet also eine Ersetzung der Symbole in der Reihenfolge $N \to O \to S \to W \to N$ statt, da $(\tilde{\sigma}(w_n, k)''')''' = \tilde{\sigma}(w_n, k)''$, $((\tilde{\sigma}(w_n, k)''')''')''' = \tilde{\sigma}(w_n, k)'$ und $(((\tilde{\sigma}(w_n, k)''')''')''')''' = \tilde{\sigma}(w_n, k)$ nach Folgerung 2.2 b). Das bedeutet, wenn wir am Ende unserer Rückverfolgung bei dem *N* an Position *0* angekommen sind, müssen wir in umgekehrter, also in der Reihenfolge $N \to W \to S \to O \to N$ ersetzen, um auf unser gesuchtes Symbol zu schließen.

Nur in den Fällen b) und c), das heißt: für $k \equiv 1 \bmod 4$ und für $k \equiv 2 \bmod 4$ wird aber überhaupt ersetzt; für andere Werte wird das Symbol beibehalten.

Insgesamt gilt beim Übergang von Position *k* im Wort w_n zur entsprechenden Position im Wort w_{n-1} für die einzelnen Fälle:

Wechsel	zu gerader Positionsnummer	zu ungerader Positionsnummer
Von gerader Positionsnummer	**Fall a):** $k \equiv 0 \bmod 4$ $\Rightarrow \frac{k}{2} \equiv 0 \bmod 2$	**Fall c):** $k \equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow \frac{k}{2} \equiv 1 \bmod 2$
Von ungerader Positionsnummer	**Fall b):** $k \equiv 1 \bmod 4$ $\Rightarrow \frac{k-1}{2} \equiv 0 \bmod 2$	**Fall d):** $k \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow \frac{k-1}{2} \equiv 1 \bmod 2$

Somit gilt zusammenfassend: Genau dann, wenn ein Wechsel von gerader auf ungerade Positionsnummer oder umgekehrt stattfindet, findet auch ein Symbolwechsel statt. Somit erhalten wir nun insgesamt folgenden Algorithmus:

Algorithmus 3.17:

<u>Welches Symbol steht an Platz *k* ?</u>	<u>Beispiel: Welches Symbol steht an Platz *k*=92 ?</u>
1. Bestimme die Position einen Inflationsschritt zurück: a) Nur wenn k ungerade, subtrahiere 1. b) Teile durch 2.	1. a) k ist gerade. b) $k := 92 \div 2 = 46$ 2. kein Wechsel *m=0* 1. a) k ist gerade. b) $k := 46 \div 2 = 23$ 2. Wechsel von gerade auf ungerade:*m=1*
2. Zähle die Symbolwechsel m: Nur, wenn k in Punkt 1. von gerade auf ungerade oder umgekehrt gewechselt ist, erhöhe m um 1.	1. a) k ist ungerade. $k := 23 - 1 = 22$ b) $k := 22 \div 2 = 11$ 2. kein Wechsel 1. a) k ist ungerade. $k := 11 - 1 = 10$ b) $k := 10 \div 2 = 5$ 2. kein Wechsel 1. a) k ist ungerade. $k := 5 - 1 = 4$ b) $k := 4 \div 2 = 2$ 2. Wechsel von ungerade auf gerade:*m=2*
3. Wiederhole die ersten beiden Schritte, bis *k=0* ist.	1. a) k ist gerade. b) $k := 2 \div 2 = 1$ 2. Wechsel von gerade auf ungerade:*m=3* 1. a) k ist ungerade: $k := 1 - 1 = 0$ b) $k := 0 \div 2 = 0$ 2. Wechsel von ungerade auf gerade:*m=4* 3. *k=0*
4. An Platz *0* steht ein *N*. Ersetze dies *m*-mal in der Reihenfolge $N \to W \to S \to O \to N$. Das so erhaltene Symbol ist das gesuchte.	4. Auf Platz 92 steht ein $N=N''''$ (4 Symbolwechsel)

Bemerkung 3.18:

Der Algorithmus erreicht sicher nach endlich vielen
Schritten das *N* auf Platz *0*, da sich *k* zunächst mit jedem Durchgang mindestens halbiert und, wenn dadurch schließlich *k=1* erreicht ist, in Schritt 1.a) 1 subtrahiert wird.

Aus unserer Untersuchung des Reflexionsprozesses ist uns nach Satz 2.12 a) bekannt, dass die ersten $2^n - 1$ Symbole im Wort w_{n+1} gerade das Wort w_n darstellen. Wegen der Äquivalenz der aus Reflexion und aus Inflation erhaltenen Wörter nach Theorem 3.6 können wir daher Satz 3.16 auch so formulieren:

Satz 3.19: Für alle Wörter w_n gilt:

a) $\tilde{\sigma}(w_n,0) = N$

b) $$\tilde{\sigma}(w_n,k) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(w_n,\frac{k}{2}) & , \quad \text{falls } k \equiv 0 \bmod 4, \\ (\tilde{\sigma}(w_n,\frac{k-1}{2}))', & \quad \text{falls } k \equiv 1 \bmod 4, \\ (\tilde{\sigma}(w_n,\frac{k}{2}))' & , \quad \text{falls } k \equiv 2 \bmod 4, \\ \tilde{\sigma}(w_n,\frac{k-1}{2}) & , \quad \text{falls } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Diese für endliche Wörter gefundenen Eigenschaften übertragen wir direkt auf die Papierfaltungsfolge *ω*:

Satz 3.20: a) $\sigma(0) = N$

b) Für $k \in IN$ gilt: $$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma(\frac{k}{2}) & , \quad \text{falls } k \equiv 0 \bmod 4 \quad \text{(i)}, \\ (\sigma(\frac{k-1}{2}))', & \quad \text{falls } k \equiv 1 \bmod 4 \quad \text{(ii)}, \\ (\sigma(\frac{k}{2}))' & , \quad \text{falls } k \equiv 2 \bmod 4 \quad \text{(iii)}, \\ \sigma(\frac{k-1}{2}) & , \quad \text{falls } k \equiv 3 \bmod 4 \quad \text{(iv)}. \end{cases}$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 3.19 und der Definition 2.21 der Papierfaltungsfolge ω. □

Bemerkung 3.21:

ω ist damit eindeutig definiert, da für alle $k \in IN_0$ in Satz 3.20 immer einer der vier Fälle aus b) oder der Fall a) gilt und nach Bemerkung 3.18.

Beispiele 3.22:

a) Die ersten Symbole der Papierfolge bestimmen sich dann wie folgt:

$\sigma(0) = N$ nach Satz 3.20 a)

$\sigma(1) = (\sigma(0))' = N' = W$ nach Satz 3.20 b) ii) und a)

$\sigma(2) = (\sigma(1))' = (\sigma(0))'' = N'' = S$ nach Satz 3.20 b) iii), ii) und a)

$\sigma(3) = \sigma(1) = (\sigma(0))' = N' = W$ nach Satz 3.20 b) iv), ii) und a)

$\sigma(4) = \sigma(2) = (\sigma(1))' = (\sigma(0))'' = N'' = S$ nach Satz 3.20 b) i), iii), ii) und a)

$\sigma(5) = (\sigma(2))' = (\sigma(1))'' = (\sigma(0))''' = N''' = O$ nach Satz 3.20 b) ii), iii), ii) und a)

$\sigma(6) = (\sigma(3))' = (\sigma(1))' = (\sigma(0))'' = N'' = S$ nach Satz 3.20 b) iii), iv), ii) und a)

$\sigma(7) = \sigma(3) = \sigma(1) = (\sigma(0))' = N' = W$ nach Satz 3.20 b) iv), iv), ii) und a)

b) Das Symbol an Stelle 92. (vgl. Beispiel zum Algorithmus) erhält man so:

$\sigma(92) = \sigma(46) = (\sigma(23))' = (\sigma(11))' = (\sigma(5))' = (\sigma(2))'' = (\sigma(1))''' = (\sigma(0))'''' = N'''' = N$
nach Satz 3.20 b) i), iii), iv), iv), ii), iii), ii) und a)

c) Besonders viele Symbolwechsel unternimmt beispielsweise das Symbol

$\sigma(85) = (\sigma(42))' = (\sigma(21))'' = (\sigma(10))''' = (\sigma(5))'''' = \sigma(5) = (\sigma(2))' = (\sigma(1))'' = (\sigma(0))''' = N''' = O$
nach Satz 3.20 b) ii), iii), ii), iii), ii), ii), iii) und a) und Folgerung 2.2 b)

Wie für die *LR*-Folgen wollen wir nun auch hier den Inflationsoperator *J* auf unendlich lange Wörter erweitern mit dem Ziel, ihn auf die Papierfaltungsfolge ω anzuwenden und festzustellen, dass ω bezüglich *J* ein Fixpunkt ist. Zunächst definieren wir also:

Definition 3.23:

Es sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen und $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ ein unendlich langes Wort aus A^*. Dann erzeugt *J* aus *w* ein unendlich langes Wort nach der Vorschrift: $J(w) = T_0 T_1 T_2 T_3 \ldots$ mit

$$T_k = \begin{cases} Z_{\frac{k}{2}} & \text{für } k \equiv 0 \bmod 4, \\ (Z_{\frac{k-1}{2}})' & \text{für } k \equiv 1 \bmod 4, \\ (Z_{\frac{k}{2}})' & \text{für } k \equiv 2 \bmod 4, \\ Z_{\frac{k-1}{2}} & \text{für } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Das Wort, das man so erhält, hat also die Form[13]:

$J(w) = Z_0 Z_0' Z_1' Z_1 . Z_2 Z_2' Z_3' Z_3 . Z_4 Z_4' Z_5' Z_5 ...$
0 1 2 3.4 5 6 7.8 9 10 11….

