1 Erste Entdeckungen beim Papierfalten

Papier vorbereiten

Wir nehmen ein DIN A 4 - Papier und schneiden entlang der langen Seite fünf Streifen von ca. 2 cm Breite ab.

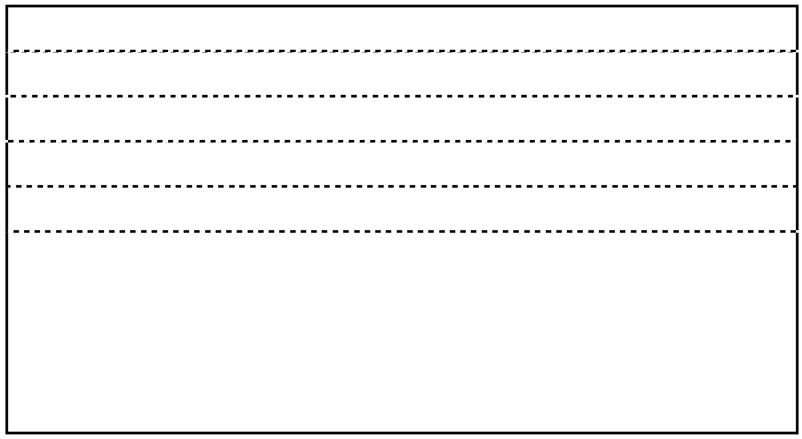

Abb. 1.1: Von der langen Seite eines DIN A 4 Blattes werden Streifen abgetrennt

Vor dem Knicken schreiben wir mit einem Stift auf das linke Ende ein „A" als Anfangsmarke, diese brauchen wir später für unsere Untersuchungen.

Abb. 1.2: Das linke Ende eines Streifens wird markiert

Der Streifen wird geknickt...

Wir falten nun die rechte Hälfte des Streifens <u>über</u> die linke. Es ist wichtig, dass der Streifen genau so geknickt wird und nicht etwa umgekehrt, also die rechte Hälfte unter die linke, was ja auch möglich wäre. Diese Variation der Untersuchung bietet eine hervorragende Möglichkeit für Übungen, die jeweils die bis dahin angestellten Überlegungen vertieft und von einer anderen Seite beleuchtet. Wir werden dieses in den Unterrichtsvorschlägen am Ende der jeweiligen Kapitel aufgreifen.

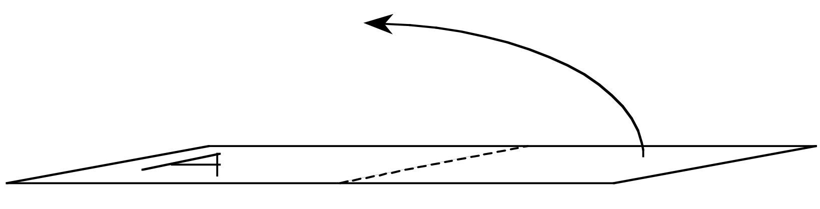

Abb. 1.3: Die rechte Hälfte des Streifens wird über die linke geknickt

...und aufgeklappt

Wir klappen nun den Streifen auseinander und haben damit die erste Stufe einer Abfolge von mehreren kleinen Faltversuchen erreicht.

Wir nehmen nun einen zweiten Streifen, markieren ihn wieder links mit einem „A“ und falten ihn so wie den ersten – rechts über links. Wir halten die beiden Enden mit der linken Hand weiter fest und falten nun die geschlossene Seite ein zweites Mal, wieder rechts über links. Wir ziehen nun die Enden des Streifens auseinander und legen die zweite Stufe des Faltexperiments auf den Tisch. Dabei soll die Anfangsmarke immer links liegen und der Streifen soll so gewendet sein, dass der erste Knick ein Talknick ist. Dann ist automatisch der letzte Knick ein Bergknick.

Analog falten wir nun den dritten Streifen drei Mal. Der auseinander gezogene Papierstreifen sollte dann wie folgt aussehen:

