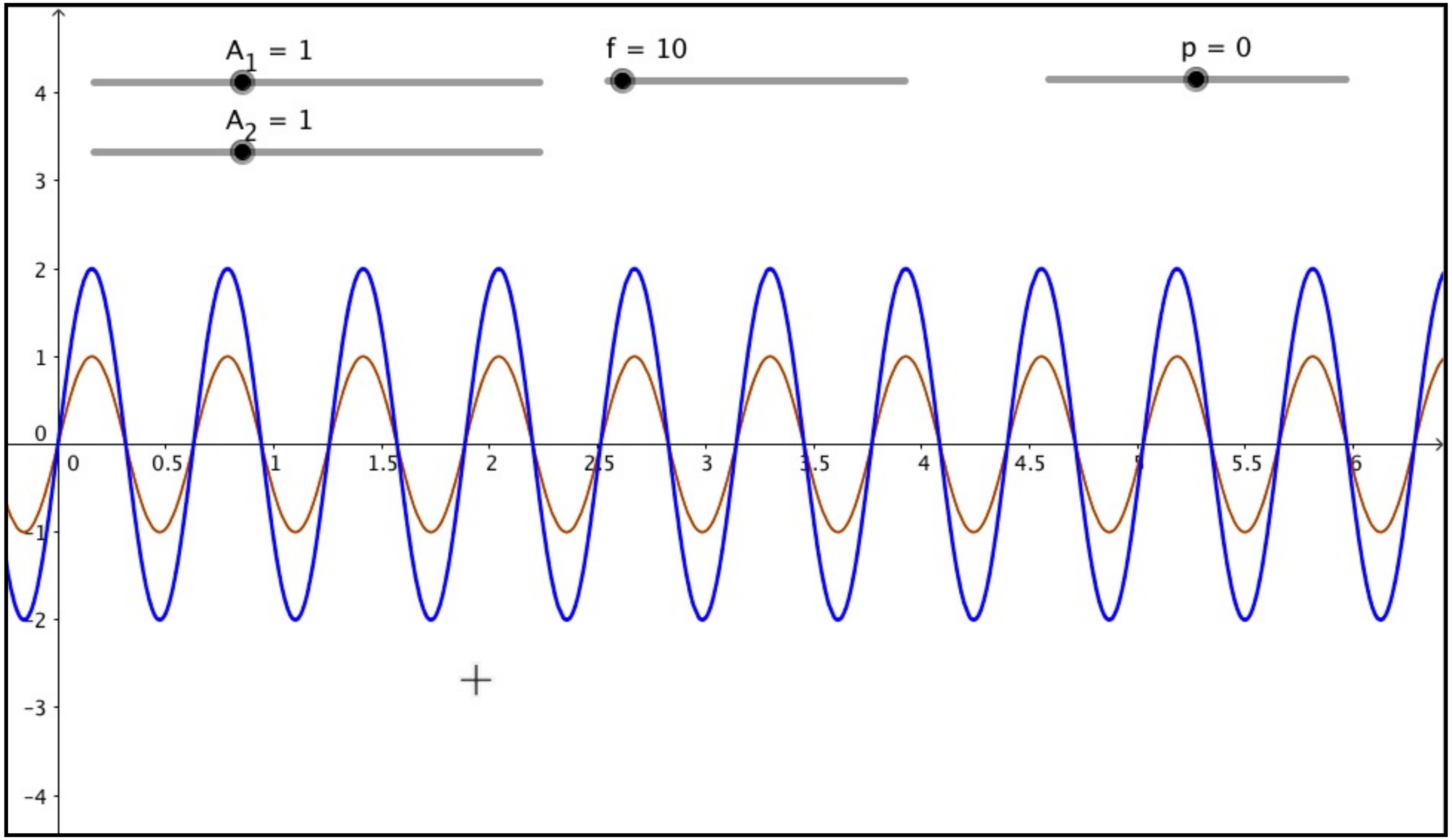
