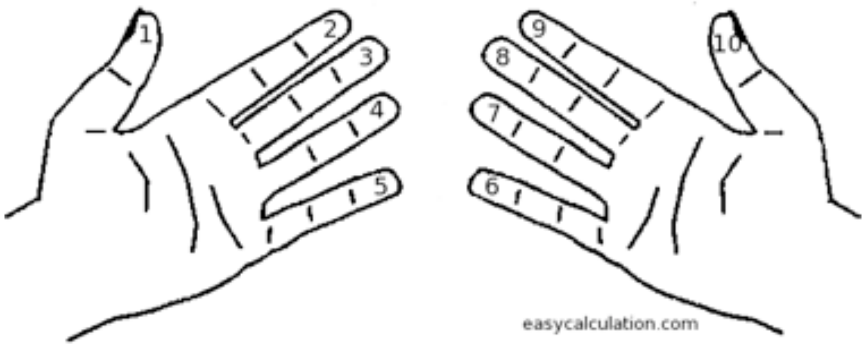
Schriftliches Rechnen und Rechenvorteile

Seltsame Rechnung

https://www.youtube.com/watch?v=Bfq5kju627c

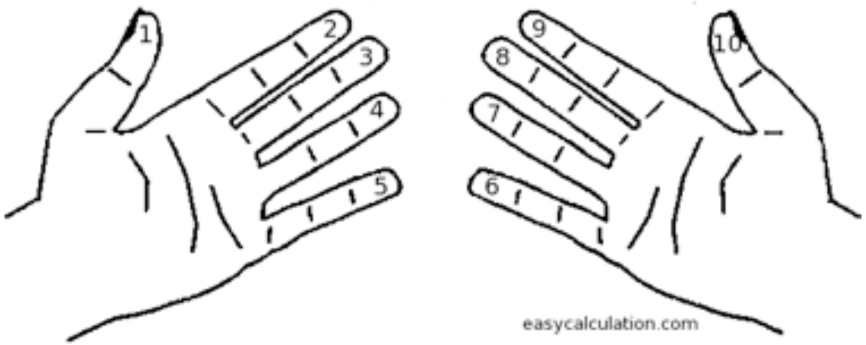
Fingerübungen



Das 1x1 der 9

Für 9 x n, knicke den Finger n ab.
Dann hat man links vom Knick die Zehnerziffer
und rechts die Einerziffer.

Fingerübungen

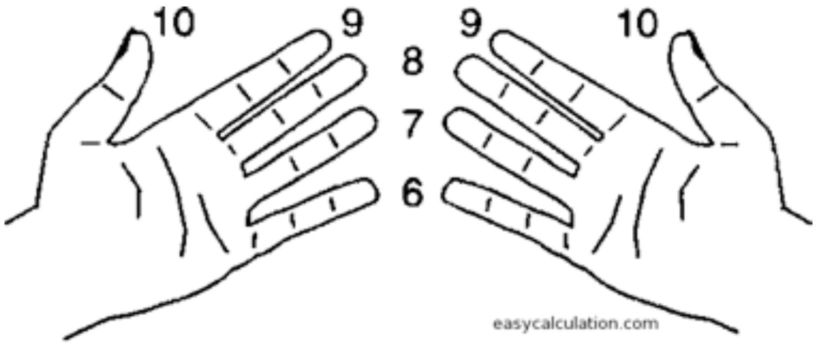


Knickt man den Finger n ab,
Dann hat man links vom
Knick n - 1 Finger und rechts
10 - n.

Beispiel n = 4 , 9·4:
Links: 1 - 3, 3 Finger
Rechts: 5 - 10, 6 Finger

$$
\begin{aligned}
& 10(n-1) + (10-n) \\
&= 10n - 10 + 10 - n \\
&= 10n - n \\
&= (10-1)n \\
&= 9n
\end{aligned}
$$