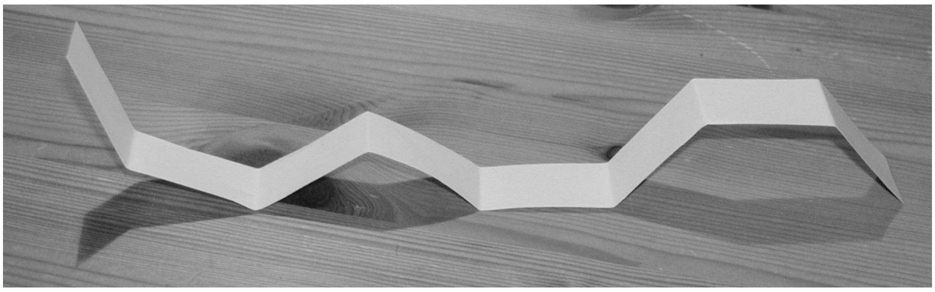

Abb. 1.4: Der dritte Papierstreifen

Iteration

Wir haben soeben das Knicken dreimal iteriert. Unter einer Iteration versteht man die Wiederholung eines Prozesses, der ein Objekt verändert und der immer wieder auf das veränderte Objekt angewendet wird.

In diesem Fall ist das Objekt der Papierstreifen. Der Prozess ist das Knicken, rechts über links. Diesen Prozess zu iterieren heißt, den Streifen einmal zu falten, den gefalteten Streifen noch einmal zu falten, diesen wieder zu falten u.s.w. Die Häufigkeit der Wiederholung zählt man als Stufe der Iteration.

Da wir die ersten drei Stufen der Iteration schon vollzogen haben, führen wir nun noch die vierte und fünfte Stufe der Iteration durch.

Anzahlen bestimmen

Die vor uns liegenden, geknickten Papierstreifen werfen einige nahe liegende mathematische Fragen auf. Wie viele Knicke hat eigentlich jeder Streifen? Das lässt sich leicht nachzählen:

Stufe der Iteration	1	2	3	4	5
Anzahl der Knicke	1	3	7	15	31

Die zugehörige Gesetzmäßigkeit ist schnell erkannt. In rekursiver Form ist es $a_{k+1} = 2a_k + 1$, oder in rein umgangssprachlicher Form: „Jede Zahl ist das Doppelte der vorhergehenden plus eins.“ Als funktionaler Zusammenhang ergibt sich, dass auf der Stufe *n* die Anzahl der Knicke $2^n - 1$ ist[1]

[1] Nach meinen eigenen Unterrichtserfahrungen sehen Schüler der Mittelstufe allerdings nur selten diesen Zusammenhang. (siehe dazu die Hinweise für eine unterrichtliche Behandlung am Ende des 2. Kapitels)

Auch die Begründung ist hier leicht zu finden und für die Herleitung der obigen Formel hilfreich: Bei jedem Faltvorgang wird der Streifen in die doppelte Anzahl von Abschnitten zerlegt. Zwischen m Abschnitten liegen aber $m - 1$ Knicke.

Berg- und Talknicke

Gerade bei den Streifen der 2. und 3. Stufe kann man deutlich erkennen, dass man zwei Sorten von Knicken unterscheiden kann: Berg- und Talknicke. Diese Begriffe stammen aus dem Origami und sind sehr nahe liegend. Allerdings muss man akzeptieren, dass hier, im Gegensatz zur Natur, zwischen zwei Tälern nicht unbedingt ein Berg liegen muss.

Natürlich taucht sofort die nahe liegende Frage auf: Wie viele Berg- und Talknicke findet man auf einer Stufe? Auch hier zählen wir dieses bei den vorliegenden Streifen nach, um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen.

Stufe der Iteration	1	2	3	4	5	n
Zahl der Talknicke	1	2	4	8	16	2^{n-1}
Zahl der Bergknicke	0	1	3	7	15	$2^{n-1}-1$

Man erkennt sofort die Zweierpotenzen bei den Talknicken und dass die Anzahl der Bergknicke eins weniger ist als die Anzahl der Talknicke.

Abstraktion in eine LR-Folge

Im nächsten Schritt wollen wir uns nicht mit reinen Zahlen begnügen, sondern die Abfolge der Knicke genauer protokollieren. So wäre für die dritte Stufe ein Aufzählung Tal-Tal-Berg-Tal-Tal-Berg-Berg ein angemessenes Protokoll. Wir beginnen dabei links bei der Anfangsmarke des Streifens und wenden den Papierstreifen so, dass der erste Knick ein Talknick ist.

Es entspricht typischen, mathematischen Vorgehensweisen, dass wir für Talknick und Bergknick einen abkürzenden Buchstaben einführen. Anstatt der nahe liegenden Buchstaben „B“ und „T“ verwenden wir für einen Talknick ein „L“ und für einen Bergknick ein „R“. Das erinnert sofort an Links und Rechts, was vollkommen richtig ist.