Wenden wir nun unseren Inflationsoperator *J* auf die Papierfaltungsfolge *ω* an, so stellen wir fest, dass das erhaltene Wort *J(ω)* der Folge *ω* in den ersten Symbolen gleicht:

ω **=**	**NWSW.SOSW.SONO.SOSW.SONO.NWNO.SONO.SOSW.SONO.NWNO.NWSW…**
J(ω)**=**	**N**WS**W**.**S**OS**W**.**S**ON**O**.**S**OS**W**.**S**ON**O**.**N**WN**O**.**S**ON**O**.**S**OS**W**.**S**ON**O**.**N**WN**O**.**N**WS**W**…

Anscheinend gilt also auch in der neuen Kodierung $J(\omega) = \omega$, damit ist also

a) *ω* bezüglich *J* ein Fixpunkt und

b) wenn ein Wort bezüglich *J* ein Fixpunkt ist, dann ist dies zwangsläufig *ω*.

Dies ist die Aussage von

Satz 3.24:

Sei $w \in \{N, W, S, O\}^*$. Dann gilt $w = \omega \Leftrightarrow J(w) = w$.

[13] In der unteren Zeile stehen die Positionsnummern. Die Punkte dienen nur der besseren Lesbarkeit der Viererblöcke.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Wir müssen zeigen, dass für jede Positionsnummer $k \in IN_0$ gilt:

$\sigma(k) = \tilde{\sigma}(\omega, k) = \tilde{\sigma}(J(\omega), k).$

Die Aussage ist klar für $k = 0$. Sei also $k > 0$:

Die Anwendung des Inflationsoperators *J* auf *ω* bewirkt, dass, in Abhängigkeit von *k*, Symbole in *J(ω)* mit bestimmten Positionen in *ω* übereinstimmen. Genauer gesagt gilt:

$$\tilde{\sigma}(J(\omega), k) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(\omega, \frac{k}{2}) = \sigma(\frac{k}{2}), & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 4, \\ (\tilde{\sigma}(\omega, \frac{k-1}{2}))' = (\sigma(\frac{k-1}{2}))', & \text{falls } k \equiv 1 \bmod 4, \\ (\tilde{\sigma}(\omega, \frac{k}{2}))' = (\sigma(\frac{k}{2}))', & \text{falls } k \equiv 2 \bmod 4, \\ \tilde{\sigma}(\omega, \frac{k-1}{2}) = \sigma(\frac{k-1}{2}), & \text{falls } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Außerdem gilt nach Satz 3.20 b):

$$\tilde{\sigma}(\omega, k) = \sigma(k) = \begin{cases} \sigma(\frac{k}{2}), & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 4, \\ (\sigma(\frac{k-1}{2}))', & \text{falls } k \equiv 1 \bmod 4, \\ (\sigma(\frac{k}{2}))', & \text{falls } k \equiv 2 \bmod 4, \\ \sigma(\frac{k-1}{2}), & \text{falls } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Insgesamt gilt somit $\sigma(k) = \tilde{\sigma}(\omega, k) = \tilde{\sigma}(J(\omega), k)$ für alle $k \in IN$, was zu zeigen war.

"$\Leftarrow$":

Wir müssen zeigen, dass jedes Wort *w* mit *w=J(w)* in allen Positionen $k \in IN_0$ die gleichen Symbole aufweist wie *ω*. Dazu zeigen wir, dass *w* die Eigenschaften von Satz 3.20 erfüllt, der ja *ω* eindeutig definiert.

Für *k=0* ist die Aussage wieder trivial. Sei also *k>0*:

Wegen $J(w) = w$ gilt nach Satz 3.19:

$$\tilde{\sigma}(w,k)=\tilde{\sigma}(J(w),k)=\begin{cases}\tilde{\sigma}(w,\frac{k}{2}) \quad, & \text{falls}\, k\equiv 0 \bmod 4,\\ (\tilde{\sigma}(w,\frac{k-1}{2}))', & \text{falls}\, k\equiv 1 \bmod 4,\\ (\tilde{\sigma}(w,\frac{k}{2}))' \quad, & \text{falls}\, k\equiv 2 \bmod 4,\\ \tilde{\sigma}(w,\frac{k-1}{2}) \quad, & \text{falls}\, k\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

Daher haben wir nach Satz 3.20 $\sigma(k)=\tilde{\sigma}(w,k)$ für alle $k\in IN$, was zu zeigen war. Insgesamt folgt aus "$\Rightarrow$" und "$\Leftarrow$" die Behauptung. □

Wir wollen nun auch für die neue Kodierung die Verbindung mit dem Banachschen Fixpunktprinzip herstellen.[14] In Analogie zu der Vorgehensweise für die Kodierung mit *L* und *R* untersuchen wir die unendlichen Wörter über einem beliebigen Alphabet *A*, das zumindest die Buchstaben *N, W, S* und *O* enthält. Als Metrik verwenden wir die von Albers definierte[15], folglich hat unser A^* wieder „genau die notwendigen Eigenschaften, die vom Banachschen Fixpunktprinzip gefordert werden."[16] Um zeigen zu können, dass auch der Inflationsoperator *J* nach neuer Kodierung kontrahierend ist, schränken wir unsere Betrachtung auf unendliche Wörter ein, die mit dem Symbol *N* beginnen. Außerdem benötigen wir folgende Erweiterung von Definition 3.1, um sein Funktionieren für alle Alphabete *A* der oben beschriebenen Form zu gewährleisten:

Erweiterung 3.25 von Definition 3.1:

$Y_n = Z_n Z_n$, falls $Z_n \neq N \wedge Z_n \neq W \wedge Z_n \neq S \wedge Z_n \neq O$, das heißt, in diesem Falle verdoppelt *J* in *J(w)* das Symbol, das es in w vorfindet.

Dann gilt folgender Satz:

[14] Vgl. Albers (2006), S. 44f.
[15] Albers (2006), S.45
[16] ebd., S.46

Satz 3.26:

Für jedes beliebige Alphabet *A*, das die Symbole *N, W, S* und *O* enthält, gibt es für alle $u,v \in A^*$, die mit dem Symbol *N* beginnen, ein $c \in IR^+$, $c < 1$, so dass $d(J(u),J(v)) \le c \cdot d(u,v)$ gilt.

Beweis:

Wir betrachten zwei Wörter $u = NU_1U_2U_3....U_{m-1}U_m$ und $v = NV_1V_2V_3....V_{m-1}V_m$, die in den ersten *m* Zeichen übereinstimmen: $U_i = V_i$ für $i \in IN_0$, $i < m$ und $U_m \ne V_m$. Dann ist $d(u,v) = \frac{1}{2^m}$. Durch Anwenden des Inflationsoperators erhält man aus *u* und *v* *J(u)* und *J(v)*, die nach Definition 3.1 und Folgerung 3.3 in den ersten 2*m* Zeichen übereinstimmen.

Das heißt: $d(J(u),J(v)) = \frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{2^m} d(u,v)$. Im ungünstigsten Fall, für *m*=1, gilt:

$d(J(u),J(v)) = \frac{1}{2} d(u,v)$, also ist *J* kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $c = \frac{1}{2}$. □

Bemerkung 3.27:

Die Einschränkung auf Wörter, die mit *N* beginnen, ist notwendig, da sonst im ungünstigsten Fall *m*=0 gölte, woraus *c*=1 folgte und *J* somit nicht kontrahierend wäre.

Die Erweiterung 3.25 der Definition 3.1 brauchen wir, da *A* nach Voraussetzung mehr als 4 Symbole haben kann und das Einfügen der neuen Symbole nach Definition 3.1 und Bemerkung 3.2 b) nur in Abhängigkeit von den alten geschieht.

Wir erhalten hier also, dass die Papierfaltungsfolge *ω* nach neuer Kodierung „eine Folge des kontrahierenden Inflationsoperators *J* auf der Menge von Zeichenketten“[17], die mit *N* beginnen, ist. Unsere notwendige Forderung nach dem *N* auf Platz *0* gibt diesem dabei die Rolle als „Keimzelle“ von *ω*. Der Unterschied zur alten Kodierung ist hier wesentlich; für diese war der Inflationsoperator alleine hinreichend, um *ω* als Grenzwert zu erreichen, was hier nicht der Fall ist. Im Gegensatz zu der alten Kodierung hängen die neu

[17] Albers (2006), S.46

eingefügten Symbole hier von den bereits vorhandenen ab.[18] $\sigma(0) = N$ zeichnet *ω* in der neuen Kodierung also aus.

Wir wollen nun für die neue Kodierung der Papierfaltungsfolge einen Deflationsoperator entwerfen. Unter Deflation verstehen wir die Zerlegung eines Wortes w_n in die neu hinzugekommenen Symbole auf den Plätzen $k \equiv 1 \bmod 4$ und $l \equiv 2 \bmod 4$ einerseits und in die Symbole des Wortes w_{n-1} andererseits.[19] Für das Wort w_5 erhalten wir beispielsweise folgendes Bild, in dem die Symbole des Wortes w_4 nach unten verschoben sind:

```
    WS     OS     ON     OS     ON     WN     ON     OS
  N    W.S    W.S    O.S    W.S    O.N    O.S    O.S    W
```

Definition 3.28:

Es sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen.