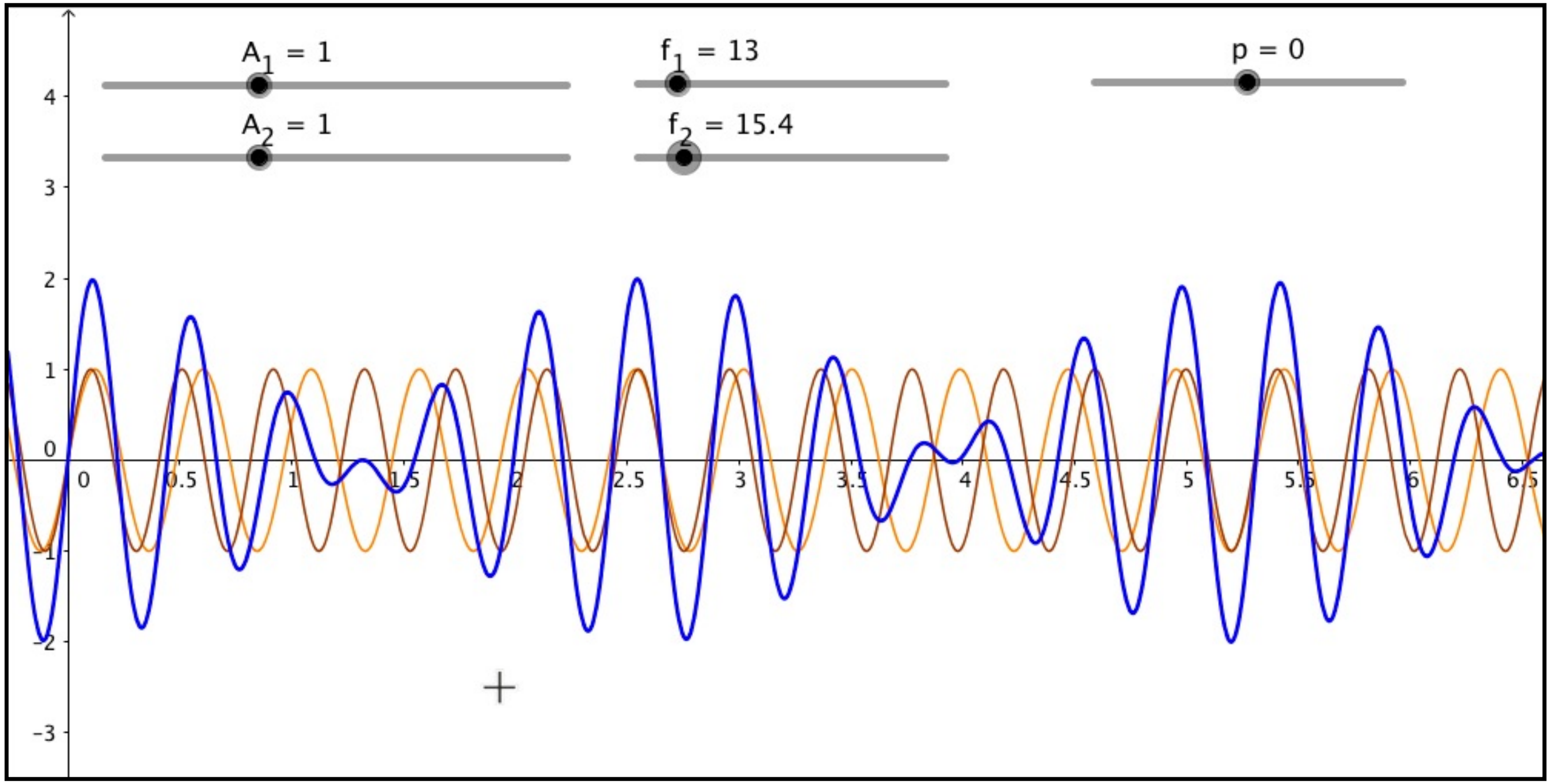
Der Zusammenklang von Tönen