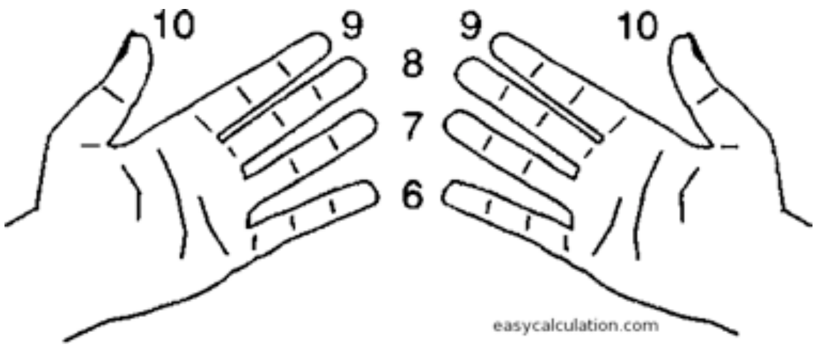
Fingerübungen



Beide Faktoren sind von 6 bis 10

Für a x b knicke links alle Finger bis a ab, rechts alle Finger bis b.
Dann ist die <u>Summe der geknickten</u> Finger die Zehnerziffer.
Das <u>Produkt der gestreckten</u> Finger ist die Einerziffer (ggfs. mit Übertrag).

Fingerübungen



Zu a sind a - 5 Finger abgeknickt und 10 - a gestreckt.

Beispiel a = 7:
Unten: 6, 7 abgeknickt, 2 Finger
Oben: 8, 9, 10 gestreckt, 3 Finger

$$10\,(a-5 + b-5) + (10-a)(10-b)$$
$$= 10a-50+10b-50+100-10a-10b+ab$$
$$= ab$$

Schriftliche Multiplikation

Grundprinzip im 10er-System:
Die Zahl ***abc*** bedeutet $100a + 10b + c$

Also ist die Multiplikation der beiden dreistelligen Zahlen ***abc*** mit ***ABC*** ausführlich:

$(100a + 10b + c)\cdot(100A + 10B + C)$

$=(10^2a + 10^1b + 1c)\cdot(10^2A + 10^1B + 1C)$

$=10^4aA + 10^3(aB+bA) + 10^2(aC+bB+cA) + 10^1(bC+cB) + 1cC$

Schriftliche Multiplikation

Beispiel: $\underline{2 \quad 5 \quad 3 \cdot 3 \quad 4 \quad 2}$

ZT 10^4	T 10^3	H 10^2	Z 10^1	E
6	15	9		
	8	20	12	
		4	10	6
8	6	5	2	6

<— Begründung

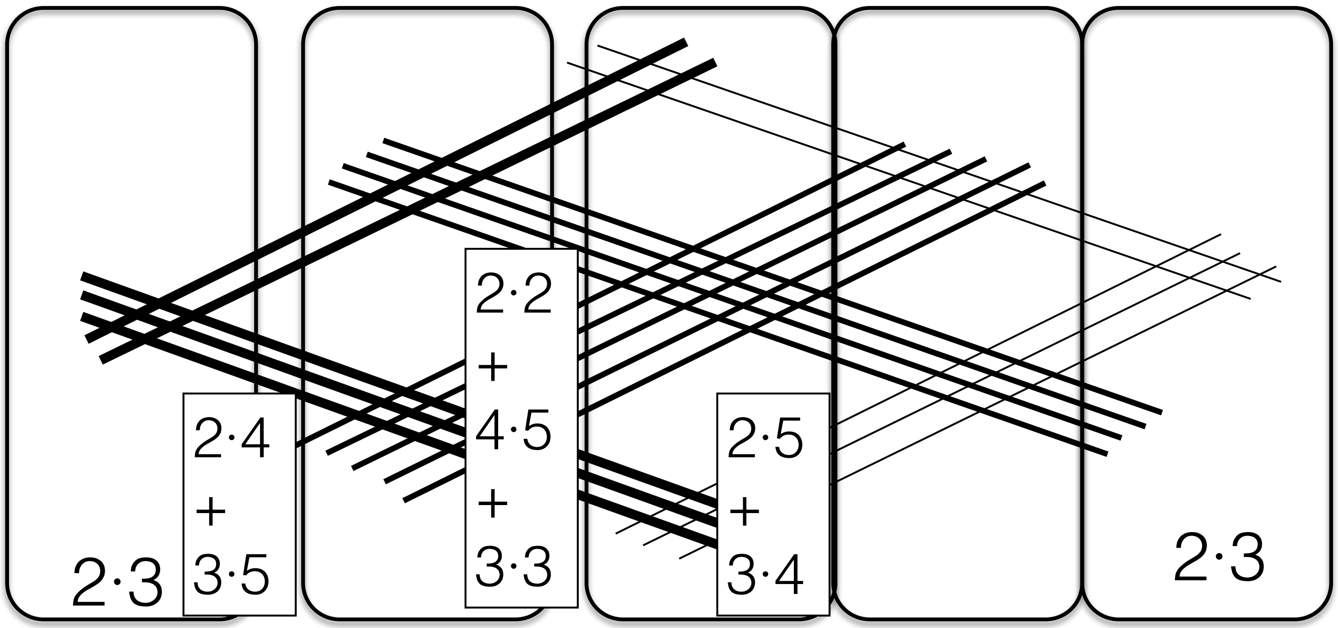
Die klassische Schreibweise

Schriftliche Multiplikation

Beispiel: $\underline{2 \quad 5 \quad 3 \cdot 3 \quad 4 \quad 2}$

ZT	T 10^3	H 10^2	Z 10^1	E
6	15	9		
	8	20	12	
		4	10	6
8	6	5	2	6

Die Rechnung mit einem Strichmuster



Schriftliche Multiplikation

”copperplate“

```
   253
   342
 -------
    09
   1512
  062006
   0810
    04
 -------
   86526
```

vedische Multiplikation

Beispiel: $87 \cdot 98$ Hilfszahl: 100

$-13 \quad -2$

$=85$

Rechnung: $85 \cdot 100+(-13) \cdot (-2)=8526$

Beispiel: $87 \cdot 98$ Hilfszahl: 90

$-3 \quad +8$

$=95$

Rechnung: $95 \cdot 90+(-3) \cdot (+8)$

$=100 \cdot 90 - 5 \cdot 90 - 24 = 9000 - 450 - 24 = 8526$

vedische Multiplikation

Warum funktioniert das Verfahren?

