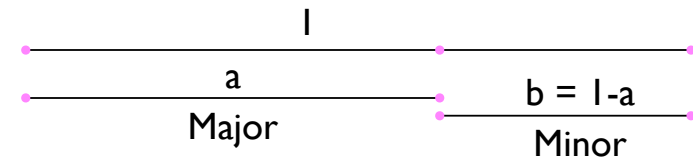


Üben mit dem goldenen Schnitt

Der goldene Schnitt



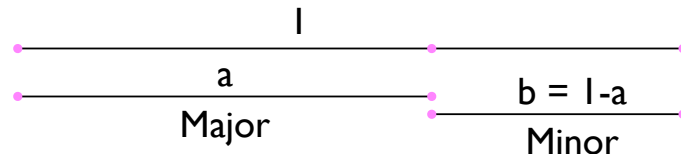
Definition: $\frac{\text{Major}}{\text{Ganz}} = \frac{\text{Minor}}{\text{Major}} = \varphi$

$$\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a} \Rightarrow a^2 = 1-a \quad \text{Lösung: } \varphi^2 = 1-\varphi$$

$$\text{mit } \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

2

Der goldene Schnitt



Die Gesamtstrecke ist gegeben, der Major ist gesucht:

Lösung: Major = Gesamtstrecke $\cdot \varphi$ „goldener Schnitt“

Umkehrung

Der Major ist gegeben, die Gesamtstrecke ist gesucht:

Lösung: Gesamtstrecke = Major $\cdot \frac{1}{\varphi}$

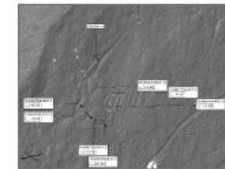
mit $\frac{1}{\varphi} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$ „goldene Verlängerung“

3

Der goldene Schnitt

5. Teil: +++ Goldenen Schnitt nutzten Künstler schon vor 15.000 Jahren +++

FOTOSTRECKE



Steinzeitkunst: Schön graviert

4 Bilder

Vor 15.000 Jahren ritzen Künstler Tierfiguren in den Schiefer bei Gönnersdorf am Rand der Eifel. Einige waren dabei offenbar begabter als andere - ihre Gravuren können wir auch nach heutigem Empfinden noch als schön bezeichnen. Ihr Trick: Sie legten die Figuren nach dem goldenen Schnitt an: dem Teilungsverhältnis einer Fläche, bei dem das Verhältnis des Ganzen zu seinem größeren Teil dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil entspricht. Dieses später in der Kunst des Spätmittelalters und der Renaissance oft angewendete Stilmittel wurde erstmals von dem griechischen Mathematiker Euklid beschrieben. In Gönnersdorf war es anscheinend schon lange vorher bekannt.

www.siedel.de/wissenschaft

Der goldene Schnitt

Definitionen

„goldener Schnitt“ $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ $\varphi^2 = 1 - \varphi$

„goldene Verlängerung“ $\frac{1}{\varphi} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$ $\Phi^2 = \Phi + 1$

$$\varphi^2 = 1 - \varphi \quad | \text{Sub: } \varphi = \frac{1}{\Phi} \quad \Phi^2 = \Phi + 1 \quad | \text{Sub: } \Phi = \frac{1}{\varphi}$$

$$\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\Phi} \quad | \cdot \Phi^2 \quad \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\varphi} + 1 \quad | \cdot \varphi^2$$

$$1 = \Phi^2 - \Phi$$

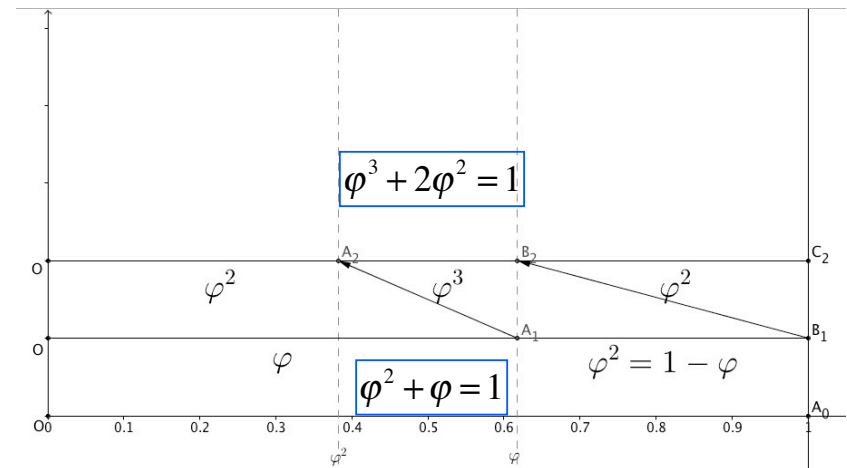
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$1 = \varphi + \varphi^2$$