Der Operator $D : A^* \setminus \{\text{Ø}\} \to A^*$ heißt *Deflationsoperator* und erzeugt aus einem Wort $w = Z_0Z_1Z_2Z_3...Z_n$ ein Wort aus A^* nach der Vorschrift

$$D(w) = \begin{cases} \text{Ø}, & \text{falls } |w| = 1, \\ Z_0Z_3Z_4Z_7...Z_{4i}Z_{4i+3}...Z_n \ , \ i \in IN_0, 4i+3 \le n, & \text{falls } |w| > 1 \text{ und } n \equiv 3 \bmod 4, \\ Z_0Z_3Z_4Z_7...Z_{4i}Z_{4i+3}...Z_{4m} \ , \ i \in IN_0, 4i+3 \le n, \ m = \left\lfloor \frac{|w|}{4} \right\rfloor & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.29:

a) Um zu erreichen, dass $D(J(w)) = w$ gilt, müssen wir außerdem fordern, dass in w an allen Stellen mit geraden Positionsnummern ein *N* oder *S* steht und an denjenigen mit ungeraden Nummern ein *W* oder *O*, da von diesen Symbolen abhängt, ob davor oder dahinter eingefügt wird. So ist beispielsweise $J(OOO) = NONONO$, aber $D(NONONO) = NON \neq OOO$.

b) Wegen beispielsweise $J(D(NON)) = NW \neq NON$ müssen wir die Menge der Wörter aus A^* auf diejenigen aus Definition 3.4 einschränken, wenn

[18] Vgl. dazu Bemerkung 3.2 c)

[19] vgl. Albers (2006), S.47

wir erreichen wollen, dass *D* der zu *J* inverse Operator ist. Wie für die *LR*-Kodierung gilt dann auch hier, dass *ω* wegen $D(\omega)=\omega$ ein Fixpunkt des Deflationsoperators ist[20]. In unserer Kodierung steht diese formale Beziehung hinter der Gesetzmäßigkeit für Platznummern $k \equiv 0 \bmod 4$ oder $k \equiv 3 \bmod 4$.

Am Beispiel von w_4 wenden wir nun wiederholt den Deflationsoperator an:

1. Zerlegung: *n*=1

```
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15
    W  S        O  S        O  N        O  S       Plätze≡ 1 und  2 mod  4
 N        W  S        W  S        O  S        W    Plätze≡ 0 und  3 mod  4
```

2. Zerlegung: *n*=2

```
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15
    W  S        O  S        O  N        O  S       Plätze≡ 1 und  2 mod  4
          W  S                    O  S             Plätze≡ 3 und  4 mod  8
 N                    W  S                    W    Plätze≡ 0 und  7 mod  8
```

3. Zerlegung: *n*=3

```
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15
    W  S        O  S        O  N        O  S       Plätze≡ 1 und  2 mod  4
          W  S                    O  S             Plätze≡ 3 und  4 mod  8
                      W  S                         Plätze≡ 7 und  8 mod 16
 N                                            W    Plätze≡ 0 und 15 mod 16
```

4. Zerlegung: *n*=4

```
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15
    W  S        O  S        O  N        O  S       Plätze≡ 1 und  2 mod  4
          W  S                    O  S             Plätze≡ 3 und  4 mod  8
                      W  S                         Plätze≡ 7 und  8 mod 16
                                              W    Plätze≡15 und 16 mod 32
 N                                                 Plätze≡ 0 und 31 mod 32
```

Der Deflationsoperator extrahiert auf jeder Stufe $n \in IN$ die Symbole auf den Plätzen $k-1$ und *k*, wobei $k \equiv 2^n \bmod 2^{n+1}$. Damit kehrt er wie erwünscht die Funktionsweise des Inflationsoperators um; wir hatten ja in Satz 3.12 gesehen, dass dieser beim Bilden eines neuen Wortes aus jeweils 2 Symbolen 4 macht, indem er in der Mitte dieser beiden 2 neue Symbole einfügt.

Betrachten wir die Abbildung der 4. Zerlegung von unten nach oben, also in Richtung der Arbeitsweise des Inflationsoperators, so erkennen wir, dass die

[20] vgl. Albers (2006), S. 47

eingefügten Symbole zwar nicht so eine einfache Regelmäßigkeit haben, wie dies der Fall für die alte Kodierung ist, aber dennoch eine Regelmäßigkeit aufweisen: Der Anfang der Symbolfolge ist immer gleich. Um eine genauere Aussage über diese Regelmäßigkeit zu erhalten, definieren wir zunächst das Wort, das aus den Zeichen besteht, die der Inflationsoperator einfügt. Zunächst betrachten wir den endlichen Fall:

Definition 3.30:

Es sei $n \in IN_0$, *v_n* sei das *n*-te Wort nach Definition 3.4 und $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen. Dann bezeichnet $E(v_n)$ das Wort, das aus denjenigen Symbolen besteht, die die Anwendung des Inflationsoperators *J* auf *v_{n-1}* in *v_{n-1}* eingefügt hat, um *v_n* zu erhalten, das heißt:

$\tilde{\sigma}(E(v_n), k) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(v_n, 2k+1), \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \tilde{\sigma}(v_n, 2(k-1)+2), \text{ falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$ für alle $k \in IN_0$, $k \le 2^{n-1} - 1$.

Bemerkung 3.31:

a) Es gilt: $|E(v_n)| = |v_{n-1}| = \frac{1}{2}|v_n| = \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$, nach Folgerung 3.3 a), da beim Inflationsvorgang so viele Symbole eingefügt werden, wie vorhanden sind.
b) Da wir $E(v_n)$ über die Symbole aus *v_n* definiert haben, folgt direkt, dass der Anfang der Wörter $E(v_n)$, $n \in IN_0$ immer gleich ist, da dies für die Wörter *v_n* bereits gilt.

Diese Definition wollen wir sogleich auf den unendlichen Fall erweitern:

Definition 3.32:

a) $\varepsilon \in \{N, W, S, O\}^*$ bezeichnet entsprechend das unendlich lange Wort, dessen *k*-tes Symbol definiert ist als *k*-tes Symbol in *E*(*v_n*), $n \in IN$, $2^{n-1} > k$.
b) Es sei $\vartheta : IN_0 \to \{N, W, S, O\}$ eine Funktion, wobei $\vartheta(k)$, $k \in IN_0$ das *k*-te Symbol von *ε* angibt.

Bemerkung 3.33:

a) Da $J(\omega) = \omega$ gilt, kann man im unendlichen Fall nicht sinnvoll von „Einfügen" sprechen.

b) Es gilt also: $\vartheta(k) = \tilde{\sigma}(E(v_n), k)$, $n \in IN$, $2^{n-1} > k$.

Nun können wir formulieren:

Satz 3.34: Es gilt: $\vartheta(k) = (\sigma(k))'$ für alle $k \in IN_0$.

Beweis: Nach Satz 3.14 werden von *J* nur an den Stellen $l \equiv 1 \bmod 4$ und $(l+1) \equiv 2 \bmod 4$ neue Symbole in *w* eingefügt. Für $\vartheta(k)$ gilt damit für alle

$$k \in IN_0:\ \vartheta(k) = \begin{cases} \sigma(2k+1), \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \sigma(2(k-1)+2), \text{ falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

da: $\begin{cases} k \text{ gerade} \quad \Rightarrow\ 2k+1 \equiv 1 \bmod 4, \\ k \text{ ungerade} \Rightarrow\ 2(\mathrm{k}-1)+2 \equiv 2 \bmod 4,\ \text{da } (k-1) \text{ gerade.} \end{cases}$

Nach Satz 3.20 b) ii) und iii) gilt dann

$$\vartheta(k) = \begin{cases} (\sigma(\frac{(2k+1)-1}{2}))' = (\sigma(k))' \ , & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ (\sigma(\frac{2(k-1)+2}{2}))' = (\sigma(k-1+1))' = \sigma((k))', & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und damit insgesamt die Behauptung für alle $k \in IN_0$ □

Folgerung 3.35:

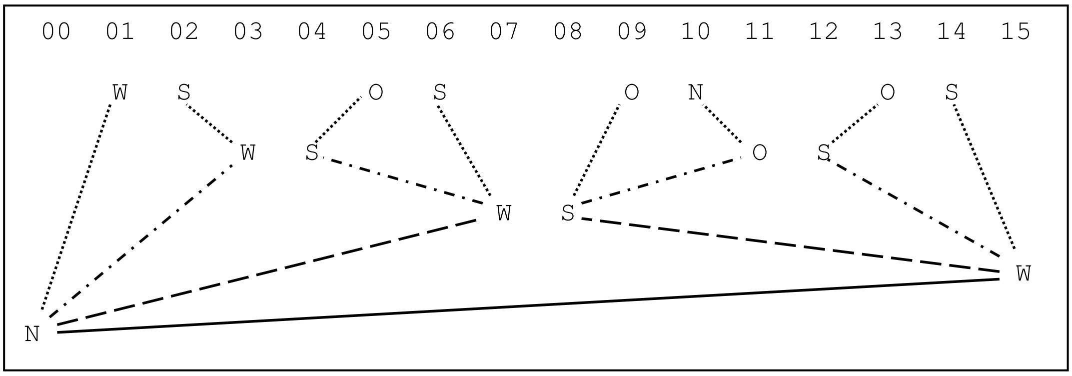
Aus Satz 3.34 folgt nach Definition 2.3 des Reflexionsoperators direkt, dass jedes Wort w_n, $n \in IN$, von hinten gelesen gerade die ersten 2^{n-1} Symbole der Folge *ε* enthält. Das heißt, andersherum ausgedrückt, dass der Beginn von *ε* die vom Reflexionsoperator *F* an w_{n-1} angehängte Symbolfolge $(w_{n-1})'$ in umgekehrter Reihenfolge ist:

$\vartheta(k) = \tilde{\sigma}(w_n, 2^n - 1 - k) = \tilde{\sigma}((w_{n-1})', 2^{n-1} - 1 - k)$ für alle $k \in IN_0$, $k \le 2^{n-1} - 1$.