Rechnung: $a \cdot b$ Hilfszahl H

$$\begin{array}{ccc} a & b & H \end{array}$$

1.Schritt: Differenz mit der Hilfszahl $a-H \quad b-H$

2.Schritt: Über Kreuz zusammenzählen $a+b-H$

3.Schritt: Ergebnis berechnen

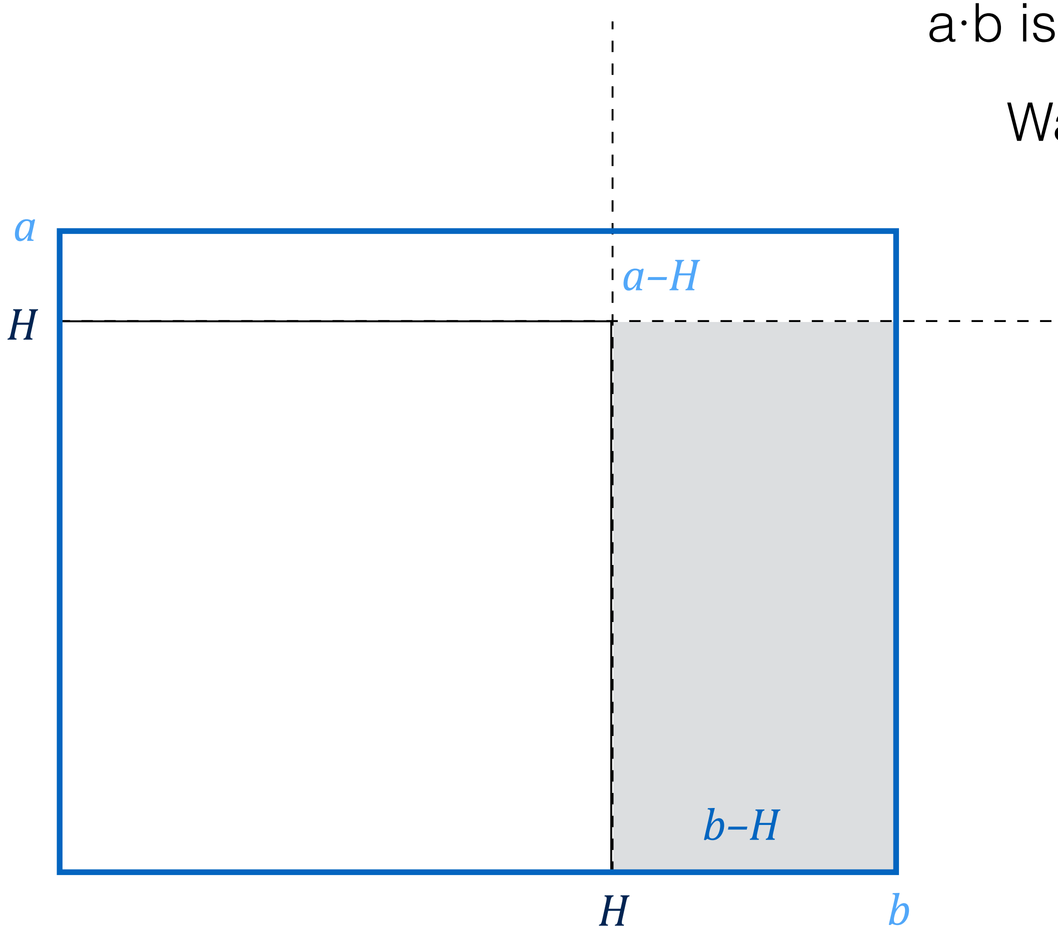
$$(a+b-H)\cdot H + (a-H)(b-H)$$