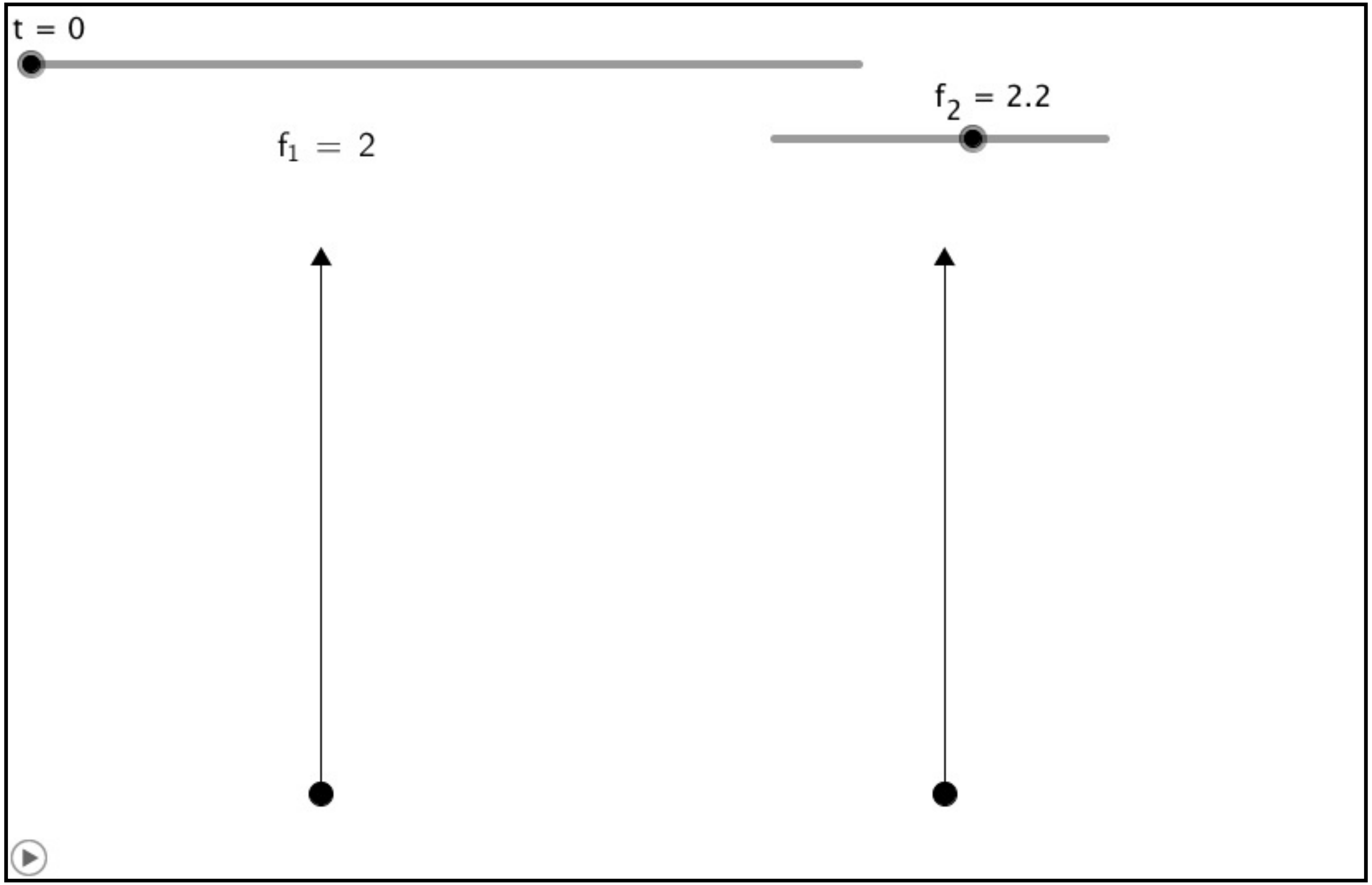
Zwei Töne mit gleicher Frequenz



Zwei Töne mit verschiedener Frequenz
mathematisch 1

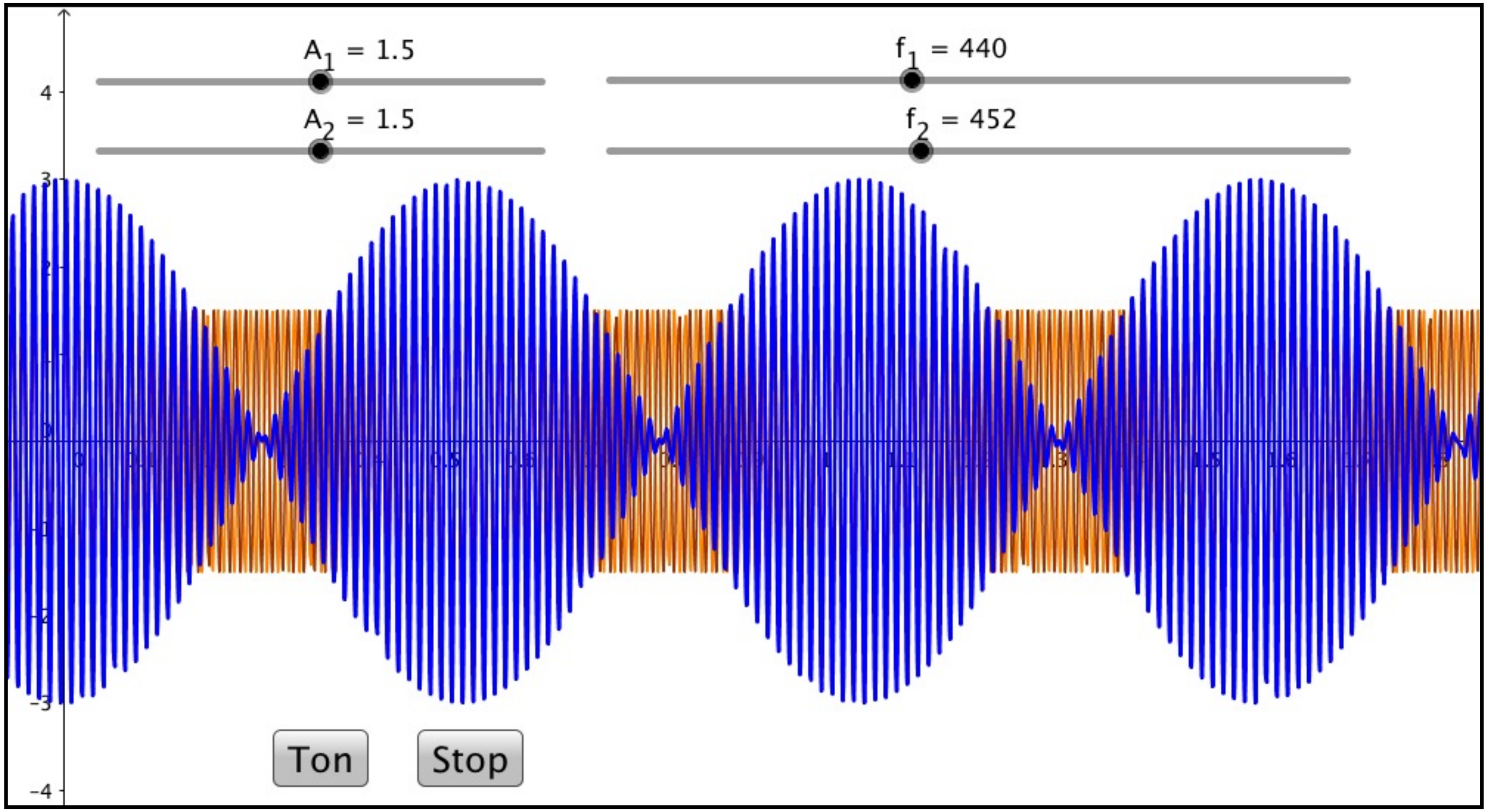


Zwei Pendel mit verschiedener Frequenz



Zwei Töne mit verschiedener Frequenz

akustisch



F4

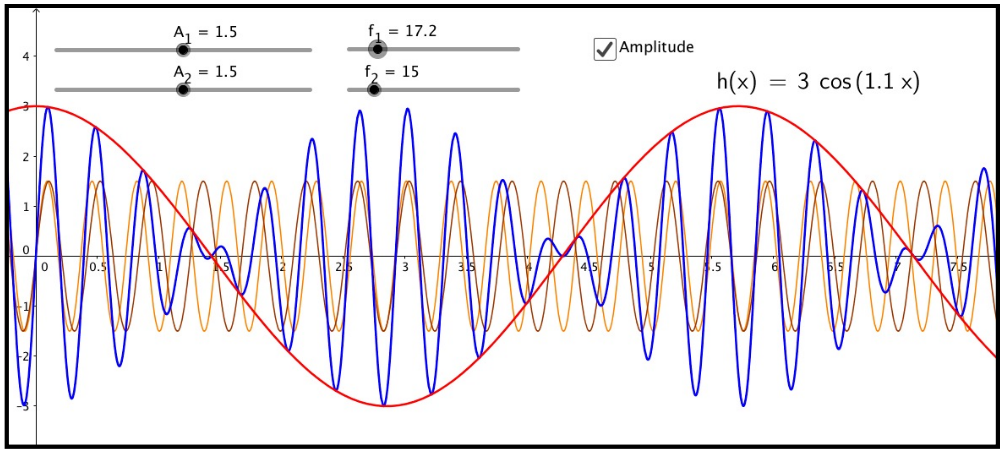
Zwei Töne mit verschiedener Frequenz
mathematisch 2

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$A\sin\left(f_1\cdot 2\pi x\right) + A\sin\left(f_2\cdot 2\pi x\right) = \boxed{2A\cdot\cos\left(\left|\frac{f_1-f_2}{2}\right|2\pi x\right)}\cdot\sin\left(\boxed{\frac{f_1+f_2}{2}}2\pi x\right)$$

