Nachtrag

Alternatives Buch zum Satz von Fermat
1999

bei amazon nur noch gebraucht

Unendliche (Zahlen-) Mengen

Wiederholung Steuern

Bei einem Einkommen von ∞ € und einem Steuersatz von 33% müssen Sie ∞ € Steuern zahlen.

Dann werden von ∞ € Bruttoeinkommen ∞ € Steuern abgezogen. Was bleibt dann übrig?

Antwort 1: ∞ € – ∞ €, das ist die Rechnung Gleiches minus Gleiches und das ergibt Null

Antwort 2: Bei einem Steuersatz von 33% bleiben als Nettoeinkommen 67% vom Bruttoeinkommen. Das ist bei einem Einkommen von ∞ € auch wieder ∞ €.

Also gilt hier: ∞ € – ∞ € = ∞ €

Mathematisch allgemein

Was ist $\infty - \infty$?

Die Frage ist zu unbestimmt.
Wir müssen präzisieren, wie Unendlich realisiert werden soll.

1. Möglichkeit
Ein Rechenterm mit einer Variablen, in die Zahlen so eingesetzt werden, dass das Ergebnis im Grenzprozess unendlich groß wird.

Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Das Problem $\infty - \infty$ erhält man dann, wenn zwei (verschiedene) Rechenterme gleichzeitig unendlich groß werden und voneinander abgezogen werden.

Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n+4$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2-(n+4)\right)=?$

Rechnung: $n^2-(n+4)=n^2-n-4=n\left(n-1\right)-4$

Ergebnis: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(n-1\right)-4\right)=\infty$

Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (n-\dfrac{n^2+4n}{n})=?$

Rechnung: $n-\dfrac{n^2+4n}{n}=\dfrac{n^2-n^2-4n}{n}=\dfrac{-4n}{n}=-4$

Ergebnis: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-4\right)=-4$

Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\dfrac{n^2+4}{n}\right)=?$

Rechnung: $n-\dfrac{n^2+4}{n}=\dfrac{n^2-n^2-4}{n}=\dfrac{-4}{n}$

Ergebnis: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-4}{n}\right)=0$

Die Rechnung $\infty - \infty$ ist unbestimmt und kann prinzipiell jeden Wert annehmen.

Was geht schneller gegen Unendlich?

Für das Berechnen von Grenzwerten gegen Unendlich sind Kenntnisse hilfreich, welche Rechenterme schneller (stärker) gegen Unendlich gehen als andere.

Für den Vergleich nimmt man üblicherweise nicht die Differenz sondern den Quotienten.

$$\frac{\text{Zählerterm}}{\text{Nennerterm}} \to \begin{cases} \text{unendlich - der Zählerterm wächst stärker} \\ \text{Zahl} \neq 0 \text{ - beide Terme wachsen gleich stark} \\ 0 \text{ - der Nennerterm wächst stärker} \end{cases}$$

Was geht schneller gegen Unendlich?

Potenzen: n^a und n^b

Der Term mit dem höheren Exponenten geht schneller gegen Unendlich, was man durch einfaches Kürzen sofort sieht.

Beispiele:

n^5 und n^2

$$\frac{n^5}{n^2} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cancel{n \cdot n}}{\cancel{n \cdot n}} = n^3 \to \infty$$ für n gegen unendlich

n^3 und n^4

$$\frac{n^3}{n^4} = \frac{\cancel{n \cdot n \cdot n}}{n \cdot \cancel{n \cdot n \cdot n}} = \frac{1}{n} \to 0$$ für n gegen unendlich

Was geht schneller gegen Unendlich?

Exponentialfunktionen: $a^n \quad a>1$

Die Exponentialfunktionen wachsen schneller als jede Potenz.

Beispiele:

2^n und n

n	1	2	3	4	5	6	7
2^n	2	4	8	16	32	64	128

$1{,}2^n$ und n

n	1	2	3	5	10	15	20
$1{,}2^n$	1,2	1,44	1,73	2,49	6,19	15,4	38,3

allgemeine Argumentation:

a) additiv n -> n+1 wird konstant 1 addiert

$$1{,}2^n \to 1{,}2^{n+1} = 1{,}2 \cdot 1{,}2^n = 1{,}2^n + 0{,}2 \cdot 1{,}2^n$$

Es wird also immer das 0,2-fache des erreichten Bestandes addiert. Das wird aber beständig größer.