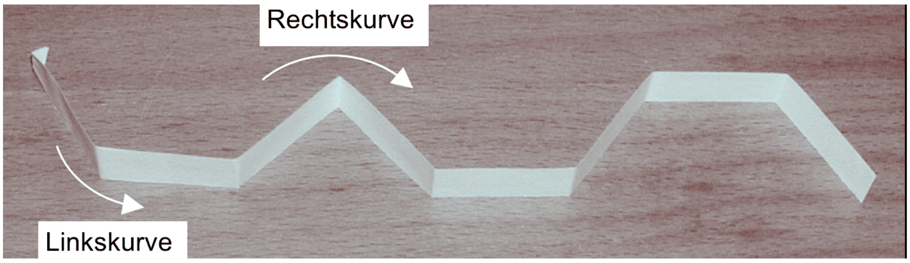

Abb. 1.5: Der auf die Kante gestellte Streifen zeigt die Kurven

Kippt man die Papierstreifen auf eine Kante, so werden aus Tälern und Bergen Links- und Rechtskurven. Hier haben wir die richtige Orientierung, wenn der Streifen mit zwei Linkskurven beginnt. Diese Betrachtung greifen wir im Kapitel 4 auf, wenn wir die gefalteten Streifen aus dem Blickwinkel der Geometrie betrachten.

Mit dieser abkürzenden Schreibweise ist die Abfolgen von Berg- und Talknicken für die ersten 5 Streifen schnell, aber vor allem übersichtlich hingeschrieben:

erster Streifen:	`L`
zweiter Streifen:	`LLR`
dritter Streifen:	`LLRLLRR`
vierter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRR`
fünfter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR`

Aus der kleinen Übersicht sehen wir deutlich, welchen Vorzug eine Abkürzung und übersichtliche Schreibweisen hat: Sie strukturiert einen Prozess und lässt uns so Regelmäßigkeiten erkennen. So sieht man z.B. sofort, dass die LR-Knickfolge für jeden Streifen so beginnt, wie die gesamte Knickfolge des vorhergehenden Streifens. Diese Gesetzmäßigkeit ist grundlegend und wird uns im gesamten nachfolgenden Kapitel beschäftigen. Daher wollen wir auch aus dem Faltprozess heraus eine Erläuterung dafür geben.

Nach dem ersten Falten haben wir einen Doppelstreifen, der derselben Prozedur unterworfen wird wie der anfänglich ungeknickte Streifen: er wird wiederholt geknickt, jeweils rechte Seite über die linke. Beim Auffalten sieht man folglich auf dem Doppelstreifen die gleiche Knickfolge wie auf dem gesamten Streifen. Nur eilen die Muster auf dem Doppelstreifen dem Gesamtstreifen um eine Stufe hinterher, denn beim Doppelstreifen haben wir ja den ersten Knick dazu „verbraucht“, den Doppelstreifen überhaupt erst herzustellen.

Abstraktion

Die Abstraktion der konkret vorliegenden Papierstreifen in Knickfolgen ist ein ganz wesentlicher Schritt. Wir lassen dabei das reale Anschauungsmaterial hinter uns und wenden uns einer abstrakten Betrachtungsweise zu. Die konkreten Eigenschaften, ggf. auch Mängel oder individuelle Unterschiede werden vernachlässigt, das für unsere Betrachtungen Wesentliche hat allein Bestand und wird so hervorgehoben. Ein vergleichbarer Abstraktionsvorgang kommt in der Schulmathematik nur sehr selten vor, beim Umgang mit Zahlen geschieht es zweimal. Zum ersten Mal, wenn ein Kind Zahlen als etwas Selbständiges begreift, wenn "Drei" eine eigene Bedeutung bekommt und nicht nur als "drei Bausteine" oder "drei Puppen" existiert. Das zweite Mal geschieht es bei der Einführung der Schulalgebra, wenn mit a, b und x gerechnet wird und dabei ein Buchstabe stellvertretend für beliebige Zahlen steht.

Auf jeder neuen, abstrakteren Stufe kann man allgemeine Gesetze entdecken, die man auf der konkreteren Stufe (beispielhaft) überprüfen kann, insbesondere, wenn man die Stufe der Abstraktion gerade erst erklommen hat. Von der Tatsache, dass $3 + 5 = 8$ ist, überzeugt sich das Kind gern noch einmal anhand von Steinchen.