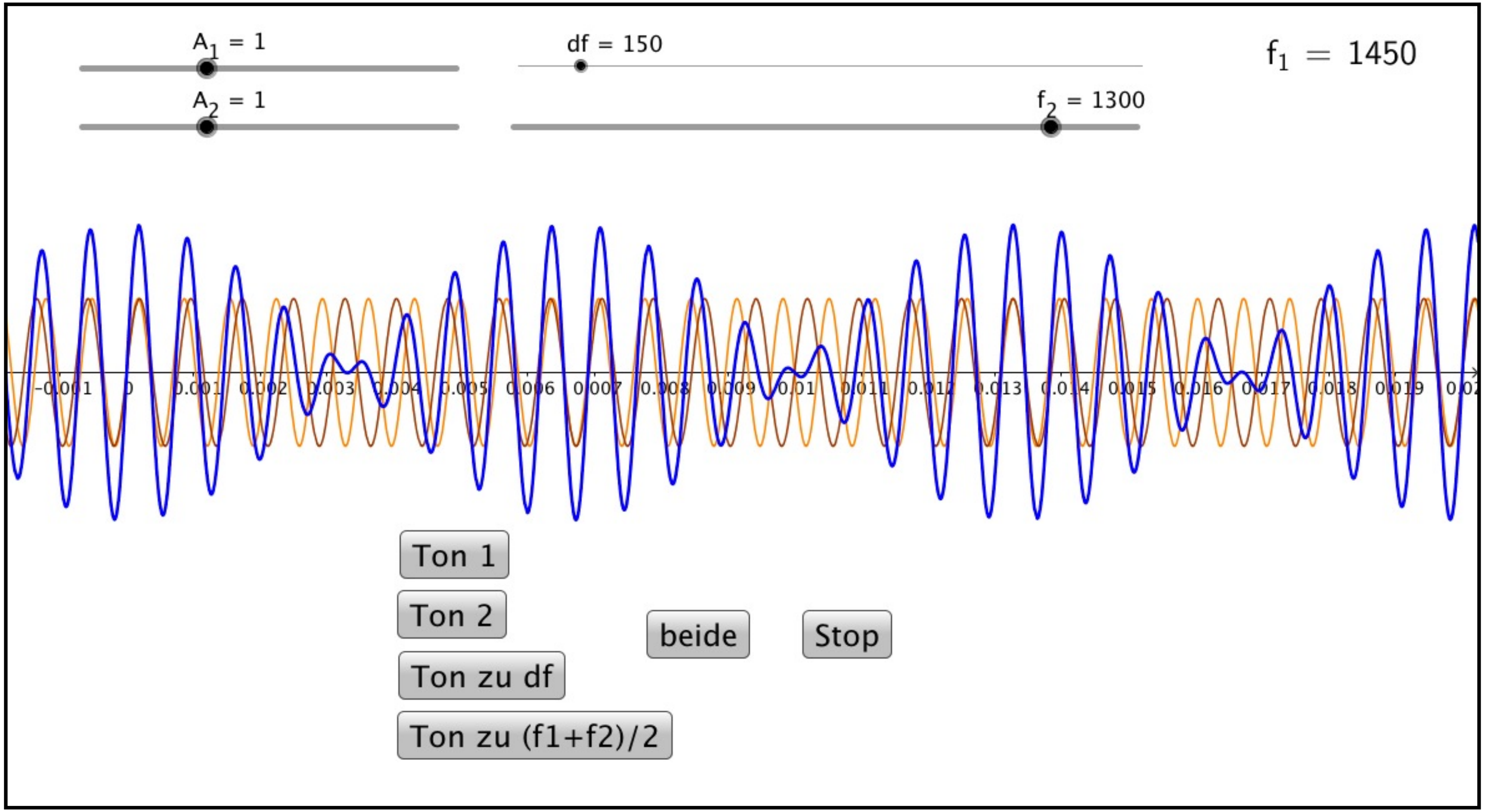
die schwankende Amplitude

die Frequenz des Mischtons



F5

Zwei Töne mit verschiedener Frequenz
akustisch



Zwei Töne mit verschiedener Frequenz

Spezielle Intervalle

Oktave: Frequenzverhältnis $\frac{2}{1}$

Quinte: Frequenzverhältnis $\frac{3}{2}$

Quarte: Frequenzverhältnis $\frac{4}{3}$ Erläuterung: $1 \xrightarrow{:\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{3}$

oder: erst Quinte, dann Quarte ergibt eine Oktave

große Terz: Frequenzverhältnis $\frac{5}{4}$ Abgeleitet vom 4. Oberton

In der pythagoreischen Stimmung hat ein Ganzton das Frequenzverhältnis $\frac{9}{8}$

Also ergeben zwei Ganztöne das Frequenzverhältnis $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$

$\frac{5}{4} \overset{16}{=\!=\!=} \frac{80}{64}$ Also ist die pythagoreische Terz nicht eine reine Terz, der Unterschied heißt syntonisches Komma.