Was geht schneller gegen Unendlich?

Exponentialfunktionen: $a^n \quad a>1$

Die Exponentialfunktionen wachsen schneller als jede Potenz.

allgemeine Argumentation:
b) multiplikativ $1{,}2^n \to 1{,}2^{n+1} = 1{,}2 \cdot 1{,}2^n$

Es wird konstant mit 1,2 multipliziert.

$$n \to n+1 = n \cdot \frac{n+1}{n} = n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Es wird fortlaufend mit $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ multipliziert. Dieser Faktor wird mit wachsendem n immer kleiner und geht gegen 1.

Also: Jede Exponentialfunktion wächst schneller als n.

Was geht schneller gegen Unendlich?

Exponentialfunktionen: $a^n \quad a > 1$

Die Exponentialfunktionen wachsen schneller als jede Potenz.

2^n und n^4

n	1	2	3	4	5	10	15
n^4	1	16	81	256	625	10000	50625
2^n	2	4	8	16	32	1024	32768

allgemeine Argumentation:

$$2^n = 2^{4 \cdot \frac{n}{4}} = \left(2^{\frac{n}{4}} \right)^4 = \left(\sqrt[4]{2}^{\,n} \right)^4 \approx \left(1{,}19^n \right)^4$$

Gerade wurde gezeigt,
dass $1{,}19^n$ letztlich schneller wächst als n.

Also wächst $\left(1{,}19^n\right)^4 \approx 2^n$ schneller als n^4.

Was geht schneller gegen Unendlich?

$n!$ wächst schneller als jede Exponentialfunktion.

Beispiel:

n	1	2	3	4	5	10	12
5^n	5	25	125	625	3125	9765625	244140625
n!	1	2	6	24	120	3628800	479001600

n^n wächst schneller als $n!$.

n	1	2	3	4	5
n!	1	2	6	24	120
n^n	1	4	27	256	3125

Mathematisch allgemein

Was ist $\infty - \infty$?

Die Frage ist zu unbestimmt.
Wir müssen präzisieren, wie Unendlich realisiert werden soll.

2. Möglichkeit
„Unendlich“ ist eine Menge mit unendlich vielen Elementen, vorzugsweise die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

weitere Beispiele: Die Menge der geraden Zahlen, der Brüche

Das Problem $\infty - \infty$ erhält man dann, wenn man zwei unendliche Mengen Eins-zu-Eins vergleicht und testet, ob Elemente dabei übrig bleiben.

Hilberts Hotel

Den elementeweisen Vergleich mit den natürlichen Zahlen übersetzt man anschaulich in eine Hotel mit unendlich vielen Einzelzimmern, die durchnummeriert sind.
Die zweite (unendliche) Menge sind dann die Gäste. Man fragt, ob alle Gäste in das Hotel passen oder ob die Gäste alle Zimmer belegen.

Für eine mathematisch genaue Lösung muss man Gleichungen angeben, die

a) für eine vorgegebene Zimmernummer berechnen, welche Zahl als Gast darin untergebracht ist
b) für eine vorgegebene Gastnummer berechnen, in welchem Zimmer sie untergebracht ist.

Sind alle Gäste untergebracht und ist das Hotel vollständig belegt, so heißt die Menge der Gäste „abzählbar (unendlich)“

Hilberts Hotel

1. Problem

Es kommt ein Bus mit unendlich vielen Gästen.

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

In Zimmer Nummer z wohnt Gast Nummer g.

$$z = g$$

Hilberts Hotel

2. Problem

Das Hotel ist durch den Bus mit den unendlich vielen Gästen belegt. Nun kommt noch ein Kleinbus mit 8 Gästen.
$\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Zimmer z gegeben, Gast g gesucht.

$$g = z - 8$$

Gast g gegeben, Zimmer z gesucht.

$$z = g + 8$$

Die natürlichen Zahlen, vereinigt mit einer endlichen Menge, sind abzählbar unendlich.

