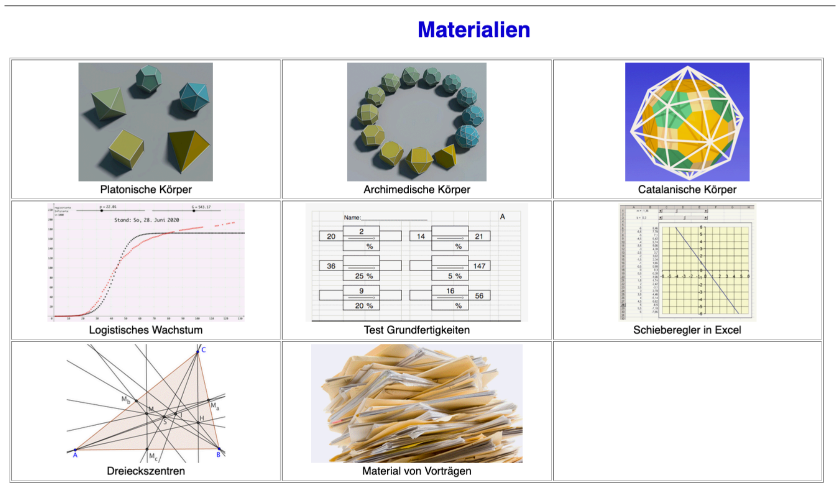
Meine Materialseite



GeoGebra

https://www.geogebra.org/

http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Materialien/index.html

Vertrauen ist gut - Kontrolle ist besser

Prüfziffern und Teilungsreste

Rechenproben

Die einfachste Probe ist die Neunerprobe.
Eigentlich müsste sie Quersummenprobe heißen.

```
 237 |   12              703 |    10
+366 |   15             -246 |    12
-----------             ----------
=603 |9|27->9           =457 |16|-2->+9=7
                                   ->7

 513·26 | 9·8
 ------   ---
 1026      72->9
   3078
 ------
 13338  |  18->9
```

Rechenproben

Die einfachste Probe ist die Quersummenprobe oder Neunerprobe

Offenbar gilt die Regel:

a   b   — Rechnen —>   Ergebnis
| | |
Quersumme bilden   Quersumme bilden
↓   ↓   ↓
QS(a)   QS(b)   — Rechnen —>   QSErgebnis

QuerQS(a○b) = QuerQS(QS(a)○QS(b))

wobei ○ für eines der Rechenzeichen +, – oder · steht.

Rechnen mit Resten

Die Neunerprobe ist der Sonderfall einer allgemeineren Regel:

Abkürzung: R_n der Rest beim Teilen durch n

$R_n(a \circ b) = R_n(R_n(a) \circ R_n(b))$

wobei $\circ$ für eines der Rechenzeichen +, – oder · steht.

Beispiele:

245 + 380 = 625 Wir teilen durch n = 12

$R_{12}(245) = 5$ $R_{12}(380) = 8$ $R_{12}(5 + 8) = R_{12}(13) = 1$ $R_{12}(625) = 1$

362 – 66 = 296 Wir teilen durch n = 7

$R_7(362) = 5$ $R_7(66) = 3$ $R_7(5 - 3) = 2$ $R_7(296) = 2$

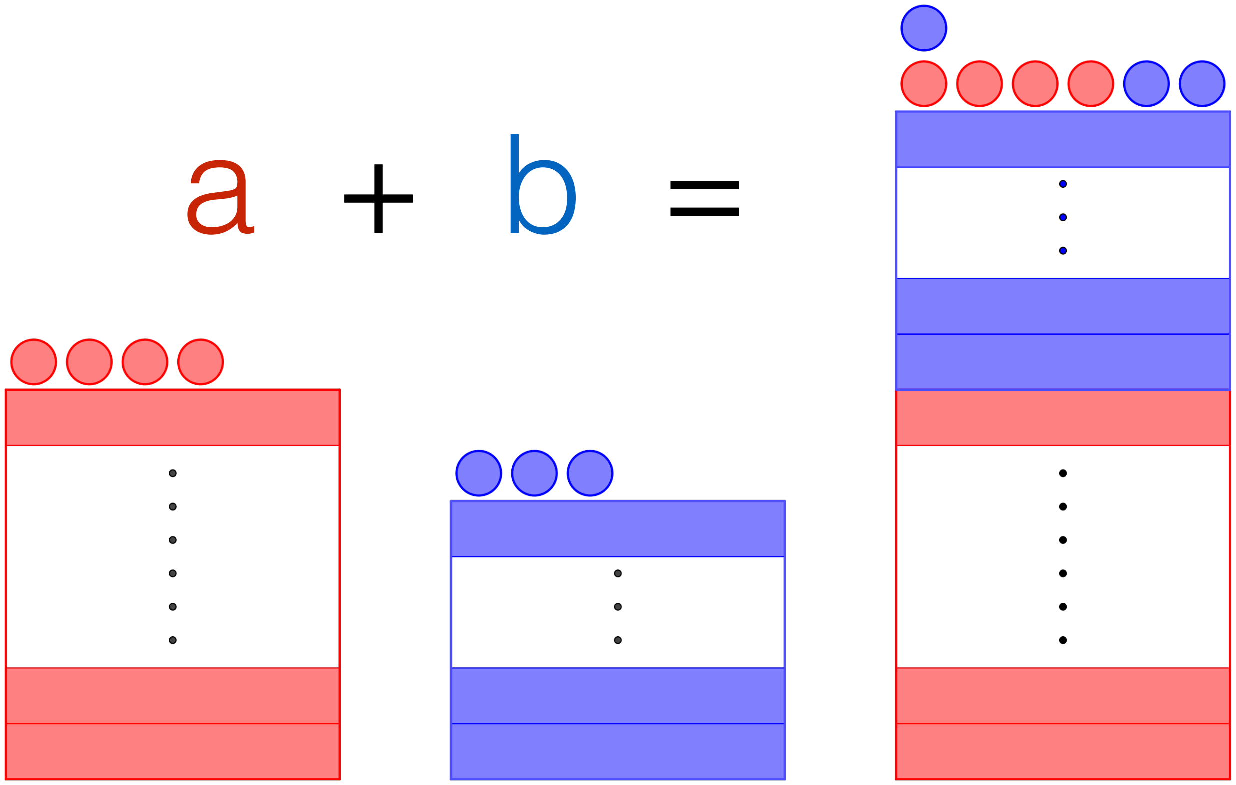
11·12 = 132 Wir teilen durch n = 8

$R_8(11) = 3$ $R_8(12) = 4$ $R_8(3 \cdot 4) = R_8(12) = 4$ $R_8(132) = 4$

Rechnen mit Resten

Grafische Veranschaulichung

Die Addition der Reste
bestimmt den Rest der Summe

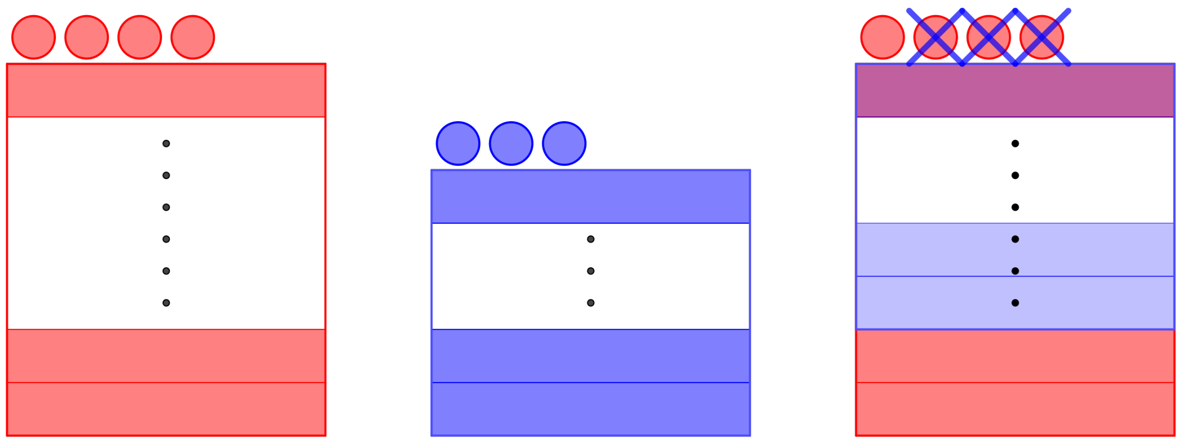


Rechnen mit Resten

Grafische Veranschaulichung

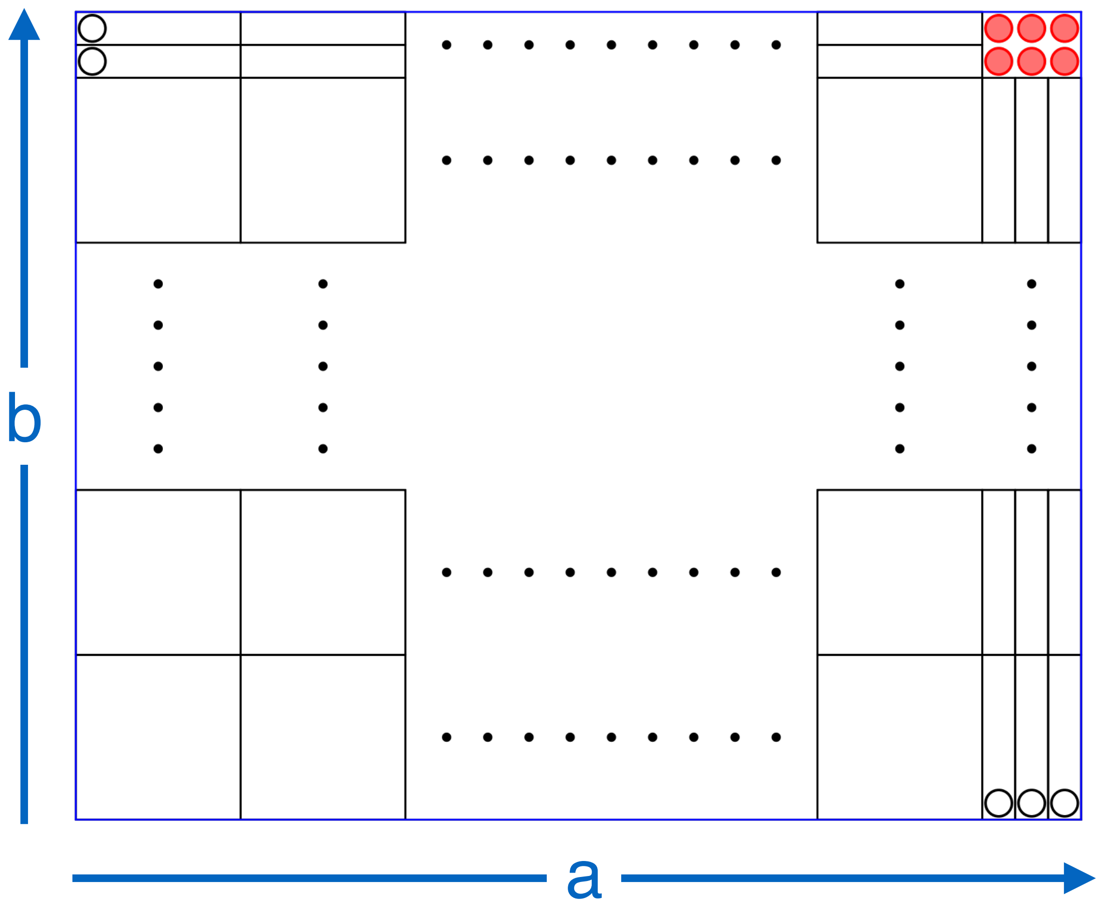
Die Subtraktion der Reste bestimmt den Rest der Differenz

$$a \;-\; b \;=$$



Rechnen mit Resten

Grafische Veranschaulichung



Die Multiplikation der Reste bestimmt den Rest des Produktes

Rechnen mit Resten

Die QuerQuersumme ist lediglich eine bequeme Art, für eine Zahl den Neunerrest zu berechnen.

Beispiele:

$R_9(822) = R_9(810 + 12) = 3$ QS(822) = 12 QS(12) = 3

$R_9(2794) = R_9(2700 + 90 + 4) = 4$ QS(2794) = 22 QS(22) = 4

Weiterentwicklung der künstlichen Intelligenz

Der Computer liest deine Gedanken

1 α	13 $\forall$	25 $\varDelta$	37 π	49 ∞	61 $\varnothing$	73 $\in$	85 $\surd$