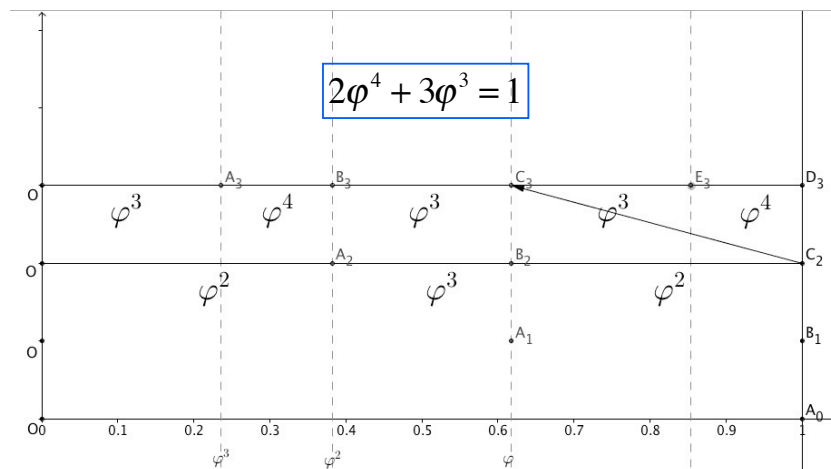
$$\varphi^2 = 1 - \varphi$$

5

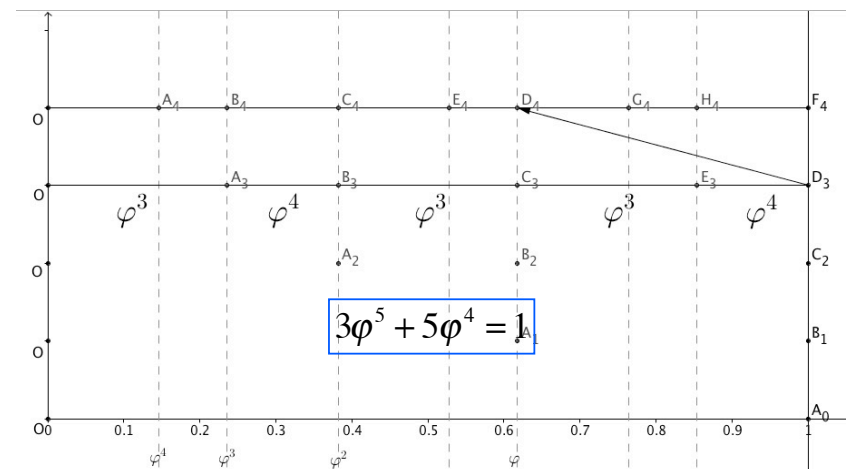
Fortgesetzte Teilung



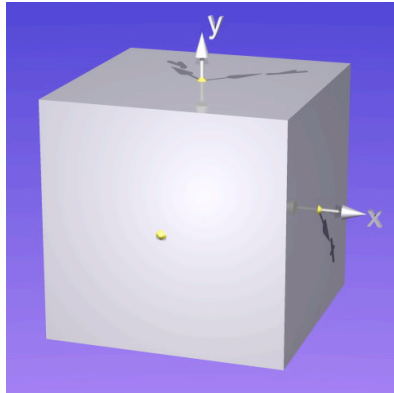
Fortgesetzte Teilung



Fortgesetzte Teilung

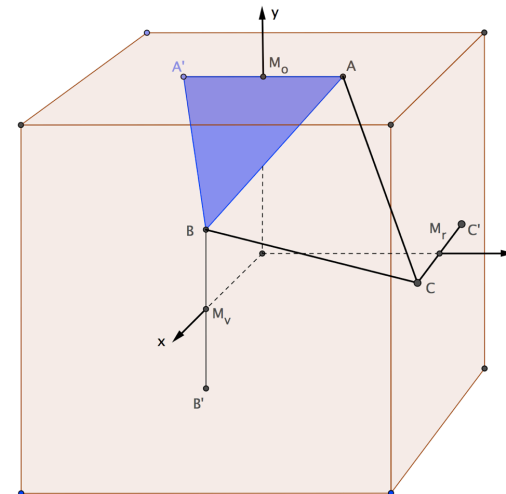


Vektorrechnung



Vom Würfel zum Ikosaeder

Vom Würfel zum Ikosaeder



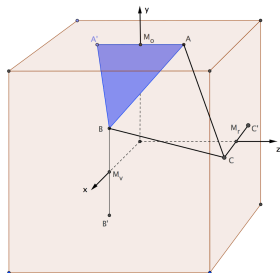
Punkte

$A(0,1,a)$ $A'(0,1,-a)$
 $B(1,a,0)$ $B'(1,-a,0)$
 $C(a,0,1)$ $C'(-a,0,1)$

Geogebra-Datei

14

Berechnung zum Ikosaeder



Punkte $A(0,1,a)$ $A'(0,1,-a)$
 $B(1,a,0)$ $B'(1,-a,0)$
 $C(a,0,1)$ $C'(-a,0,1)$

$$|AA'| = |AB| \Rightarrow 2a = \sqrt{(0-1)^2 + (1-a)^2 + (a-0)^2}$$

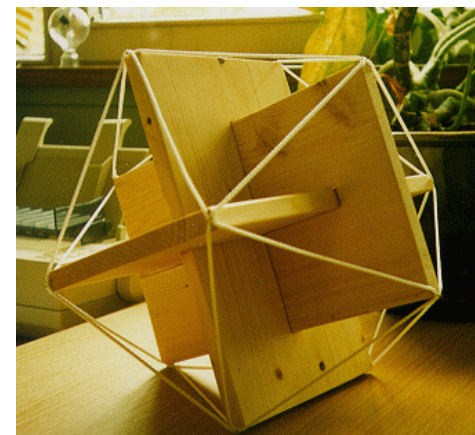
$$\Rightarrow 2a = \sqrt{1+1-2a+a^2+a^2} \Rightarrow 4a^2 = 2-2a+2a^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$$

15

Goldene Rechtecke im Ikosaeder

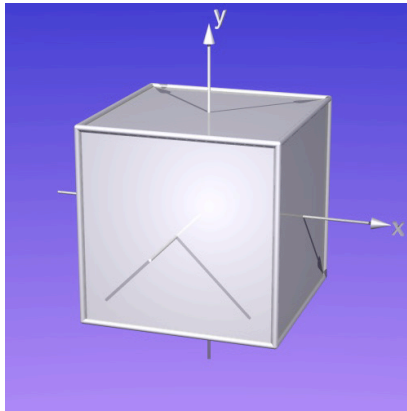


Der Ikosaeder
hat die Ecken

$(0, 1, \varphi)$
 $(0, 1, -\varphi)$
 $(0, -1, \varphi)$
 $(0, -1, -\varphi)$
 $(\varphi, 0, 1)$
 $(-\varphi, 0, 1)$
 $(\varphi, 0, -1)$
 $(-\varphi, 0, -1)$
 $(1, \varphi, 0)$
 $(1, -\varphi, 0)$
 $(-1, \varphi, 0)$
 $(-1, -\varphi, 0)$

16

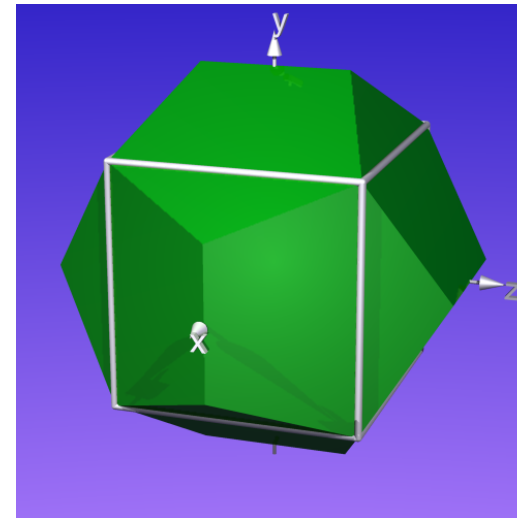
Vektorrechnung



Vom Würfel zum
Dodekaeder

17