Zwei Töne mit verschiedener Frequenz

Spezielle Intervalle - Oktave

Zahlenbeispiel: $f_1 = 400 \text{ Hz} \qquad f_2 = 800 \text{ Hz}$

Dann sind $|f_1 - f_2| = 400 \text{ Hz}$ Das ist der tiefere Ausgangston bzw. eine Oktave tiefer als der höhere.

und $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = 600 \text{ Hz}$ Das ist das 1,5-fache von f_1, also die Quinte zum tieferen Ton.

allgemein: $f_1 \qquad f_2 = 2 \cdot f_1$

F6

Dann sind $|f_1 - f_2| = |f_1 - 2f_1| = f_1$ Das ist der tiefere Ausgangston bzw. eine Oktave tiefer als der höhere.

und $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = \dfrac{f_1 + 2f_1}{2} = \dfrac{3}{2} f_1$ Das ist das 1,5-fache von f_1, also die Quinte zum tieferen Ton.

Zwei Töne mit verschiedener Frequenz

Spezielle Intervalle - Quinte

Zahlenbeispiel: $f_1 = 400 \text{ Hz}$ $\quad f_2 = 600 \text{ Hz}$

Dann sind $|f_1 - f_2| = 200 \text{ Hz}$

Das ist eine Oktave tiefer als der tiefere Ton und eine Oktave und eine Quinte tiefer als der höhere Ton.

und $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = 500 \text{ Hz}$

Das ist das 5/4-fache von f_1, also die Terz zum tieferen Ton.

allgemein: f_1 $\quad f_2 = \dfrac{3}{2} \cdot f_1$

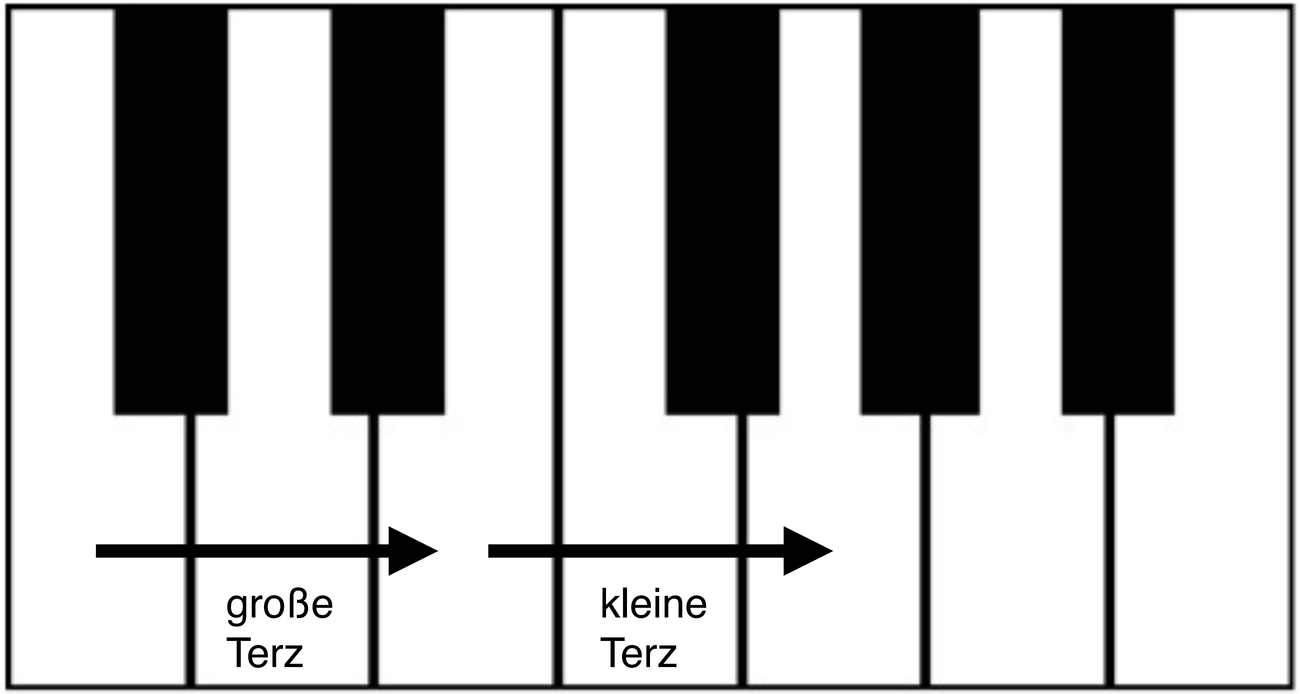
Dann sind $|f_1 - f_2| = \left| f_1 - \dfrac{3}{2} f_1 \right| = \dfrac{1}{2} f_1$

Das ist eine Oktave tiefer als der tiefere Ton und eine Oktave und eine Quinte tiefer als der höhere Ton.

und $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = \dfrac{f_1 + \frac{3}{2} f_1}{2} = \dfrac{5}{4} f_1$

Das ist die Terz zum tieferen Ton und die Terz vermindert um eine Quinte zum höheren Ton.