2 $\mathbb{N}$	14 $\forall$	26 $\varnothing$	38 $\leq$	50 π	62 $\varDelta$	74 $\perp$	86 $\varnothing$
3 $\sphericalangle$	15 $\forall$	27 $\perp$	39 $\leq$	51 $\sphericalangle$	63 $\perp$	75 $\leq$	87 $\varDelta$
4 $\perp$	16 ∞	28 $\varDelta$	40 $\approx$	52 $\varDelta$	64 ∞	76 ∞	88 ∞
5 $\forall$	17 $\surd$	29 $\approx$	41 $\leq$	53 $\leq$	65 $\approx$	77 $\sphericalangle$	89 π
6 $\perp$	18 $\perp$	30 $\surd$	42 $\approx$	54 $\perp$	66 $\forall$	78 $\forall$	90 $\varDelta$
7 $\nexists$	19 $\varnothing$	31 π	43 $\forall$	55 ∞	67 ∞	79 $\mathbb{N}$	91 $\sphericalangle$
8 $\in$	20 $\nexists$	32 $\approx$	44 $\approx$	56 α	68 $\varnothing$	80 $\forall$	92 $\forall$
9 $\perp$	21 $\varDelta$	33 $\surd$	45 $\perp$	57 π	69 ∞	81 $\perp$	93 $\nexists$
10 $\nexists$	22 ∞	34 π	46 $\in$	58 $\in$	70 $\varnothing$	82 $\in$	94 ∞
11 $\mathbb{N}$	23 $\in$	35 $\in$	47 $\varDelta$	59 $\surd$	71 $\surd$	83 $\varnothing$	95 ∞
12 $\surd$	24 $\in$	36 $\perp$	48 $\in$	60 π	72 $\perp$	84 $\forall$	96 $\varDelta$

Denke dir eine zweistellige Zahl
(also von 10 bis 99).
Berechne die Quersumme dieser Zahl.
Ziehe von der Zahl die Quersumme ab.
Suche zum Ergebnis dieser Rechnung
in der Tabelle das Zeichen
und denke ganz fest daran.