$$=\cancel{aH} + \cancel{bH} - \cancel{H^2} + ab - \cancel{aH} - \cancel{bH} + \cancel{H^2} = a \cdot b$$

Die Hilfszahl kann beliebig gewählt werden.
Eine geschickte Wahl hängt (auch) von a und b ab.

vedische Multiplikation

grafische Erläuterung



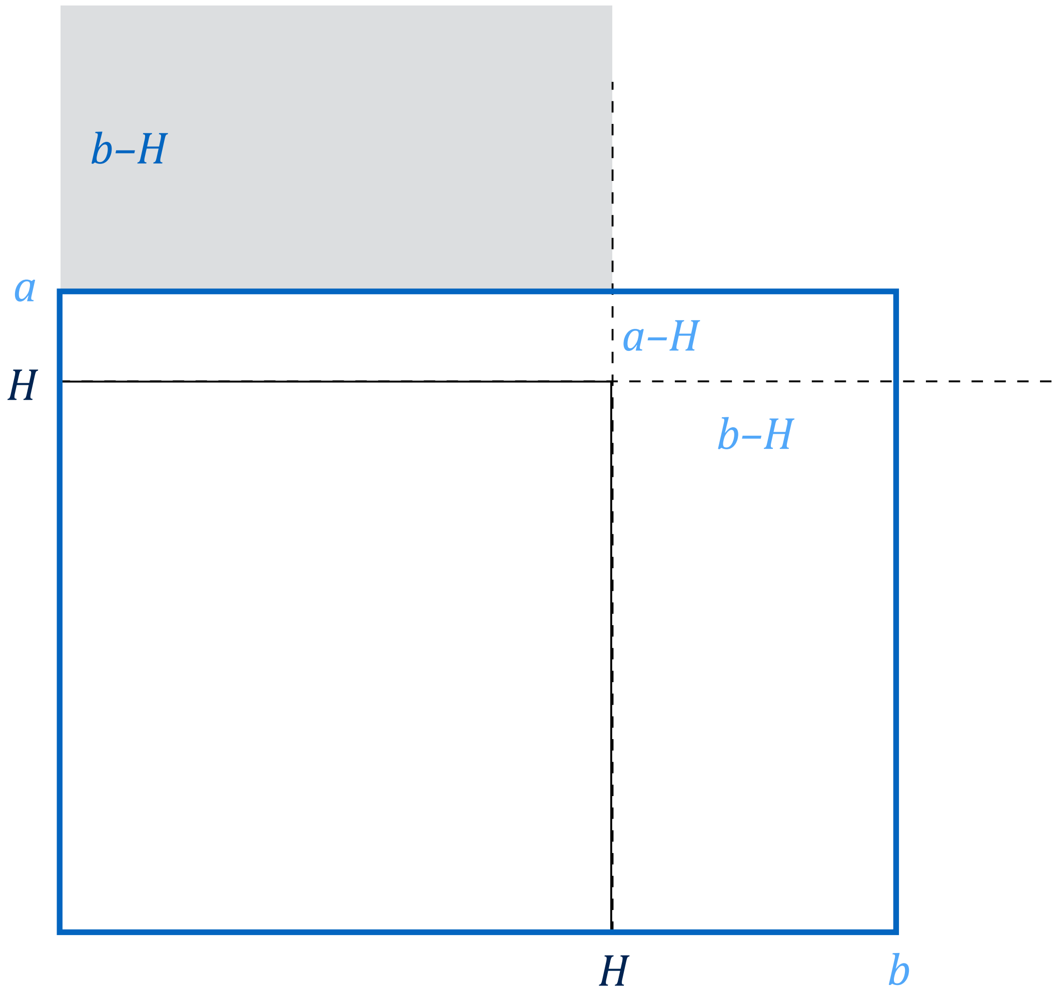
a·b ist die Fläche des Rechtecks

Wähle ein H (hier H < a, b)