Hilberts Hotel

3. Problem

Der Bus mit den unendlich vielen Gästen wird aufgeteilt. Die ungeraden Zahlen steigen in einen weiteren Bus. Der Bus mit den geraden Zahlen kommt an Hilberts Hotel. Wird es voll werden?

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40

Zimmer z gegeben, Gast g gesucht.

$$g = 2 \cdot z$$

Gast g gegeben, Zimmer z gesucht.

$$z = g:2$$

In jedem Zimmer wohnt ein Gast. Das Hotel ist voll belegt.

Die geraden Zahlen sind abzählbar unendlich.
Gerade Zahlen und natürliche Zahlen sind gleich mächtig.

Hilberts Hotel

3. Problem

Der Bus mit den unendlich vielen Gästen wird aufgeteilt. Die ungeraden Zahlen steigen in einen weiteren Bus. Der Bus mit den geraden Zahlen kommt an Hilberts Hotel. Wird es voll werden?

Ein alternativer Ansatz ist denkbar:

Gast g kommt in Zimmer z mit z=g, also Gast 2 in Zimmer 2, Gast 4 in Zimmer 4, u.s.w. Folglich bliebe das halbe Hotel leer.

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20

Dieser Ansatz eröffnet dann aber auch andere Zimmerbelegungen:

Gast g kommt in Zimmer z mit z=2·g, also Gast 2 in Zimmer 4, Gast 4 in Zimmer 8, u.s.w. Hierbei kommen dann auf ein belegtes Zimmer drei leere, das Hotel wäre nur zu einem Viertel belegt.

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast				2				4				6				8				10

Hilberts Hotel

Hier führt die Analogie in die Irre

Abstrakt mathematisch geht es um die Frage, ob sich die untersuchte Menge (Gäste) durchnummerieren lässt. Das erste Element bekommt **immer** die Nummer 1, das zweite **immer** die 2, u.s.w.

Ergibt sich dabei eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, so ist die untersuchte Menge „abzählbar unendlich“.

Die Menge der geraden Zahlen ist in diesem Sinne abzählbar unendlich und hat damit die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen.

Hilberts Hotel

4. Problem

Es kommen zwei Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

Bus 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …

Bus 2: 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, …

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gast	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	8	-8	9	-9	10

Zimmer z gegeben, Gast g gesucht.

Ist z gerade: $g = z:2$ Ist z ungerade: $g = -(z-1):2$

Gast g gegeben, Zimmer z gesucht.

Ist g positiv: $z = 2\cdot g$ Ist g nicht positiv: $z = -g\cdot 2 + 1$

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ sind abzählbar.

Die ganzen Zahlen und die natürlichen Zahlen sind gleich mächtig.

Hilberts Hotel

5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

				15	21	28	36					
(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	(1;7)	(1;8)	(1;9)	(1;10)	(1;11)	(1;12)	(1;13)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)	(2;7)	(2;8)	(2;9)	(2;10)	(2;11)	(2;12)	(2;13)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)	(3;7)	(3;8)	(3;9)	(3;10)	(3;11)	(3;12)	(3;13)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)	(4;7)	(4;8)	(4;9)	(4;10)	(4;11)	(4;12)	(4;13)
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)	(5;7)	(5;8)	(5;9)	(5;10)	(5;11)	(5;12)	(5;13)
	17	24	32	41								

Die Zimmerverteilung geschieht mit dem Diagonalverfahren.

Zimmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gast	(1;1)	(2;1)	(1;2)	(3;1)	(2;2)	(1;3)	(4;1)	(3;2)	(2;3)	(1;4)	(5;1)	(4;2)	(3;3)

Hilberts Hotel

5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

Zimm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Gast	(1;1)	(2;1)	(1;2)	(3;1)	(2;2)	(1;3)	(4;1)	(3;2)	(2;3)	(1;4)	(5;1)	(4;2)	(3;3)	(2;4)	(1;5)	(6;1)	(5;2)	(4;3)

Gast (b;g) gegeben, Zimmer z gesucht.

$$z = \frac{(b+g-1)(b+g)}{2} - (b-1)$$

Zimmer z gegeben, Gast (b;g) gesucht.

$$\text{Diagonalnummer } n = aufger.\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{8z+1}-1\right]\right)$$

$$b = \frac{n(n+1)}{2} - z + 1$$

$$g = n+1-b$$

Jedem Gast kann also umkehrbar eindeutig ein Zimmer zugewiesen werden.