Das erkennt der Computer

noch einmal

Die Lösung des Tricks

32 —> Quersumme 5		32 – 5 = 27
↓ +1	↓ +1	↓ gleich
33 —> Quersumme 6		33 – 6 = 27
↓ +1	↓ +1	↓ gleich
34 —> Quersumme 7		34 – 7 = 27
↓ +1	↓ +1	↓ gleich
35 —> Quersumme 8		35 – 8 = 27

Die Lösung des Tricks

27	36	63
30	40	70
31	41	71
32	42	72
33	43	73
34	44	74
35	45	75
36	46	76
37	47	77
38	48	78
39	49	79

Das Ergebnis ist immer eine Zahl aus dem 9er Einmaleins!

Die Lösung des Tricks

1 α	13 $\forall$	25 $\varDelta$	37 π	49 ∞	61 $\varnothing$	73 $\in$	85 $\surd$
2 $\mathbb{N}$	14 $\forall$	26 $\varnothing$	38 $\leq$	50 π	62 $\varDelta$	74 $\perp$	86 $\varnothing$
3 $\lhd$	15 $\forall$	27 $\perp$	39 $\leq$	51 $\lhd$	63 $\perp$	75 $\leq$	87 $\varDelta$
4 $\perp$	16 ∞	28 $\varDelta$	40 $\approx$	52 $\varDelta$	64 ∞	76 ∞	88 ∞
5 $\forall$	17 $\surd$	29 $\approx$	41 $\leq$	53 $\leq$	65 $\approx$	77 $\lhd$	89 π
6 $\perp$	18 $\perp$	30 $\surd$	42 $\approx$	54 $\perp$	66 $\forall$	78 $\forall$	90 $\varDelta$
7 $\nexists$	19 $\varnothing$	31 π	43 $\forall$	55 ∞	67 ∞	79 $\mathbb{N}$	91 $\lhd$
8 $\in$	20 $\nexists$	32 $\approx$	44 $\approx$	56 α	68 $\varnothing$	80 $\forall$	92 $\forall$
9 $\perp$	21 $\varDelta$	33 $\surd$	45 $\perp$	57 π	69 ∞	81 $\perp$	93 $\nexists$
10 $\nexists$	22 ∞	34 π	46 $\in$	58 $\in$	70 $\varnothing$	82 $\in$	94 ∞
11 $\mathbb{N}$	23 $\in$	35 $\in$	47 $\varDelta$	59 $\surd$	71 $\surd$	83 $\varnothing$	95 ∞
12 $\surd$	24 $\in$	36 $\perp$	48 $\in$	60 π	72 $\perp$	84 $\forall$	96 $\varDelta$

Das Ergebnis ist immer eine Zahl aus dem 9er Einmaleins!

Rechnen mit Resten

$$R_n(a \circ b) = R_n(R_n(a) \circ R_n(b))$$

Folgerung: Will man den Teilungsrest ausrechnen, darf man in einer +, – oder · Rechnung eine Zahl durch ihren Teilungsrest ersetzen.

Beispiel: Der Teilungsrest von 548 beim Teilen durch 19

$548 : 19 = 28{,}8421\ldots \qquad 28 \cdot 19 = 27 \cdot 20 - 8 = 532 \;\text{—>}\; R_{19}(548) = 16$

$R_{19}(548) = R_{19}(27 \cdot 20 + 8) = R_{19}(27 \cdot 1 + 8) = R_{19}(8 + 8) = 16$

$R_{19}(20) = 1 \qquad R_{19}(27) = 8$

Beispiel: Der Teilungsrest von 1000 beim Teilen durch 7

$1000 : 7 = 142{,}8571\ldots \qquad 142 \cdot 7 = 700 + 280 + 14 = 994 \;\text{—>}\; R_7(1000) = 6$

$R_7(1000) = R_7(10 \cdot 10 \cdot 10) = R_7(3 \cdot 3 \cdot 3) = R_7(9 \cdot 3) = R_7(2 \cdot 3) = 6$

$R_7(10) = 3$

Rechnen mit Resten

Anwendung: Erläuterung der Teilbarkeitsregeln

Die Teilbarkeit durch 9 (und 3): Quersummenregel

Beispiel für die dreistellige Zahl „abc“

$$
\begin{aligned}
R_9(\text{„abc“}) &= R_9(100a+10b+c) \\
&= R_9(R_9(100)\cdot a + R_9(10)\cdot b + c) \\
&= R_9(\quad 1 \quad \cdot a + \quad 1 \quad \cdot b + c) \\
&= R_9(a + b + c)
\end{aligned}
$$

Das gilt für beliebig große Zahlen, da alle Zehnerpotenzen (10, 100, 1000, … beim Teilen durch 9 den Rest 1 lassen.