Der Dreiklang



$\cdot\frac{5}{4}$ $\cdot\frac{6}{5}$

Quinte

$\cdot\frac{3}{2}$

Der Dreiklang

	f_1	f_1	Differenz	Mittelwert
große Terz	$1 = \frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{8}$
kleine Terz	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{8}$
Quinte	$1 = \frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

Analyse und Synthese von Tönen (Signalen)

Jedes periodische Signal kann zerlegt (rekonstruiert) werden in die Summe von Sinus- und Cosinussignalen, deren Frequenzen Vielfache der Grundfrequenz sind.
(Fourieranalyse, Joseph Fourier 1768 - 1830)

Gegeben ist ein Signal mit der Frequenz f_1.
Das ist für die Analyse die Grundfrequenz.
Alle weiteren Frequenzen sind Vielfache dieser Grundfrequenz („Obertöne“).

$$
\begin{aligned}
s(t) \approx\ & A_1 \sin\left(f_1 2\pi t\right) + B_1 \cos\left(f_1 2\pi t\right) \\
& + A_2 \sin\left(2 f_1 2\pi t\right) + B_2 \cos\left(2 f_1 2\pi t\right) \\
& + A_3 \sin\left(3 f_1 2\pi t\right) + B_3 \cos\left(3 f_1 2\pi t\right) \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

F7

Analyse und Synthese von Tönen (Signalen)

Problem:
Wie ermittelt man die optimalen Amplituden A_1, A_2, A_3, … und
B_0, B_1, B_2, B_3,…?

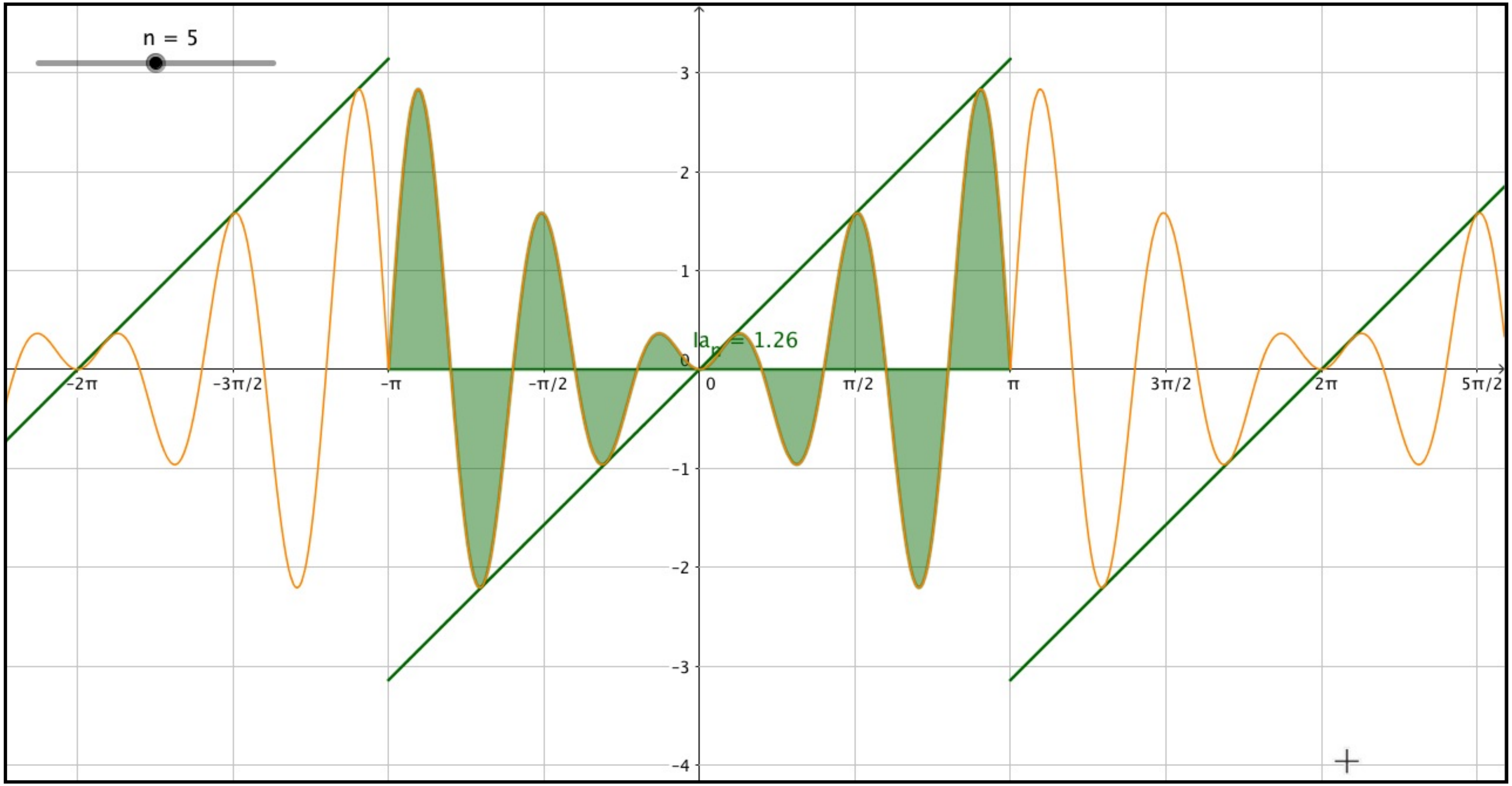
Hat das Signal die Periode 2π, so erhält man mit