Bilde die Differenzen
a - H und b - H

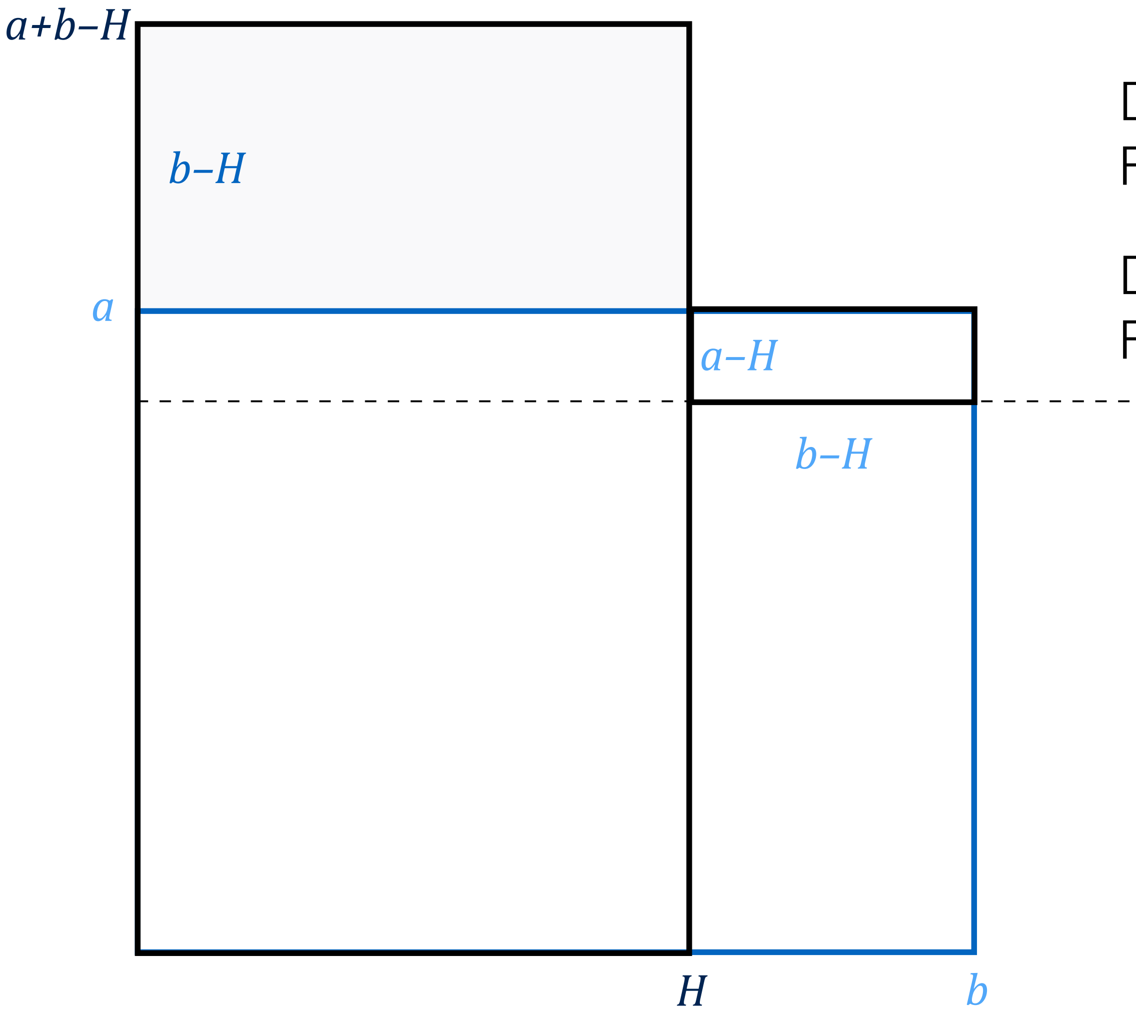
vedische Multiplikation

grafische Erläuterung



vedische Multiplikation

grafische Erläuterung



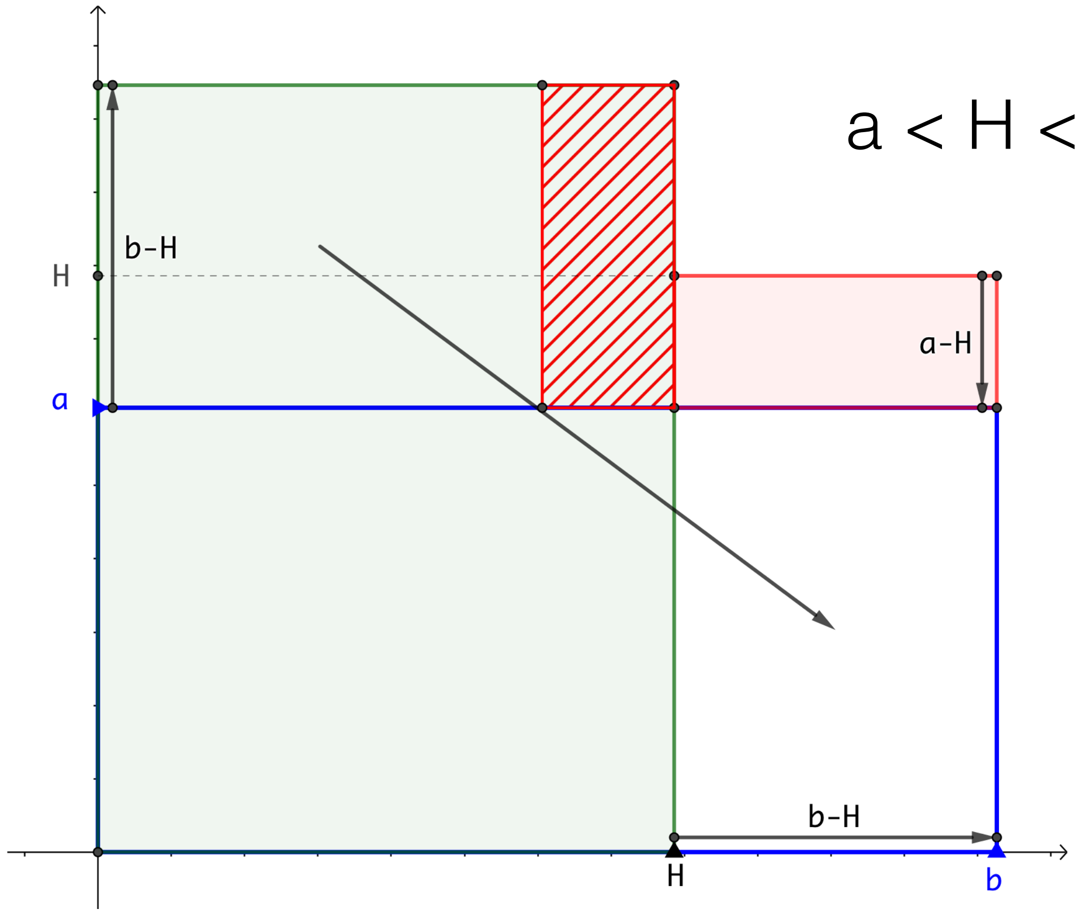
Das große Rechteck hat die Fläche $(a+b-H)\cdot H$