Die Quersumme liefert also nicht nur die Information, ob eine Zahl durch 9 teilbar ist, sondern auch den Teilungsrest, wenn die Division durch 9 nicht glatt aufgeht.

Rechnen mit Resten

Anwendung: Erläuterung der Teilbarkeitsregeln

Die Teilbarkeit durch 4: Endziffernregel

Beispiel für die vierstellige Zahl „abcd“

$$
\begin{aligned}
R_4(\text{„abcd“}) &= R_4(1000a + 100b + 10c + d) \\
&= R_4(R_4(1000)\cdot a + R_4(100)\cdot b + 10\cdot c + d) \\
&= R_4(\quad 0 \quad \cdot a + \quad 0 \quad \cdot b + 10\cdot c + d) \\
&= R_4(10\cdot c + d) = R_4(\text{„cd“})
\end{aligned}
$$

Das gilt für beliebig große Zahlen, da alle Zehnerpotenzen (100, 1000, … beim Teilen durch 4 den Rest 0 lassen.

Prüfziffern

Wieso Prüfziffern?

Schreib-/Übermittlungsfehler:

1) Klabantermann —> Klabautermann
2) 04215371894 —> ??

Redundanz - zusätzliche, „überflüssige“ Information

1) fehlererkennender, selbstkorrigierender Code
2) nicht redundanter Code - keine Fehlererkennung

Für 17.000 Wörter reichen (ohne Redundanz) dreibuchstabige Wörter aus.

Prüfziffern

Prüfziffern sind zusätzliche, „überflüssige“ Information, mit denen man in der Lage ist, Fehler in der Übermittlung zu erkennen.

ISB-Nummern

Internationale **S**tandard**B**uch**N**ummer

Die Prüfziffer der neuen, 13-stelligen ISB-Nummern

```
  9  7  8  -  3  -  8  3  4  8  -  1  7  5  7  -  0
  |  |  |     |     |  |  |  |     |  |  |  |     ↑
 ×1 ×3 ×1    ×3    ×1 ×3 ×1 ×3    ×1 ×3 ×1 ×3
  9+21+8+  9  +  8+9+4+24+1+21+5+21=140
```

Von der Ergebnisssumme wird die Einerziffer genommen
(= Teilungsrest beim Teilen durch 10)
Ist die Einerziffer 0, ist die Prüfziffer 0.
Ist die Einerziffer ungleich 0, so ist deren Differenz von 10 die Prüfziffer.

ISB-Nummern

Internationale **S**tandard**B**uch**N**ummer

Eine übermittelte ISB-Nummern wird überprüft durch

```
 9  7  8  -  3  -  5  4  0  -  4  0  1  8  5  -  8
 |  |  |     |     |  |  |     |  |  |  |  |     |
×1 ×3 ×1    ×3    ×1 ×3 ×1    ×3 ×1 ×3 ×1 ×3    ×1
 9+21+8+  9  +  5+12+0+12+0+3+8+15 +8=110
```

Die Prüfziffer wird zur eigentlichen ISBN einfach dazuaddiert. Die Summe muss dann eine durch 10 teilbare Zahl sein.

Dadurch können Zahlendreher oftmals erkannt werden.

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Eingeführt ab 2012, endgültig verwendet ab März 2014

Vorher: Kontonummern hatten auch Prüfziffern, aber jede Bank hatte ein eigenes System.