Bemerkung 3.36:

Anschaulich kann man sich die einzufügenden Symbole also als die Kanten des um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Papierstreifens unserer Papierfaltungsfolge vorstellen.

Betrachten wir nun noch einmal die 4. Zerlegung, diesmal durch Linien zu einem Diagramm ergänzt:



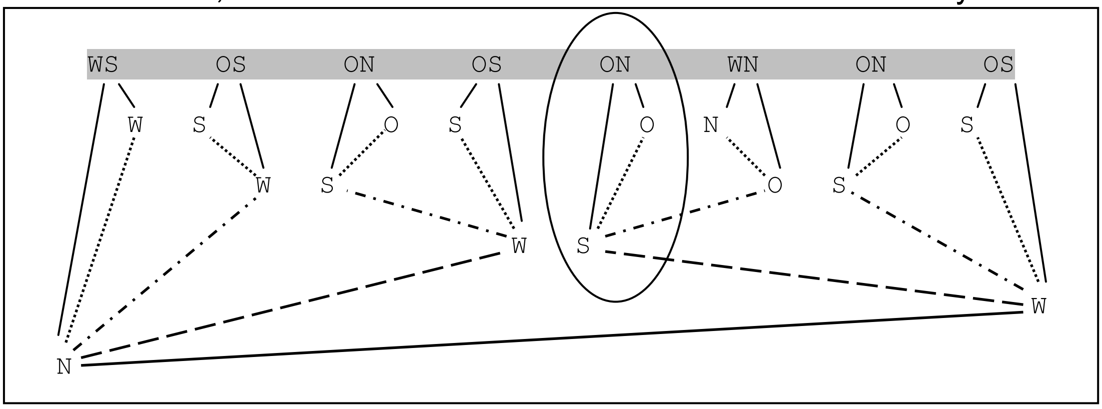
Lesen wir dieses von unten nach oben, so vollziehen wir die Entstehung des Wortes w_4 nach. Die bei den einzelnen Inflationsschritten hinzukommenden Symbole sind durch Linien mit denjenigen verbunden, auf die ihre Entstehung zurückgeht. Dabei haben Linien aus dem gleichen Inflationsschritt gleiches Aussehen.

Wie wir im Zusammenhang mit der Betrachtung von ω als Fixpunkt des Inflationsoperators festgestellt haben, ist ein wesentlicher Unterschied zwischen alter und neuer Kodierung, dass die vom Inflationsoperator eingefügten Symbole bei der alten Kodierung *unabhängig* von den vorhandenen Symbolen sind, wohingegen sie bei der neuen Kodierung von diesen *abhängen*.[21] Da jedes vorhandene Symbol in jedem Inflationsschritt genau ein neues Symbol erzeugt, geht von jedem Symbol eine Verbindungslinie zu je einem neu hinzu kommenden Symbol in jeder höheren Ebene. In der Abbildung gehen so beispielsweise 4 Linien von dem *N* links unten zu je einem *W*, das jeweils in einem der 4 Inflationsschritte, die benötigt werden, um von $N=w_0$ zu w_4 zu gelangen, erzeugt wird. Insgesamt entstehen so Wege, die sich, von einem Symbol ausgehend, in der uns bekannten Reihenfolge $N \to W \to S \to O \to N...$ im Zickzack nach oben schlängeln, wie in der Abbildung derjenige vom *N* auf Platz 0 über das *W* auf

[21] Vgl. Bemerkung 3.27

Platz 15 zum *S* auf Platz 8, dann zum *O* auf Platz 11 und schließlich zum *N* auf Platz 10. Der Zickzack-Kurs spiegelt dabei unsere Erkenntnisse über den Inflationsprozess wieder, in dem ja - wiederum abhängig von dem vorhandenen Symbol - davor oder danach eingefügt wird. Wir wissen ja aus Definition 2.1 zusammen mit Bemerkung 3.2, dass ein Symbol, *hinter* welchem eingefügt wird, in der nächsten Stufe ein Symbol erzeugt, *vor* welchem eingefügt wir und umgekehrt. Da wir zu Beginn ein *N* haben, *hinter* dem eingefügt wird und nach einmaligem Anwenden des Inflationsoperators ein *W*, *vor* dem eingefügt wird, wächst das Wort mit jedem neuen Inflationsschritt weiter zwischen diese beiden Symbole. Beim Übergang von einem Wort w_n zum Wort $w_{n+1} = J(w_n)$ erhalten wir eine neue Zeile aus Symbolen, die eingefügt werden, am oberen Ende des Diagramms. Jedes dieser Symbole hat wieder eine Verbindungslinie zu einem Symbol aus einer der darunter liegenden Zeilen. Die neue Zeile ist in der Abbildung grau unterlegt, die neuen Verbindungslinien sind die dünnen, durchgängigen:

Da alle anderen Zeilen durch das Einfügen einer neuen sozusagen nach unten rutschen, ändern sich die Positionsnummern der einzelnen Symbole.



Symbole, die vorher auf geraden Plätzen standen, verdoppeln ihre Positionsnummer; solche die auf ungeraden Plätzen standen, stehen nun auf der verdoppelten Platznummer plus Eins.[22] Dadurch entsteht nach einem Symbol auf einer geraden Position und vor einem auf einer ungeraden der Platz für zwei neu eingefügte Symbole; in der Abbildung erkennt man diese Inflation in Viererblöcken als 8 Dreiecke, das fünfte davon ist als Beispiel eingekreist. Überhaupt scheint es in diesem Diagramm so, als ob sich die einzelnen Wege zwar einzeln entwickeln, aber in einer tieferen Ebene

[22] Vgl. Folgerung 3.10

miteinander verbunden sind; anders ausgedrückt, dass man sich das gesamte Wort als in einzelnen Abschnitten entstanden vorstellen kann. Diese Überlegung wollen wir im folgenden Kapitel formalisieren und weiter verfolgen.

Insgesamt spiegelt das Diagramm den höheren Komplexitätsgrad der neuen Kodierung wider und ist daher nicht so übersichtlich und auch nicht so „leicht durchschaubar“[23].

[23] Albers (2006), S. 49.

4. *n*-faches Inflationsgesetz

Wir wollen nun unser Wissen über den Inflationsvorgang erweitern, indem wir mehrere Inflationsstufen auf einmal betrachten. Anschaulich kann man diese Idee an der obigen Abbildung nachvollziehen. Genauso wie man dort Dreiecke erkennt, die den Inflationsvorgang als Einfügen in der Mitte von Viererblöcken bildlich darstellen, kann man beispielsweise jeweils zwei solcher Dreiecke mit der sie verbindenden Strich-Punkt-Linie als Einheit betrachten. Ebenso kann man aber auch das ganze Diagramm als aus zwei Hälften bestehend ansehen, die aus dem *N* und dem *W* in den unteren beiden Zeilen hervorgehen und aus jeweils 4 der beschriebenen Dreiecke und den Linien, die diese miteinander verbinden, bestehen.
Für diese Betrachtung konzentrieren wir uns auf unsere Sichtweise der Inflation als Ersetzung von einem Symbol durch zwei neue Symbole in einem gegebenen Wort.

Definition 4.1:
Es sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen, $n \in IN_0$.

Der Operator $J^{(n)} : A^* \to A^*, n \in IN$, heißt *n-facher Inflationsoperator* und erzeugt aus einem Wort $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_m \in A^*$, $m \in IN_0$ ein Wort aus A^* nach der Vorschrift

$$J^{(n)}(w) = \begin{cases} w & \text{, wenn } n = 0, \\ J(w) & \text{, wenn } n = 1, \\ J^{(n-1)}(N) & \text{, wenn n} > 1 \text{ und } w = \text{Ø}, \\ J^{(n-1)}(Y_0)J^{(n-1)}(Y_1)J^{(n-1)}(Y_2)J^{(n-1)}(Y_3)...J^{(n-1)}(Y_m) & \text{, wenn n} > 1 \text{ und } w \neq \text{Ø}. \end{cases}$$

mit $$Y_i = \begin{cases} NW, & \text{wenn } Z_i = N, \\ SW, & \text{wenn } Z_i = W, \\ SO, & \text{wenn } Z_i = S, \\ NO, & \text{wenn } Z_i = O. \end{cases}$$ für alle $i \in IN_0$, $i \leq m$.

Bemerkung 4.2:

a) Die Definition der Y_i erfolgt analog zu Definition 3.1

b) Wir haben den n-fachen Inflationsoperator somit analog zu *J* in Definition 3.1 rekursiv definiert; im Falle $n = 1$ erhalten wir genau den Inflationsoperator aus Kapitel 3.

c) Da $Y_m \in A \times A \subset A^*$ für alle $m \in IN_0$ und nach der Distributivität von J nach Folgerung 3.3 b) ist die Definition sinnvoll.

d) Aus der Definition der Y_i folgt wie in Folgerung 3.3 c), dass $J^{(n)}$ injektiv ist.