Abstraktion in den Naturwissenschaften

Während dieser Schritt zu einer abstrakteren Stufe in der Mathematik nur selten vorkommt, ist ein vergleichbarer Übergang in den Naturwissenschaften häufiger, ja er macht sogar das Wesen naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung aus. Auf der Suche nach allgemeinen Gesetzen werden im Vorfeld individuelle Eigenschaften vernachlässigt und abstrakte Größen gebildet. In einer Gleichung wie etwa $F = m \cdot a$ ist es egal, ob die Masse m durch eine Ansammlung von Gestein gebildet wird oder durch ein entsprechend großes Volumen Luft.

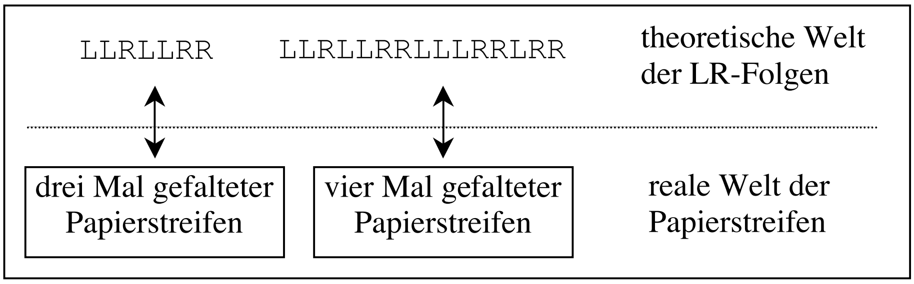

Abb. 1.6: Schematische Darstellung der beiden Abstraktionsstufen

Diese Bedeutung der Abstraktion für die Forschung, für das Gewinnen von Erkenntnis, wollen wir im weiteren Verlauf immer wieder beleuchten. In dieser Hinsicht soll das überschaubare Gebiet des Papierfaltens im Kleinen aufzeigen, mit welchen Mitteln man wissenschaftliche Erkenntnisse gewinnen kann und welche Bedeutung dabei ein Abstraktionsvorgang hat.

In den weiteren Betrachtungen werden wir uns somit in zwei „Welten" bewegen, in einer abstrakten Welt der Knickfolgen oder Symbolketten und in einer konkreten Welt der geknickten Papierstreifen, die natürlich in enger Beziehungen stehen, die aber doch verschieden sind und ihren eigenen Beitrag zur Erkenntnisgewinnung[2] leisten. Zunächst sollen durch die Abstraktion nur Eigenschaften verdeutlicht werden, die wir am konkreten Streifen gefunden haben, aber wir werden auch neue Gesetze in der abstrakten Welt entdecken, die dann an den konkreten Papierstreifen nachzuprüfen sind.

Mathematik ist das Erforschen von Mustern

Wir begegnen hier dem Grundprinzip, den die moderne Mathematik ausmacht. Wir erkennen in einem Prozess ein Muster und studieren dieses. Doch wir bleiben nicht dabei stehen, sondern erkunden auch das Umfeld, zunächst unmittelbar, dann weiter ausschweifend. Dabei stellt die mathematische Herangehensweise uns einige bewährte Grundprinzipien bereit. Das Abstrahieren ist einer dieser Schritte. Dabei erzeugt das Muster der realen Papierstreifen ein eng verwandtes Muster in den abstrakten Zeichenfolgen.

Für eine formale Beschreibung der LR-Folgen wollen wir auf bereits bestehende Begriffsbildungen zurückgreifen. Dabei bieten sich die einer formalen Sprache an, wie sie in der theoretischen Informatik verwendet werden.

Definitionen

1.1 Eine endliche Menge $\{a_1,...,a_m\}$ von Symbolen heißt **Alphabet** $\boldsymbol{A}$.

Für die Notation der Knickfolgen beim Papierfalten genügt ein Alphabet A mit nur zwei Symbolen, „L" und „R".

1.2 Die Aneinanderreihung von beliebig vielen Zeichen aus einem Alphabet heißt **Wort**.

1.3 **Ø** ist das leere Wort, das Wort, das keine Symbole enthält.

1.4 $\boldsymbol{A^*}$ ist die Menge aller Wörter mit Symbolen aus dem Alphabet A.

---

[2] Eine sehr schöne Darstellung zur Erkenntnis findet man in G.Vollmer [S06]

1.5 $|\boldsymbol{w}|$ bezeichnet die Länge des Wortes *w*, womit die Anzahl der Symbole im Wort *w* gemeint ist. Ø hat die Länge 0.

1.6 Sind w_1 und w_2 Wörter, so bedeutet $\boldsymbol{w_1 w_2}$ die Komposition dieser beiden Wörter zu einem Wort.