Die Bundesbank veröffentlichte (bei Bedarf neue) Dokumente dafür. Letzter Stand Frühjahr 2014:
83 DIN A 4 Seiten Berechnungsmethoden für die Prüfziffern plus
Excel-Tabelle mit ca. 19.000 Einträgen für alle Banken Deutschlands und deren verwendete Methode aus der 82-seitigen Auflistung

Die IBA-Nummer

Ir … t **N**umber

Beispiel:

Kennzeichen	Berechnungsmethode für Prüfziffern
A8 gültig seit 08.09.2003, zuletzt geändert zum 07.03.2005	Die Kontonummer ist durch linksbündige Nullenauffüllung 10-stellig darzustellen. Die 10. Stelle ist per Definition die Prüfziffer. **Variante 1:** Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7 Die Stellen 4 bis 9 der Kontonummer werden von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7 multipliziert. Die weitere Berechnung und die möglichen Ergebnisse entsprechen dem Verfahren 06. Führt die Berechnung nach Variante 1 zu einem Prüfzifferfehler, so sind die Konten nach Variante 2 zu prüfen. Stellennr.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A (A=10) Kontonr.: x x x x x x x x x P Gewichtung: 7 6 5 4 3 2 Testkontonummern (richtig): 7436661, 7436670, 1359100 Testkontonummern (falsch): 7436660, 7436678 **Variante 2:** Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1 Die Stellen 4 bis 9 der Kontonummer werden von rechts nach links mit den Ziffern 2, 1, 2, 1, 2, 1 multipliziert. Die weiter Berechnung und die möglichen Ergebnisse entsprechen dem Verfahren 00. Stellennr.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A (A=10) Kontonr.: x x x x x x x x x P Gewichtung: 1 2 1 2 1 2 Testkontonummern (richtig): 7436660, 7436678, 0003503398, 0001340967 Testkontonummern (falsch): 7436666, 7436677, 0003503391, 0001340966 **Ausnahme**: Ist nach linksbündiger Auffüllung mit Nullen auf 10 Stellen die 3. Stelle der Kontonummer = 9 (Sachkonten), so erfolgt die Berechnung gemäß der Ausnahme in Methode 51 mit den gleichen Ergebnissen und Testkontonummern.

verwendet von der
Sparda-Bank Berlin

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Kontonummer: **`123456`** max. 10-stellig

Bankleitzahl: **`25000101`** 8-stellig

A —> 10
B —> 11
C —> 12
D —> 13
E —> 14
…

D	E	p	p	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6

Mache aus der 22-stelligen IBAN eine 24-stellige Zahl.

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	0	0
																		D		E			

Berechne von dieser Zahl den Teilungsrest beim Teilen durch 97. Ist er nicht 0, subtrahiere diesen Rest von 98. Das ist die zweistellige Prüfziffer. Ist der Teilungsrest 0, ist die Prüfziffer 01.

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	0	0

Die Rechnung (spezieller Taschenrechner, der 24-stellige Zahlen nicht rundet) liefert den Teilungsrest 66. Also ist die zweistellige Prüfzahl 98 - 66 = 32.

Die IBAN lautet dann.

D	E	3	2	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Test einer IBAN mit der Prüfzahl.

D	E	3	2	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6

Die IBAN wird wieder in eine 24-stellige Zahl verwandelt, nun wird aber die Prüfzahl am Ende statt der zwei Nullen eingesetzt.

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	3	2

Diese 24-stellige Zahl muss beim Teilen durch 97 einen Rest von 1 lassen, ansonsten ist sie falsch (aufgeschrieben worden).

Rechnen mit Resten

Die Praxis 2: Die Prüfziffer der IBAN

Sie kennen von einer Bankverbindung die BLZ und Kontonummer, nicht aber die IBAN.

Kontonummer: 17428

BLZ: 250 201 01

																			D		E			
	2	5	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	7	4	2	8	1	3	1	4	0	0
=	2	5	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+														1	7	4	2	8	0	0	0	0	0	0
+																			1	3	1	4	0	0

Also: $25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^{6} + 131.400$

Rechnen mit Resten

Die Praxis 2: Die Prüfziffer der IBAN

Kontonummer: 17428

BLZ: 250 201 01

Also: $25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^{6} + 131.400$

$$\mathrm{Rest}_{97}(25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^{6} + 131.400)$$

$$= \mathrm{Rest}_{97}(25.020.101 \cdot \mathrm{Rest}_{97}(10^{16}) + 17.428 \cdot \mathrm{Rest}_{97}(10^{6}) + \mathrm{Rest}_{97}(131.400))$$

$$= \mathrm{Rest}_{97}(\underset{\text{Bankleitzahl}}{25.020.101} \cdot 62 + \underset{\text{Kontonummer}}{17.428} \cdot 27 + 62)$$

$$= \mathrm{Rest}_{97}(1.551.716.880)$$

$$= 23$$

Also ist die Prüfzahl 98 - 23 = 75   IBAN: DE75 2502 0101 0000 0174 28

Test einer IBAN mit der Prüfzahl

IBAN aus Österreich
AT50 2011 1826 2403 5500

A —> 10   T —> 29   AT50 —> 102950

Die Kontoinformation (BLZ mit Kontonummer) zerlegen wir wieder in eine 10-stellige Zahl und die weiteren, links stehenden Ziffern.