Folgerung 4.3:

Aus der Definition folgt direkt: Für alle $n \in IN_0$ gilt:

$J^{(n)}(w) = J^{(n)}(Z_0)J^{(n)}(Z_1)J^{(n)}(Z_2)J^{(n)}(Z_3)...J^{(n)}(Z_m)$, $w = Z_0Z_1Z_2Z_3...Z_m \in A^*$, da $J(Z_i) = Y_i$ für alle $i \in IN_0$, $i \le m$. Das heißt: Das Gelten des Distributivgesetzes überträgt sich direkt vom Inflationsopertor *J* auf den n-fachen Inflationsoperator $J^{(n)}$.

Beispiel 4.4:

a) Es gilt also: $J^{(2)}(Z) = \begin{cases} J(NW) = NWSW, & \text{falls } Z = N, \\ J(SW) = SOSW, & \text{falls } Z = W, \\ J(SO) = SONO, & \text{falls } Z = S, \\ J(NO) = NWNO, & \text{falls } Z = O. \end{cases}$

b) Für $n = 2$ und $w = NWSW \ (= w_2)$ gilt also:

$$J^{(2)}(NWSW) = J(NW)J(SW)J(SO)J(SW) = NWSWSOSWSONOSOSW = w_4$$

Dies gilt auch allgemein:

Satz 4.5:

Sei $m \in IN_0$, $n \in IN$ und w_m sei ein Wort nach Definition 3.4.

Dann gilt: $J^{(n)}(w_m) = w_{m+n}$

Beweis:

Die Behauptung folgt direkt aus der Definition 4.1 des n-fachen Inflationsoperators, da diese auf ein n-maliges Anwenden des Inflationsoperators *J* aus Definition 3.4 hinausläuft. □

Folgerung 4.6:

Mit Folgerung 3.3 folgt dann direkt, dass $\left|J^{(n)}(w_m)\right| = 2^n \cdot |w_m| = 2^{m+n}$ gilt.

Definition 4.7:

Es sei *A*={*N, W, S, O*} ein Alphabet mit vier Symbolen und sei $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ....Z_m$ ein Wort aus *A**. Dann bezeichnet $\vec{w} = Z_0 ' Z_1 ' Z_2 ' Z_3 ' ...Z_m '$ dasjenige Wort, das aus *w* entsteht, indem man jedes Symbol Z_k aus *w* durch $Z_k '$ nach Definition 2.1 a) ersetzt.

Bemerkung 4.8:

a) $\vec{w}$ unterscheidet sich damit von w' aus Definition 2.1 b) in der Reihenfolge der Symbole.

b) Es gilt aber: $\vec{\vec{w}} = w''$, da hier auch die Reihenfolge der Symbole übereinstimmt, vergleiche Folgerung 2.2 e); wir verwenden daher für beide die Schreibweise w''.

c) Dies bedeutet insbesondere, dass der Ersetzungsoperator *distributiv* ist genau dann, wenn er *g*-mal angewendet wird, $g \in IN$ *g* gerade. Es gilt also: $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ....Z_m \quad \Leftrightarrow \quad w'' = Z_0 '' Z_1 '' Z_2 '' Z_3 '' ....Z_m ''$.

Satz 4.9:

Es sei *A*={*N, W, S, O*} ein Alphabet mit vier Symbolen, $n \in IN$ und $w = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ....Z_n$ ein Wort aus *A**. Dann gilt:

a) $J(w') = (J(w))'$,

b) $J(w'') = (J(w))''$,

c) $J(w''') = (J(w))'''$.

Beweis:

Teil a) gilt nach dem Kommutativgesetz (Satz 3.7).

Wir wenden dies zwei Mal an, dann gilt wegen

$J(w'') = J((w')') = (J(w'))' = ((J(w))')' = (J(w))''$ die Behauptung b) und nach dreimaliger Anwendung analog die Behauptung c) □

Wir wollen diesen Satz sogleich verallgemeinern zu dem

Satz 4.10:

Es sei *A*={*N, W, S, O*} ein Alphabet mit vier Symbolen und *w* ein Wort aus A^*.

Dann gilt für alle $n \in IN$:

a) $J^{(n)}(w') = (J^{(n)}(w))'$,

b) $J^{(n)}(w'') = (J^{(n)}(w))''$,

c) $J^{(n)}(w''') = (J^{(n)}(w))'''$.

Beweis:

(vollständige Induktion über die Anzahl *n* der Anwendungen des Inflationsoperators), wir beweisen zunächst Teil b):

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$:

$J^{(1)}(w'') = J(w'') = (J(w))'' = (J^{(1)}(w))''$ gilt nach Satz 4.9 und Definition 4.1 von $J^{(1)}(w)$.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Die Behauptung gelte für ein $n \in IN$.

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$:

Zu zeigen ist, dass dann $J^{(n+1)}(w'') = (J^{(n+1)}(w))''$ gilt.

$J^{(n+1)}(w'') = J(J^{(n)}(w'')) = J((J^{(n)}(w))'')$ nach Definition 4.1 und Ind.vor.

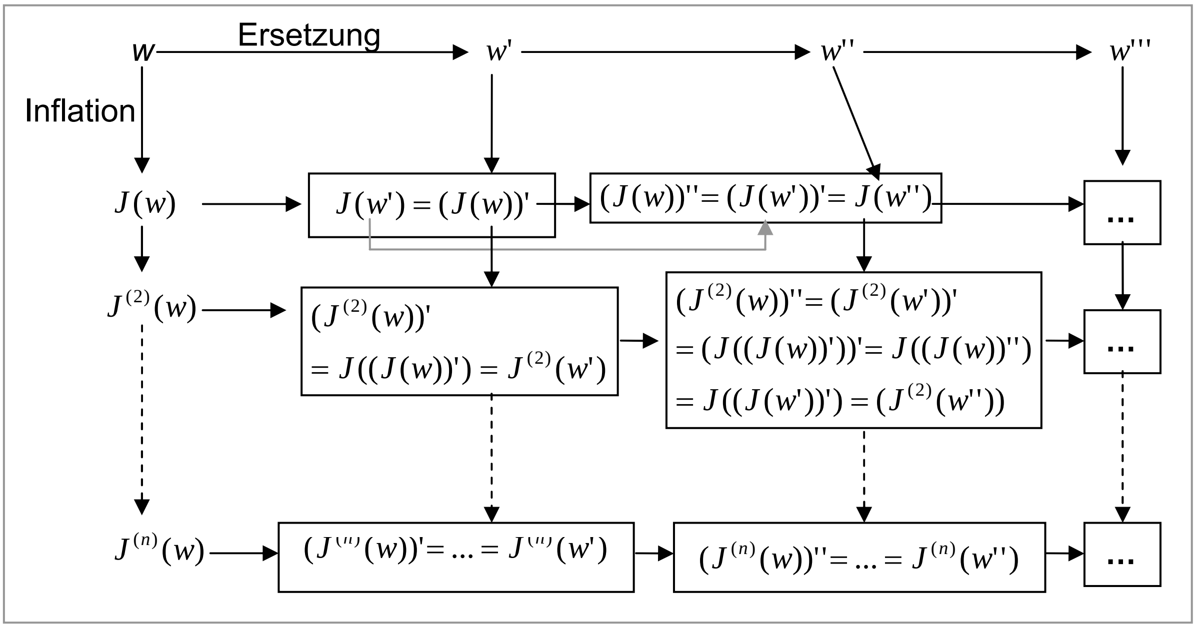
$= (J(J^{(n)}(w)))''$ nach Satz 4.9 b), mit $v := (J^{(n)}(w)) \Rightarrow J(v'') = (J(v))''$

$= (J^{(n+1)}(w))''$ nach Definition 4.1. Somit folgt die Behauptung.

Die Behauptungen für Teil a) und c) folgen analog unter Verwendung von Satz 4.9 a) und c) □

Bemerkung 4.11:

Insgesamt folgt aus Satz 4.9 und 4.10 die Distributivität der Inflation mit dem Ersetzen. Wie weit reichend diese Tatsache ist, veranschaulichen wir mit folgendem distributiven Diagramm:



Ein Schritt nach rechts entlang der Pfeile bedeutet dabei eine Ersetzung, ein Schritt nach unten ein Inflationsschritt. Je nachdem, welchen Weg man einschlägt, um zu einer Position zu gelangen, erhält man so eine unterschiedliche Kombination aus Inflationsschritten und Ersetzungen; eine davon ist beispielsweise durch den grauen Pfeil angegeben. Nach Bemerkung 4.11 sind diese jeweils gleichwertig. Prinzipiell müsste man das Diagramm stellenweise noch für häufigere Anwendungen des Ersetzungsoperators weiter nach rechts verlängern. Da sich in den dort auftretenden Fällen aber häufig $w'''' = w$ nach Folgerung 2.2 d) anwenden lässt, verzichten wir darauf.

Beispiel 4.12:

a) Es gilt also beispielsweise $J(J(w''')) = (J(J(w')))''$ für $w = NW$:

$$J(J((NW)''')) = J(J(NO)) = J(NWNO) = NWSW.NWNO$$

b) $(J(J((NW)')))'' = (J(J(SW)))'' = (J(SOSW))'' = (SONOSOSW)'' = NWSWSOSW$

c) Satz 4.10 gilt insbesondere für Wörter, die nur aus einem Symbol bestehen.