Hilberts Hotel

5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

				15	21	28	36					
(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	(1;7)	(1;8)	(1;9)	(1;10)	(1;11)	(1;12)	(1;13)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)	(2;7)	(2;8)	(2;9)	(2;10)	(2;11)	(2;12)	(2;13)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)	(3;7)	(3;8)	(3;9)	(3;10)	(3;11)	(3;12)	(3;13)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)	(4;7)	(4;8)	(4;9)	(4;10)	(4;11)	(4;12)	(4;13)
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)	(5;7)	(5;8)	(5;9)	(5;10)	(5;11)	(5;12)	(5;13)
	17	24	32	41								

Mathematisch:

Die Menge der Gäste kann identifiziert werden mit der Menge der positiven Brüche. Diese Menge ist abzählbar.

Die Menge der Brüche (positiv und negativ) und die Menge der natürlichen Zahlen ist gleich mächtig.

Zusammenfassung

Die Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

$\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = die Menge aller Brüche

sind alle abzählbar unendlich.

Das bedeutet auch, dass sie alle die gleiche Mächtigkeit haben.

Gibt es neben dem „abzählbar unendlich“ noch eine andere Art von Unendlich?

JA!

Verschiedene Arten von Unendlich

Alle möglichen Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind mehr als abzählbar.

Beweis (Georg Cantor 1877)

Angenommen, es gäbe eine Liste aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1

0,123011865…
0,156237065…
0,023327865…
0,120778865…
0,124357805…
0,123786025…
0,602937865…
…

Nun konstruieren wir damit eine neue Zahl, die mit Sicherheit noch nicht in der Liste ist.

Wir beginnen mit `0,` .

Ist die erste Stelle nach dem Komma in der ersten Zahl keine 5, so setzen wir eine 5 als erste Stelle, ansonsten eine 4. -> `0,5`

Ebenso entscheidet die zweite Stelle in der zweiten Zahl, ob wir an die zweite Stelle eine 5 oder 4 setzen. -> `0,54`

Dieses Verfahren wird unendlich fortgesetzt und somit eine Dezimalzahl konstruiert, die noch nicht in der Liste ist.

Verschiedene Arten von Unendlich

Also:

Gäbe es eine abzählbare Liste aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, dann wäre sie unvollständig.

Also kann man die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 nicht in eine Liste schreiben. Es sind mehr als abzählbar unendlich viele.

(Sie passen nicht alle in Hilberts Hotel.)

Das ist die Mächtigkeit der reellen Zahlen (aller Zahlen auf der Zahlengerade).

Eine neue, größere Mächtigkeit erhält man, wenn man alle möglichen Mengen betrachtet, die man aus reellen Zahlen bilden kann. (Potenzmenge)

natürliche Zahlen $\xrightarrow{\textbf{mehr}}$ reellen Zahlen $\xrightarrow{\textbf{mehr}}$ Potenzmenge der reellen Zahlen

Verschiedene Arten von Unendlich

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{natürliche Zahlen} & \xrightarrow{\textbf{mehr}} & \text{reellen Zahlen} & \xrightarrow{\textbf{mehr}} & \text{Potenzmenge der reellen Zahlen} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\aleph_0 & & \aleph_1 & & \aleph_2
\end{array}
$$

M ä c h t i g k e i t

Diese Kette kann beliebig fortgesetzt werden.

Daher gibt es unendlich viele Stufen der Mächtigkeit unendlicher Mengen.

Verschiedene Arten von Unendlich

natürliche Zahlen $\xrightarrow{\textbf{mehr}}$ reellen Zahlen

M ä c h t i g k e i t

$\aleph_0$ $\qquad\qquad$ $\aleph_1$

Gibt es Mengen, deren Mächtigkeit zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ liegt?