2011 1826 2403 5500 —>

$201.118 \cdot 10^{16} + 2.624.035.500 \cdot 10^{6} + 102.950$

$\text{Rest}_{97}(201.118 \cdot \text{Rest}_{97}(10^{16}) + 2.624.035.500 \cdot \text{Rest}_{97}(10^{6}) + 102.950)$

$= \text{Rest}_{97}(201.118 \cdot 62 + 2.624.035.500 \cdot 27 + 102.950)$

$= \text{Rest}_{97}(70.861.530.766)$ $= 1$ also ist die IBAN richtig

Lösen mathematischer Probleme

Finde zu $x^2 + y^2 = 999.999$ zwei ganzzahlige Lösungen x, y oder beweise, dass es keine Lösung geben kann.

1. Lösungsansatz: probieren

x	x^2	999999 - x^2	Wurzel
20	400	999599	999,7994799
27	729	999270	999,6349334
34	1156	998843	999,4213326
41	1681	998318	999,1586461
48	2304	997695	998,8468351
55	3025	996974	998,4858537
62	3844	996155	998,0756484
69	4761	995238	997,6161587
76	5776	994223	997,1073162
83	6889	993110	996,5490455
90	8100	991899	995,9412633
97	9409	990590	995,2838791
104	10816	989183	994,5767944

Lösen mathematischer Probleme

2. Lösungsansatz:
Über die Eigenschaften von x und y nachdenken

$$x^2 + y^2 = 999.999$$

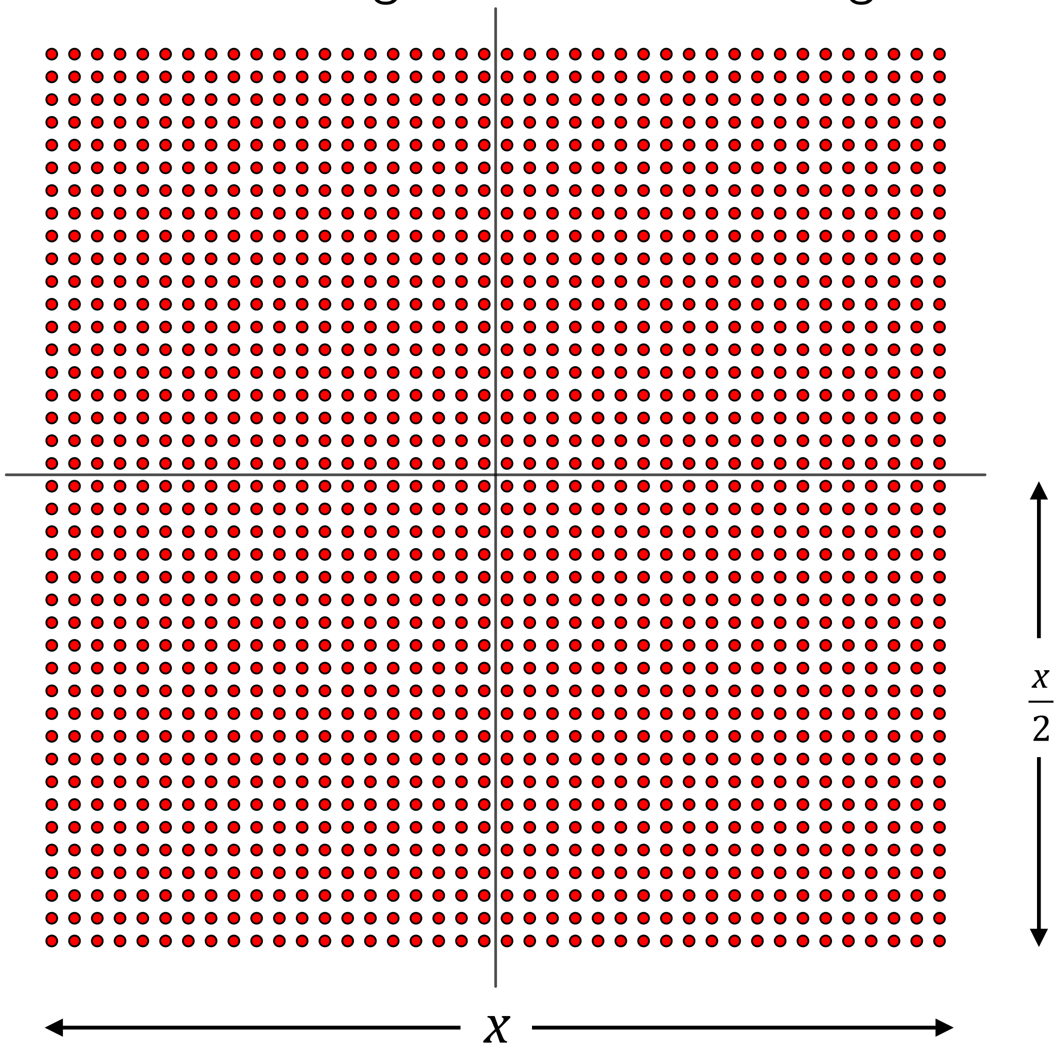
Da das Ergebnis ungerade ist, muss eine Zahl gerade und eine Zahl ungerade sein.