$J^{(n)}(NWSW) = J^{(n)}(N)J^{(n)}(W)J^{(n)}(S)J^{(n)}(W)$ nach Folgerung 4.3,

$= J^{(n)}(N)J^{(n)}(W)J^{(n)}(N'')J^{(n)}(W)$ nach Definition 2.1 a),

$= J^{(n)}(N)J^{(n)}(W)(J^{(n)}(N))''J^{(n)}(W)$ nach Satz 4.10

Wir können also aus der Beschaffenheit von $J^{(n)}(N)$ direkt auf diejenige von $J^{(n)}(S)$ schließen, da aus $(J^{(n)}(S))'' = J^{(n)}(N)$ folgt: $J^{(n)}(S) = (J^{(n)}(N))''$.

Wir wollen nun unser Wissen in dieser Richtung erweitern und suchen nun nach einer Möglichkeit, ebenso von $J^{(n)}(N)$ auf $J^{(n)}(W)$ und auf $J^{(n)}(O)$ schließen zu können. Dabei nutzen wir zunächst aus, dass nach Definition 3.1 gilt: $J(W) = SW = (N)''W$ und $J(N) = NW$.

Dann gilt nach Definition 4.1, Folgerung 4.3 und Satz 4.10:

$J^{(n)}(W) = J^{(n-1)}(SW) = J^{(n-1)}(S)J^{(n-1)}(W) = J^{(n-1)}((N)'')J^{(n-1)}(W) = (J^{(n-1)}(N))''J^{(n-1)}(W)$

und

$J^{(n)}(N) = J^{(n-1)}(N)J^{(n-1)}(W)$.

Das bedeutet, dass die hinteren Hälften von $J(W)$ und $J(N)$ gleich sind, wohingegen die vorderen Hälften genau invers zueinander sind.

Für $J^{(n)}(O)$ folgt dann $J^{(n)}(O) = J^{(n)}((W)'') = (J^{(n)}(W))''$ nach Satz 4.10

$= ((J^{(n-1)}(N))''J^{(n-1)}(W))''$ siehe oben,

$= (J^{(n-1)}(N))''''(J^{(n-1)}(W))''$ nach Bemerkung 4.8 b)

$= J^{(n-1)}(N)(J^{(n-1)}(W))''$ nach Folgerung 2.2 b) und nach Bemerkung 4.8 b), also folgt insgesamt, dass

$J^{(n)}(O) = J^{(n-1)}(N)(J^{(n-1)}(W))''$ gilt.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.13:

Es sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen, $J^{(n)}(N) = uv$, mit u, v aus A^*, so dass $|u| = |v| = \frac{1}{2}|J^{(n)}(N)|$, $n \in IN$.

Dann gilt: $J^{(n)}(W) = u''v$ und $J^{(n)}(O) = uv''$.

Bemerkung 4.14:

a) Nach Bemerkung 4.11 gilt: $J^{(n)}(S) = J^{(n)}(N'') = (J^{(n)}(N))'' = u''v''$.

b) Nach Folgerung 4.6 gilt: $J^{(n)}(N) = w_n \Rightarrow |J^{(n)}(N)| = 2^n \Rightarrow |u| = |v| = 2^{n-1}$

Insbesondere gilt: $u = w_{n-1}$ wie wir aus Satz 2.12 a) wissen.

Satz 4.15:

In allen Wörtern w_n, $n \in IN$, $n \geq 2$ das dritte Viertel von w_n das Inverse des ersten Viertels und das zweite Viertel gleich dem vierten Viertel.

Beweis:

Dies gilt, da $J^{(n)}(w_2) = J^{(n)}(NWSW) = J^{(n)}(N)J^{(n)}(W)J^{(n)}(S)J^{(n)}(W)$. □

Satz 4.13 gibt uns mit Bemerkung 4.14 a) ein Mittel, von einem gegebenen Wort $w_n = J^{(n)}(N)$ durch abschnittsweises Kopieren zu einem Wort höherer Stufe zu gelangen. Es gilt nämlich:

Satz 4.16:

Sei $w_n = J^{(n)}(N)$, $n \in IN$, $n \geq 3$. Wir betrachten das Wort w_n in Vierteln: $w_n = abcb$ mit $a, b, c \subset A^*$, $|a| = |b| = |c| = 2^{n-2}$, sowie in Achteln: $a = a_1 a_2$ mit $a_1, a_2 \subset A^*$, $|a_1| = |a_2| = 2^{n-3}$ und $c = c_1 c_2$ mit $c_1, c_2 \subset A^*$, $|c_1| = |c_2| = 2^{n-3}$.

Dann gilt: $w_{n+1} = abcbca_1c_2cb$.

Um die Aussage des Satzes zu verdeutlichen, zunächst ein Beispiel:

Beispiel 4.17:

Wir betrachten $w_3 = NWSWSOSW$ und setzen: $a = NW$, $b = SW$, $c = SO$,

sowie $a_1 = N$ und $c_2 = O$ (a_1 bedeutet: erste Hälfte von a, entsprechend c_2 : zweite Hälfte von *c*).

Es gilt also: $w_3 = abcb$. Dann gilt: $w_4 = abcbca_1c_2cb = NWSWSOSWSONOSOSW$.

Setze nun: $a = NWSW$, $b = SOSW$, $c = SONO$; a_1 und c_2 entsprechend. Dann gilt:

$w_5 = abcbca_1c_2cb = NWSWSOSWSONOSOSWSONONWNOSONOSOSW$

Setze nun: $a = NWSWSOSW$, $b = SONOSOSW$, $c = SONONWNO$; a_1 und c_2 entsprechend.

Dann gilt: $w_6 = abcbca_1c_2cb \ldots.$ usw.

Man erhält so schnell Wörter höheren Grades durch einfaches Kopieren von Teilen des vorhandenen Wortes.

Beweis von Satz 4.16:

Sei also: $w_n = abcb$ wie gefordert. Analog zu a_1, a_2, c_1, c_2 setzen wir $b := b_1b_2$ mit $b_1, b_2 \subset A^*$, $|b_1| = |b_2| = 2^{n-3}$ und schreiben: $w_n = abcb = a_1a_2b_1b_2c_1c_2b$.

Wegen $w_n = J^{(n)}(N) = J^{(n-2)}(NWSW) = J^{(n-2)}(N)J^{(n-2)}(W)J^{(n-2)}(S)J^{(n-2)}(W)$ gilt dann: $c = a''$ nach Bemerkung 4.14 c),

$a_1 = b_1''$ nach Satz 4.15, da $a_1a_2b_1b_2 = w_{n-1}$ nach Satz 2.12 a)

$c_2 = a_2'' = b_2''$, da $c = a''$ und $a_2 = b_2$ in w_{n-1} nach Satz 4.15.

Nach Satz 4.15 und 2.12 b) muss dann gelten: $w_{n+1} = abcb(ab)''cb$ Daraus folgt durch Einsetzten: $w_{n+1} = abcb(a)''(b_1)''(b_2)''cb = abcbca_1c_2cb$ wie behauptet. □

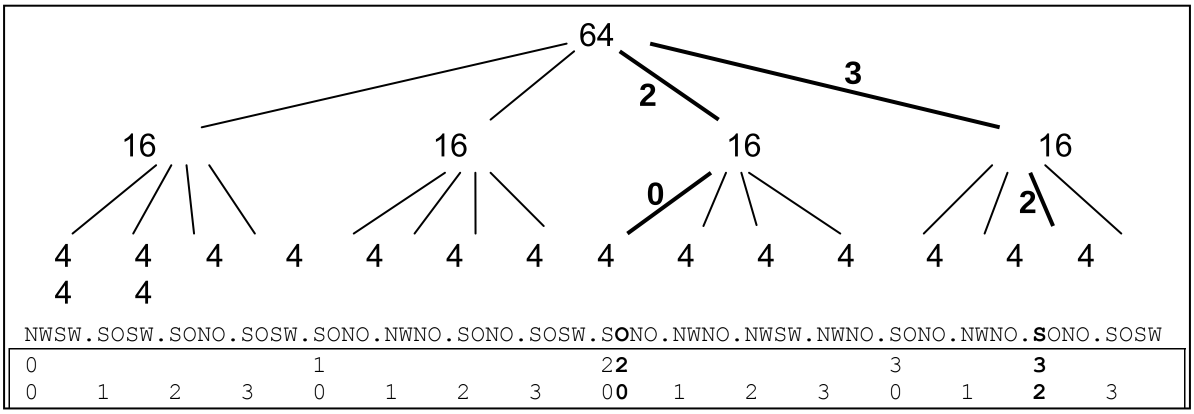
Bemerkung 4.18:

Weil mit den Bezeichnungen aus Satz 4.16 für $w_n = abcb$ gilt: $a_1 = w_{n-3}$, haben wir mit $w_{n+1} = abcbca_1c_2cb$ das Translationsgesetz (Satz 2.13) noch einmal bewiesen, denn da $|a| = |b| = |c| = 2^{n-2}$, wiederholt sich $a_1 = w_{n-3}$ in w_{n+1} ab Position $5 \cdot 2^{n-2} = 10 \cdot 2^{n-3}$ für alle $n \in IN$, $n \geq 3$.