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \sin(k \cdot t)\ dt$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cos(k \cdot t)\ dt \qquad B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t)\ dt$$

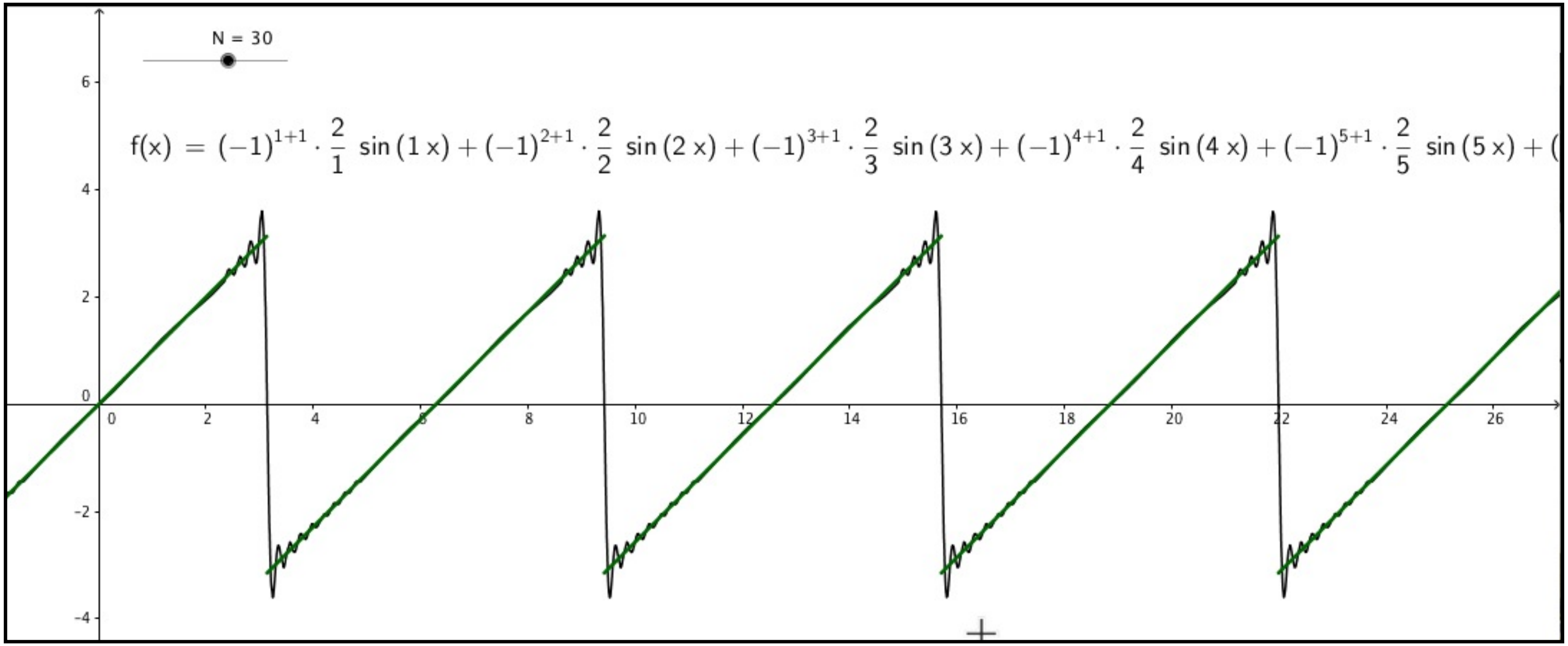
die Koeffizienten.

Schnelllehrgang in Integralrechnung



F8 F9

Die Lösung des Problems



F10