Eine Quadratzahl x^2 ist gerade, wenn die Ausgangszahl x gerade ist.

Dann ist x^2 sogar durch 4 teilbar.

Lösen mathematischer Probleme

Quadrat mit gerader Kantenlänge x

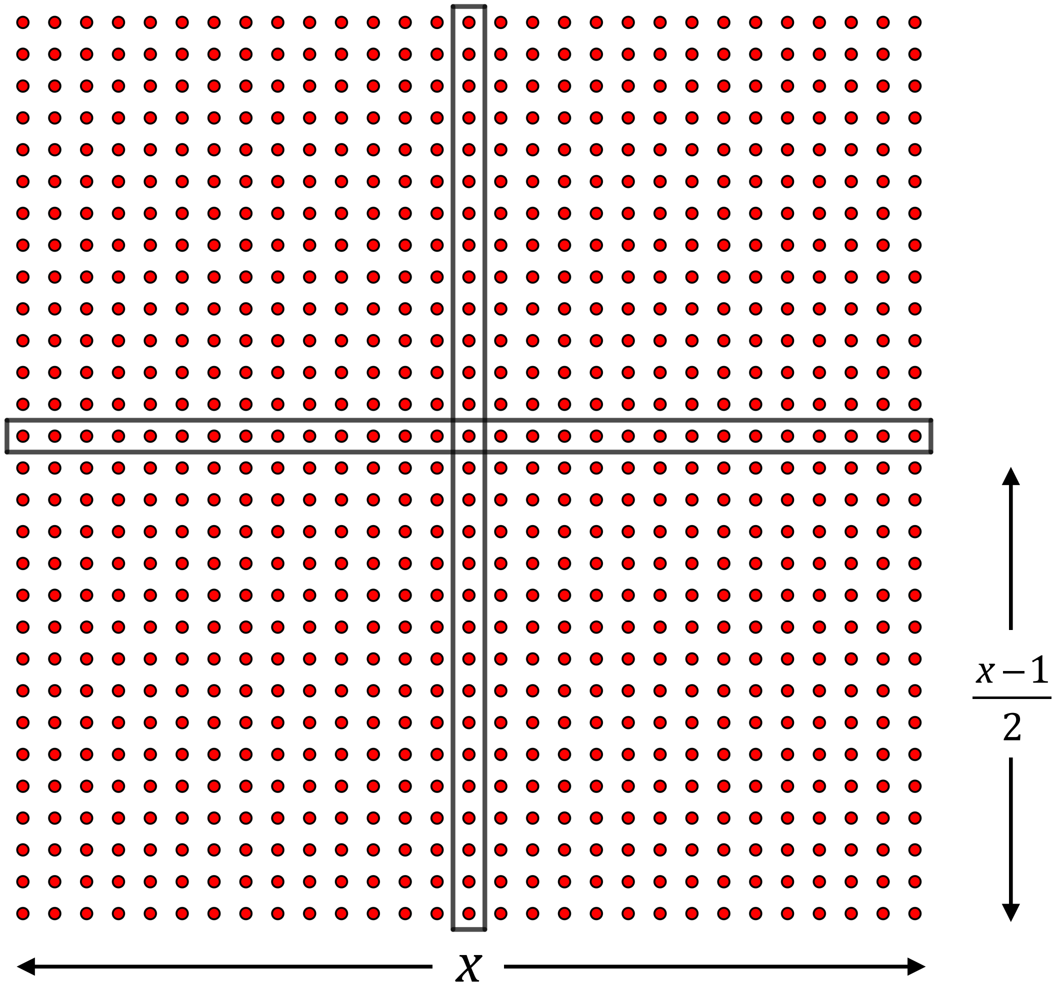


4 gleiche Teilquadrate

Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar.

Lösen mathematischer Probleme

Quadrat mit ungerader Kantenlänge x



4 gleiche Teilquadrate

4 gleiche Riegel

1 Punkt im Zentrum

Das Quadrat einer ungeraden Zahl lässt beim Teilen durch 4 den Rest 1.

Lösen mathematischer Probleme

$$x^2 + y^2 = 999.999$$

x gerade $\qquad$ y ungerade

$R_4(x^2) = 0$ $\qquad$ $R_4(y^2) = 1$ $\qquad$ $R_4(999.999) = 3$

Das geht nicht zusammen, also kann es keine Lösung geben.