Die von uns gefundenen Regelmäßigkeiten dienen uns aber auch für den umgekehrten Fall, für die Bestimmung des Symbols, das auf einem bestimmten Platz steht:

Zu einer gegebenen Platznummer *k* betrachten wir ihre Darstellung zu einer gegebenen Basis 2^b, $b \in IN$: Sei $k = k_m....k_3k_2k_1$, wobei *m* die Anzahl der Stellen und k_i für $i = 1,2,3,...,m$ die Ziffern von *k* zur Basis 2^b bezeichnen. Wir setzen dann $n := m \cdot b$. Nach der Definition des Stellenwertsystems ist dann $k < 2^{b \cdot m} = 2^n$ und damit liegt die Position *k* mit Sicherheit im Wort w_n.

Das Wort w_n betrachten wir nun zunächst in 2^b gleich großen Abschnitten, die folglich aus jeweils $2^{n-b} = 2^{m \cdot b - b} = 2^{(m-1)b}$ Symbolen bestehen. k_m gibt uns dann an, in welchem dieser Abschnitte sich die gesuchte Position *k* befindet, nämlich im $(k_m + 1)$-ten. Diesen Abschnitt unterteilen wir dann wiederum in 2^b Abschnitte, die nun aus $2^{(m-2)b}$ Symbolen bestehen und wissen, dass sich *k* im $(k_{m-1} + 1)$-ten davon befindet. Dieses Verfahren setzen wir fort, bis wir schließlich erhalten, dass sich *k* an der Stelle k_1 in einem Abschnitt aus 2^b Symbolen befindet. In der Abbildung ist dieses Verfahren für das Wort w_6 dargestellt, das $2^6 = 64$ Zeichen hat, mit *b*=2, also $2^b = 4$. Eingetragen ist die jeweilige Länge der Blöcke, die Zweige der untersten Ebene zu den einzelnen Symbolen sind nicht eingetragen:



Die Positionsnummern sind zur Basis $2^2 = 4$ dargestellt und die Beispiele $k = 33 = 201_4$ und $k = 56 = 320_4$ sind **fett** gekennzeichnet.

Wir passen also unsere Betrachtung des Wortes w_n dem Zahlensystem zur Basis 2^b an, um dann direkt aus den Ziffern der Darstellung der Positions-nummer *k* als Zahl zur Basis 2^b Informationen über das Symbol an der Stelle

k zu bekommen. Sei dazu $k = k_m....k_3k_2k_1$, wobei m die Anzahl der Stellen und k_i für $i = 1,2,3,...,m$ die Ziffern von k zur Basis 2^b bezeichnen. Wir setzen die ersten 2^b Positionen der Papierfaltungsfolge ω als bekannt voraus. Diese stellen gerade das Wort w_b dar nach Definition 2.21.

Sei also $w_b = Z_0Z_1Z_2Z_3...Z_{2^b-1}$, dann gilt wegen $n = m \cdot b$:

$w_n = J^{((m-1)\cdot b)}(w_b) = J^{((m-1)\cdot b)}(Z_0)J^{((m-1)\cdot b)}(Z_1)J^{((m-1)\cdot b)}(Z_2)J^{((m-1)\cdot b)}(Z_3)...J^{((m-1)\cdot b)}(Z_{2^b-1})$.

Allgemein gilt:

$J^{((m-i)\cdot b)}(w_b) = J^{((m-i)\cdot b)}(Z_0)J^{((m-i)\cdot b)}(Z_1)J^{((m-i)\cdot b)}(Z_2)J^{((m-i)\cdot b)}(Z_3)...J^{((m-i)\cdot b)}(Z_{2^b-1})$ für alle $i \in IN$, $i < m$ nach Folgerung 4.3. Anschaulich haben wir also für jede Potenz von 2^b (was den Ziffern k_i von k entspricht) die entsprechenden Abschnitt wiederum in $2^b - 1$ Abschnitte (was $|w_b|$ entspricht) aufgeteilt und diese jeweils auf ein Symbol aus w_b zurückgeführt. Für jeden dieser Abschnitte und Unterabschnitte wollen wir jetzt einen Vergleich anstellen mit einem entsprechend langen, der auf das Symbol N zurückgeht.

Wir setzen dazu, analog zu Satz 4.13, $J^{((m-i)\cdot b)}(N) := uv$, mit u, v aus A^*, so dass $|u| = |v| = \frac{1}{2}\left|J^{((m-i)\cdot b)}(N)\right|$, also so, dass u die erste und v die zweite Hälfte von $J^{((m-i)\cdot b)}(N)$ ist. Dann gilt: $Z_j = \begin{cases} N \Rightarrow J^{((m-i)\cdot b)}(Z_j) = uv \\ W \Rightarrow J^{((m-i)\cdot b)}(Z_j) = (u)''v \\ S \Rightarrow J^{((m-i)\cdot b)}(Z_j) = (u)''(v)'' \\ O \Rightarrow J^{((m-i)\cdot b)}(Z_j) = (u)(v)'' \end{cases}$ für alle $j \in IN_0$, $j \leq 2^b - 1$ und alle $i \in IN$, $i < m$.

Das bedeutet andersherum: Je nachdem, welches Symbol an Position k_m in w_b steht, müssen wir die Hälften von $J^{((m-1)\cdot b)}(Z_{k_m})$ invertieren (oder nicht), um zu $J^{((m-1)\cdot b)}(N)$ zu gelangen.

Je nachdem, welches Symbol an Position k_{m-1} in w_b steht, müssen wir die Hälften von $J^{((m-2)\cdot b)}(Z_{k_{m-1}})$ invertieren (oder nicht) um zu $J^{((m-2)\cdot b)}(N)$ zu gelangen. Allgemein:

Je nachdem, welches Symbol an Position k_i in w_b steht, müssen wir die Hälften von $J^{((m-1-i)\cdot b)}(Z_{k_{m-i}})$ invertieren (oder nicht) um zu $J^{((m-1-i)\cdot b)}(N)$ zu

gelangen für alle $i \in IN$, $i < m$. Schließlich erreichen wir so mit $J^{(0)}(Z_{k_1}) = Z_{k_1}$ ein Symbol aus w_b , das uns bekannt ist. Dieses müssen wir dann entsprechend oft invertieren und erhalten so das gesuchte Symbol.
Dabei nutzen wir aus, dass zwei Mal invertierte Symbole und Symbolfolgen wieder das Ausgangssymbol beziehungsweise die Ausgangssymbolfolge ergeben. Ob wir invertieren müssen oder nicht, entscheidet also das Symbol an der entsprechenden Position in w_b . Dabei gilt: Steht dort ein *S*, wird in jedem Fall invertiert, steht dort ein *W*, wird invertiert, wenn *k* in der ersten Hälfte von $J^{((m-1-i)\cdot b)}(Z_{k_{m-i}})$ steht und bei einem *O* wird invertiert, wenn *k* in der zweiten Hälfte von $J^{((m-1-i)\cdot b)}(Z_{k_{m-i}})$ steht. Ob nun *k* in der ersten oder zweiten Hälfte von $J^{((m-1-i)\cdot b)}(Z_{k_{m-i}})$ steht, erkennt man an der nachfolgenden Ziffer

$$k_{m-i-1}: \begin{cases} k_{m-i-1} \leq 2^{b-1} - 1 \Rightarrow k \text{ steht in der ersten Hälfte} \\ k_{m-i-1} > 2^{b-1} - 1 \Rightarrow k \text{ steht in der zweiten Hälfte} \end{cases}$$

Wir erhalten also insgesamt folgenden Algorithmus:

Algorithmus 4.19:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Welches Symbol steht an Platz k ?

1. Wähle eine Basis 2^b.
2. Betrachte w_{2^b}.
3. Stelle k als Zahl zur Basis 2^b dar.
4. Betrachte dann die Ziffern k_i bis auf die letzte.
Erhöhe m um 1…
a) für jede Ziffer k_i, an deren Position in w_{2^b} ein S steht,
b) für jede Ziffer k_i, an deren Position in w_{2^b} ein W steht, wenn die folgende Ziffer $\le 2^{b-1}-1$ ist
c) für jede Ziffer k_i, an deren Position in w_{2^b} ein O steht, wenn die folgende Ziffer Ziffer $\ge 2^{b-1}$ ist.
d) Sonst erhöhe m nicht.
5. Betrachte das Symbol, das an der Postion der letzten Ziffer in w_{2^b} steht. Invertiere es m Mal. Das so erhaltene Symbol ist das gesuchte.</td>
<td>a) Welches Symbol steht an Platz k=123456 ?

1. Wähle $2^2=4$
2. $w_4 = \mathtt{NWSW}$
$\quad\;\;\mathtt{0123}$
3. $123456_{10} = 132021000_4$
4. Erhöhe m um 1…
a) für jede 2,
b) für jede 1 oder 3, wenn diesen eine 0 oder 1 folgt.
→ $m=2+1=3$
5. letzte Ziffer ist eine 0
→ N drei Mal invertiert ergibt S.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Und an Platz k=95049871 ?

1. Wähle $2^3=8$
2. $w_8 = \mathtt{NWSW.SOSW}$
$\quad\;\;\mathtt{0123.4567}$
3. $95049871_{10} = 552454217_8$
4. Erhöhe m um 1…
a) für jede 2, 4 und 6,
b) für jede 1, 3 oder 7, wenn diesen eine 0, 1, 2 oder 3 folgt,
c) für jede 5, wenn dieser eine 4, 5, 6 oder 7 folgt.
→ $m=4+0+2=6$
5. letzte Ziffer ist 7
→ W sechs Mal invertiert ergibt W.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Beispiel c) Welches Symbol steht an Platz k=92 ?