Die Antwort ist sehr schwierig:

Kontinuumshypothese: Es gibt keine Mächtigkeit zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$.

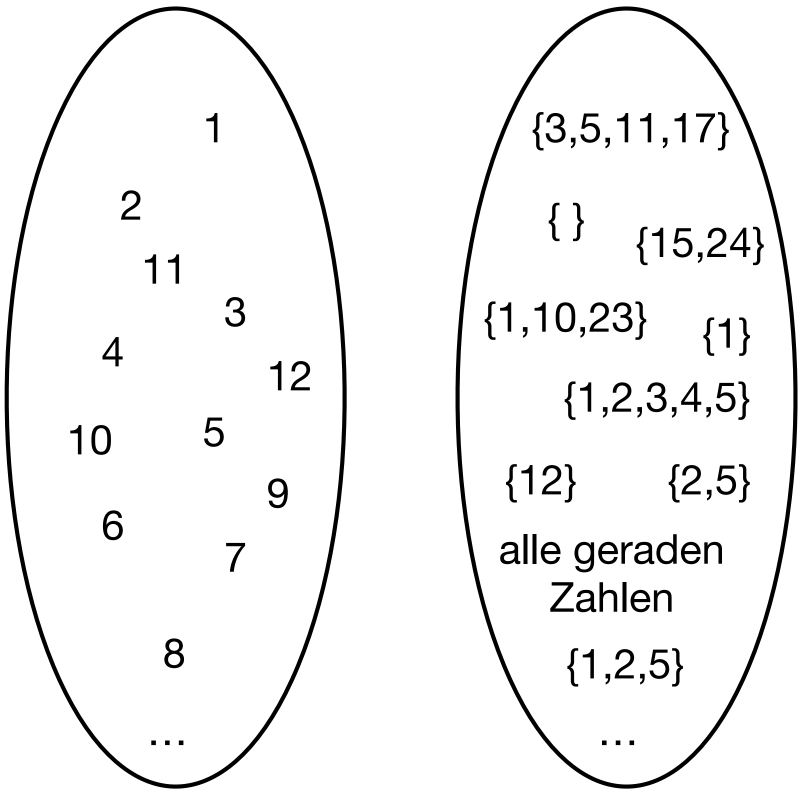
Man kann beweisen, dass man auf der Basis der Mengenlehre die Kontinuumshypothese weder beweisen noch widerlegen kann.

Paul Cohen, 1966 Fields-Medaille

Ausgangsmenge – Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge hat immer eine größere Mächtigkeit als die Ausgangsmenge. (G. Cantor 1890)

Beweis illustriert am Beispiel der natürlichen Zahlen.



natürliche Zahlen

Potenzmenge der natürlichen Zahlen

Angenommen, beide hätten die gleiche Mächtigkeit. Dann gibt es zu jeder Zahl genau eine Menge.

Wir können dann wieder die Mengen der Potenzmenge in eine unendliche Liste schreiben.

Ausgangsmenge – Potenzmenge

Wir können dann wieder die Mengen der Potenzmenge in eine unendliche Liste schreiben.

Nun gibt es links Zahlen, die in ihrer zugeordneten Menge rechts <u>nicht</u> enthalten sind.

Diese Zahlen fassen wir zu einer Menge M zusammen.

M ist die Menge aller Zahlen, die in ihrer zugeordneten Menge nicht enthalten sind.

M ist eine Menge von natürlichen Zahlen, kommt also in der Liste vor.

1 <—> {2,3,8}
2 <—> {1,2,3,8}
3 <—> {2,5,8}
4 <—> {2,3,4,5,6}
5 <—> {1,5,11,22,83}
6 <—> { }
7 <—> {1,2,55}
8 <—> {2,4,8}
9 <—> gerade Zahlen
10 <—> {11}
...
m <—> M

M ist folglich eine natürliche Zahl m zugeordnet. Ist m in M enthalten?

Ja, m ist in M. Also ist m in der zugeordneten Menge nicht enthalten. Das ist aber M. Also ist m in M nicht enthalten.

Nein, m ist nicht in M. Also ist m in der zugeordneten Menge enthalten. Das ist aber M. Also ist m in M enthalten.