Die Platonischen Körper im Koordinatensystem



Der Dodekaeder
hat die Ecken

$(1,1,1)$...
die Ecken des Würfels
dazu über jeder Würfelfläche
2 Punkte:

$$(1+\varphi, \varphi, 0)$$

$$(1+\varphi, -\varphi, 0)$$

$$(0, 1+\varphi, \varphi)$$

$$(0, 1+\varphi, -\varphi)$$

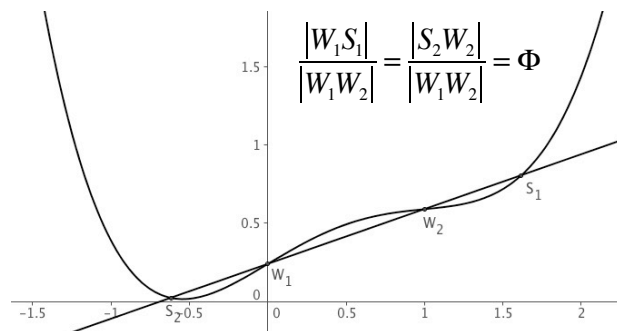
$$(\varphi, 0, 1+\varphi)$$

$$(-\varphi, 0, 1+\varphi)$$

und jeweils die Punkte der
gegenüberliegenden Fläche

18

Kurvendiskussion und goldener Schnitt



Gegeben ist ein Polynom 4. Grades, das zwei Wendepunkte W_1 und W_2 besitzt. Die Gerade durch W_1 und W_2 schneidet den Graph in den weiteren Punkten S_1 und S_2 . Dann gilt: (s.o.)

Kurvendiskussion und goldener Schnitt

Wir betrachten den Sonderfall, dass die Wendepunkte $W_1(0;0)$ und $W_2(1;0)$ sind

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$$

Diese Funktion hat Nullstellen bei 0 und 1.
Gesucht sind die restlichen beiden Nullstellen.

$$\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^4 - 2x^3 + x = 0$$

Wegen der bekannten Nullstellen kann man die
Linearfaktoren x und $(x-1)$ abspalten.

$$x(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ergibt

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

oder

$$x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