Wähle $b=1$. Es gilt: $k=1011100_2$ und $w_1 = NW$. Also müssen wir für jedes Auftreten der Ziffer 1 einmal invertieren (entspricht dem W), wenn eine 0 folgt.
Das ist zwei Mal der Fall, und die letzte Ziffer ist eine 0, also ist das gesuchte Symbol ein N.</td>
</tr>
</table>

Wir haben damit das Problem, zu einer gegebenen Zahl $k \in IN_0$ das Symbol zu bestimmen, das an der Position *k* der Papierfaltungsfolge *ω* steht, fast vollständig auf das uns bekannte Problem der Umwandlung einer Zahl zur Basis 10 in eine Zahl zu einer anderen Basis (2^b) zurückgeführt.
Das Symbol an der Position *k*=92 hatten wir auch schon in den vorangegangenen Kapiteln bestimmt. Beispiel c) zeigt uns wir hier den Unterschied zu den entsprechenden Algorithmen 2.29 und 3.17.
Beispiel a) und b) zeigen, dass man mit diesem Verfahren selbst für sehr große Positionsnummern in wenigen Schritten das Symbol an dieser Stelle bestimmen kann. Excel „speichert und berechnet mit einer Genauigkeit von 15 signifikanten Stellen.“ [24] Das heißt, wenn wir $b = 3$ wählen, können wir für alle in Excel darstellbaren Zahlen *k* in höchstens $\log_8(1 \cdot 10^{15}) + 1 = 17$ Zeilen das gesuchte Symbol bestimmen.

Satz 4.20:
Sei $A = \{N, W, S, O\}$ ein Alphabet mit 4 Symbolen, $n \in IN$, $k \in IN_0$, $k \le n$, w_n ein Wort nach Definition 3.4. w_n sei in 2^k Abschnitte $u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_{2^k-1}$ gleicher Länge aufgeteilt.
Dann gilt: $\left|\{u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_{2^k-1}\}\right| \le 4$, das heißt, es gibt höchstens 4 verschiedene u_i, $i \in IN_0$.

Beweis:
Nach Satz 4.5 gilt: $w_n = J^{(n-k)}(w_k)$. Nach Satz 2.5 besteht w_k aus 2^k Symbolen aus *A*: $w_k = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 ... Z_{2^k-1}$, $Z_i \in A$, $i \in IN_0$, $i \le 2^k - 1$. Nach Folgerung 4.3 gilt dann:

$$w_n = J^{(n-k)}(w_k) = J^{(n-k)}(Z_0) J^{(n-k)}(Z_1) J^{(n-k)}(Z_2) J^{(n-k)}(Z_3) ... J^{(n-k)}(Z_{2^k-1}).$$

Mit $u_i := J^{(n-k)}(Z_i)$ folgt:

$$\left|\{u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_{2^k-1}\}\right| = \left|\{J^{(n-k)}(Z_0), J^{(n-k)}(Z_1), J^{(n-k)}(Z_2), J^{(n-k)}(Z_3), ..., J^{(n-k)}(Z_{2^k-1})\}\right|$$

$= \left|\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{2^k-1}\}\right| \le 4$, da $|A| = 4$ und damit die Behauptung. □

[24] Microsoft Excel Hilfe zum Stichwort „Berechnungsgenauigkeit“.

Beispiel 4.21:

In unseren Beispielen haben wir die Wörter w_n zur besseren Übersicht in Abschnitte aus je 4 Symbolen eingeteilt. Hiervon gibt es genau 4 verschiedene, nämlich $J^{(2)}(N) = NWSW$, $J^{(2)}(W) = SOSW$, $J^{(2)}(S) = SONO$ und $J^{(2)}(O) = NWNO$.

Dies gilt allgemein:

Satz 4.22:

$J^{(n)}$ ist bijektiv für alle $n \in IN$.

Beweis:

Die Injektivität hatten wir in Bemerkung 4.2 d) festgestellt. Die Surjektivität folgt damit aus Satz 4.20. Insgesamt folgt die Behauptung. □

Abschließend wollen wir die Distributivitätseigenschaft aus Bemerkung 4.11 noch dazu nutzen zu zeigen, dass unsere Papierfaltungsfolge nicht periodisch ist:

Satz 4.23:

a) Die Papierfaltungsfolge ω ist nicht periodisch.
b) Die Papierfaltungsfolge ω ist auch nicht ab einer Stelle $\sigma(k)$, $k \in IN$ periodisch.
c) Sei $n \in IN$. Sei ω in Abschnitte u_i, $i \in IN_0$ der Länge 2^n eingeteilt, so dass für alle i gilt:
   $u_i = \sigma(i \cdot 2^n)\sigma(i \cdot 2^n + 1)\sigma(i \cdot 2^n + 2)\sigma(i \cdot 2^n + 3)...\sigma(i \cdot 2^n + 2^n - 1)$. Dann gilt:
   $u_i \neq u_{i+1}$ für alle $i \in IN_0$.

Beweis:

a) Annahme: *ω* ist periodisch und habe die Periode *p*, $p \in IN$.

Wir zeigen zunächst, dass p dann ungerade sein muss.

Dazu betrachten wir die Zerlegung von p in: $p = 2^a \cdot u$, $a \in IN_0$, $u \in IN$, u ungerade.

Sei $w = Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_{p-1} \in A^*$ die Symbolfolge, die sich periodisch wiederholt und $v = Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_{u-1} \in A^*$ seien die ersten u Symbole von w.

Dann gilt:

$$\left|J^{(a)}(v)\right| = \left|J^{(a)}(Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_{u-1})\right| = \left|J^{(a)}(Z_0)\right| + \left|J^{(a)}(Z_1)\right| + \left|J^{(a)}(Z_2)\right| + ... + \left|J^{(a)}(Z_{u-1})\right|$$

$$= u \cdot 2^a = p.$$

Da *ω* nach Voraussetzung periodisch mit Periode *p* ist und nach dem Distributivgesetz für $J^{(n)}$, folgt hieraus, dass die Symbolfolge $J^{(a)}(Z_0) J^{(a)}(Z_1) J^{(a)}(Z_2) J^{(a)}(Z_3) ... J^{(a)}(Z_{u-1})$ in *ω* periodisch ist. Dann muss wegen der Bijektivität des n-fachen Inflationsoperators nach Satz 4.20 aber auch $v = Z_0 Z_1 Z_2 ... Z_{u-1}$ in *ω* periodisch sein. Da $|v| = u$ gilt, folgt: *ω* ist periodisch mit Periode u.

Ungerade kann die Periode aber nicht sein, da sonst beispielsweise mit $Z_0 = Z_u$ ein Widerspruch zu Satz 3.9 auftritt [25], nach dem auf geraden Plätzen *N* oder *S* stehen und auf ungeraden Plätzen *W* oder *O*. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung.

b) Folgt direkt aus Teil a), da wir dort nur über die Periodenlänge argumentieren.

c) Annahme: $u_i = u_{i+1}$ für ein $i \in IN_0$.

Dann gilt nach Definition 4.1 und nach Definition der u_i:

$J^{(n)}(\sigma(i)) = u_i = u_{i+1} = J^{(n)}(\sigma(i+1))$.

Daraus folgt mit Satz 4.22: $\sigma(i) = \sigma(i+1)$ für ein $i \in IN_0$ im Widerspruch zu Satz 3.9. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung. □

---

[25] Satz 3.9 können wir mit Definition 2.22 auf den unendlichen Fall erweitern.

5. Fazit

Die Ergebnisse die wir in den Kapiteln 2 und 3 erhalten haben, liegen im Rahmen dessen, was wir erwartet hatten. Die dort gefundenen Regelmäßigkeiten der Folge in der neuen Kodierung gleichen denen für die alte Kodierung.

Dahingegen hat uns der *n*-fache Inflationsoperator, den wir für die neue Kodierung aufstellen konnten, die Möglichkeit gegeben, einen globaleren Überblick über die Papierfaltungsfolge zu bekommen, als dies in der alten Kodierung möglich war. Hierin liegt ein großer Vorteil der neuen Kodierung. Dass ω beispielsweise nicht periodisch ist, war zu erwarten, wenn wir Bemerkung 4.14 betrachten.

Die in den einzelnen Kapiteln gefundenen Algorithmen liegen der Arbeit in Form von Excel-Tabellen bei, dabei ist

- In dem Programm „Anzahlen.xls" die Gesetzmäßigkeit aus Satz 2.6 über die Anzahl der einzelnen Symbole im Wort w_n, $n \in IN_0$,
- in dem Programm „Platz_Reflexionsgesetz.xls" der Algorithmus 2.29,
- in dem Programm „Position_Inflationsgesetz.xls" der Algorithmus 3.17 und
- in dem „Programm n-fache_Inflation_mit_Basiswahl.xls" der Algorithmus 4.19

implementiert. Die Algorithmen bestimmen jeweils zu einer gegebenen Positionsnummer dasjenige Symbol, welches an dieser Position in der Papierfaltungsfolge ω steht.

Einige dieser Programme benötigen „Analyse-Funktionen", die man unter dem Menüpunkt „Extras" und dann unter „Add-Ins…" aufrufen muss.

Literaturverzeichnis

R. Albers: Papierfalten Dissertation. Bremen 2006: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-diss000105747

R. Albers: Präsentation zum Vortrag "Papierfalten". Bremen Lehrerakademie 2008: http://www.mevis-research.de/~albers/Materialien/index.html