Das kleine Rechteck hat die Fläche $(a-H)\cdot(b-H)$

vedische Multiplikation

grafische Erläuterung

$a < H < b$



vedische Multiplikation

Sonderfall: Die Zehnerziffer ist gleich, die Einerziffern ergänzen sich zu 10

Rechnung: $47 \cdot 43$ Hilfszahl 40 die reinen Zehner

1.Schritt: Differenz mit der Hilfszahl

$+7 \quad +3$ die Einer

2.Schritt: Über Kreuz zusammenzählen

50 (Zehnerziffer + 1)·10

3.Schritt: Ergebnis berechnen

$50 \cdot 40 + 7 \cdot 3$

$=2021$

(Zehnerziffer + 1)·Zehnerziffer
& Produkt der Einerziffern

vedische Multiplikation

Das Beispiel zur schriftlichen Multiplikation

Rechnung: $253 \cdot 342$ Hilfszahl 300

1.Schritt: Differenz mit der Hilfszahl

$-47 \quad +42$

2.Schritt: Über Kreuz zusammenzählen

295

3.Schritt: Ergebnis berechnen

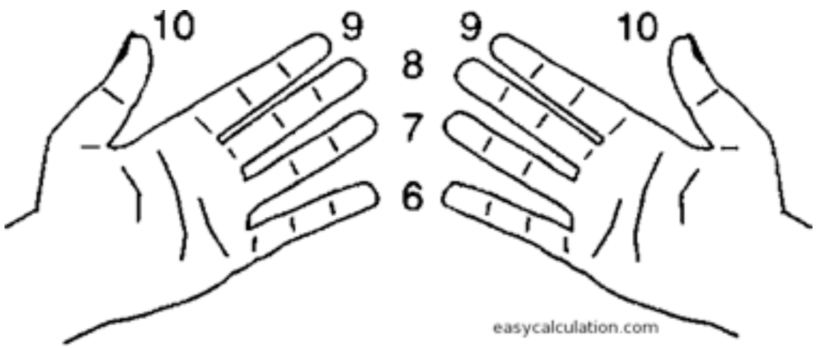
$$295 \cdot 300 + (-47)(+42)$$

$$= 300 \cdot 300 - 5 \cdot 300 - 47 \cdot 43 + 47$$

$$= 90.000 - 1500 - 2021 + 47$$

$$= 88.547 - 2021 = 86526$$

Fingerübungen



Beide Faktoren sind von 6 bis 10

Für a x b knicke links alle Finger bis a ab, rechts alle Finger bis b. Dann ist die <u>Summe der geknickten</u> Finger die Zehnerziffer, das <u>Produkt der gestreckten</u> Finger die Einerziffer (ggfs. mit Übertrag).

Das ist die vedische Multiplikation mit der Hilfszahl 10.

Beispiel: $7 \cdot 9$ Hilfszahl 10

$-3 \quad -1$ gestreckte Finger

$= 6$ abgeknickte Finger

Näherungen für Wurzeln

Wie geht es?

Beispiel: $\sqrt{10}$ Die nächste Quadratzahl ist 9.
Der Abstand ist a = +1.

Die Wurzel aus der Quadratzahl ziehen. $w = \sqrt{9} = 3$

Dann ist der Näherungsbruch:

$$\sqrt{10} \approx w + \frac{a}{2w} = 3 + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6} \approx 3{,}167$$

Probe: $\left(3\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{361}{36} = 10\frac{1}{36} \approx 10{,}028$

Näherungen für Wurzeln

Wie geht es?

2.Beispiel: $\sqrt{46}$ Die nächste Quadratzahl ist 49.
Der Abstand ist *a* = -3.

Die Wurzel aus der Quadratzahl ziehen. $w = \sqrt{49} = 7$

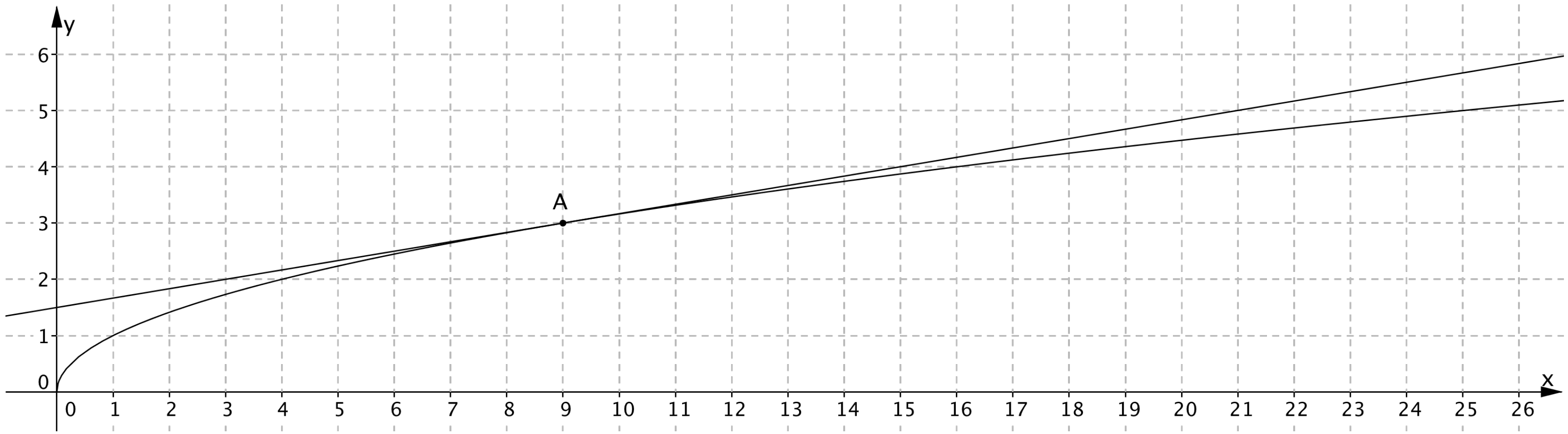
Dann ist der Näherungsbruch:

$$\sqrt{46} \approx w + \frac{a}{2w} = 7 - \frac{3}{14} = 6\frac{11}{14}$$

Probe: $\left(6\frac{11}{14}\right)^2 = \left(\frac{95}{14}\right)^2 = \frac{9025}{196} = 46\frac{9}{196} \approx 46{,}046$

Näherungen für Wurzeln

Warum funktioniert es?



Zeichnet man im Punkt (x;√x) die Tangente, so hat diese die Steigung (Differenzialrechnung, Ableitung)

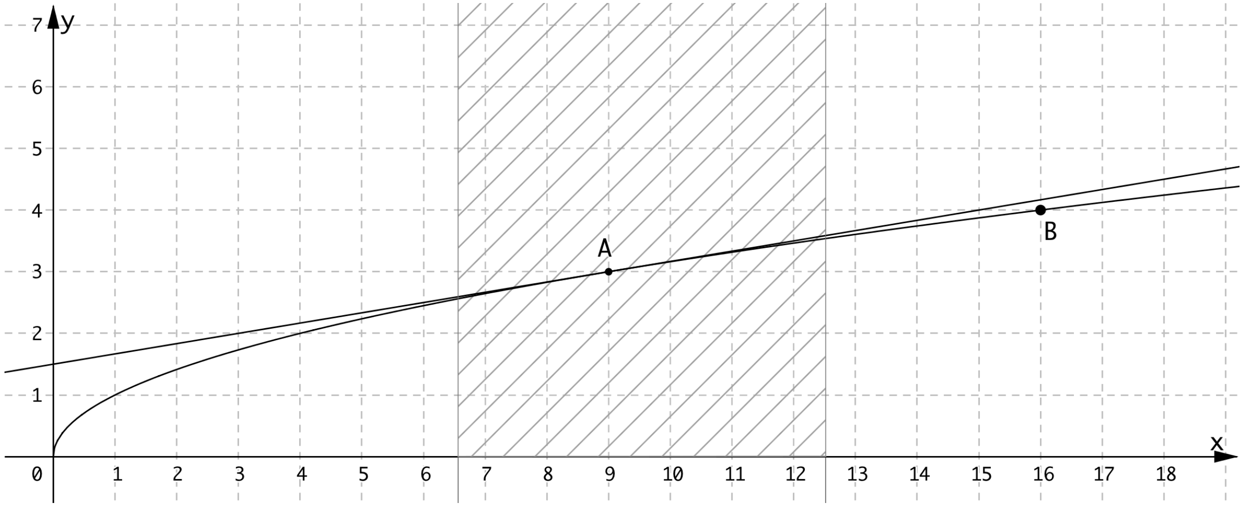
$$m = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ist die x-Koordinate von A eine Quadratzahl w^2, so hat der Punkt A die Koordinaten (w^2;w) und die Tangente die Steigung

$$m = \frac{1}{2w}$$

Näherungen für Wurzeln

Warum funktioniert es?



Zum näherungsweisen Ermitteln der Wurzel (Funktionswert) läuft man nun auf der Tangente ein Stück nach rechts/links.

Man erkennt an der Grafik, dass die so ermittelte Näherung immer größer ist als der tatsächliche Wert, und die Näherung schlechter wird, wenn man sich vom Tangentenberührpunkt entfernt.
Daher ist es wichtig, die nächst liegende Quadratzahl zu ermitteln und zu verwenden.

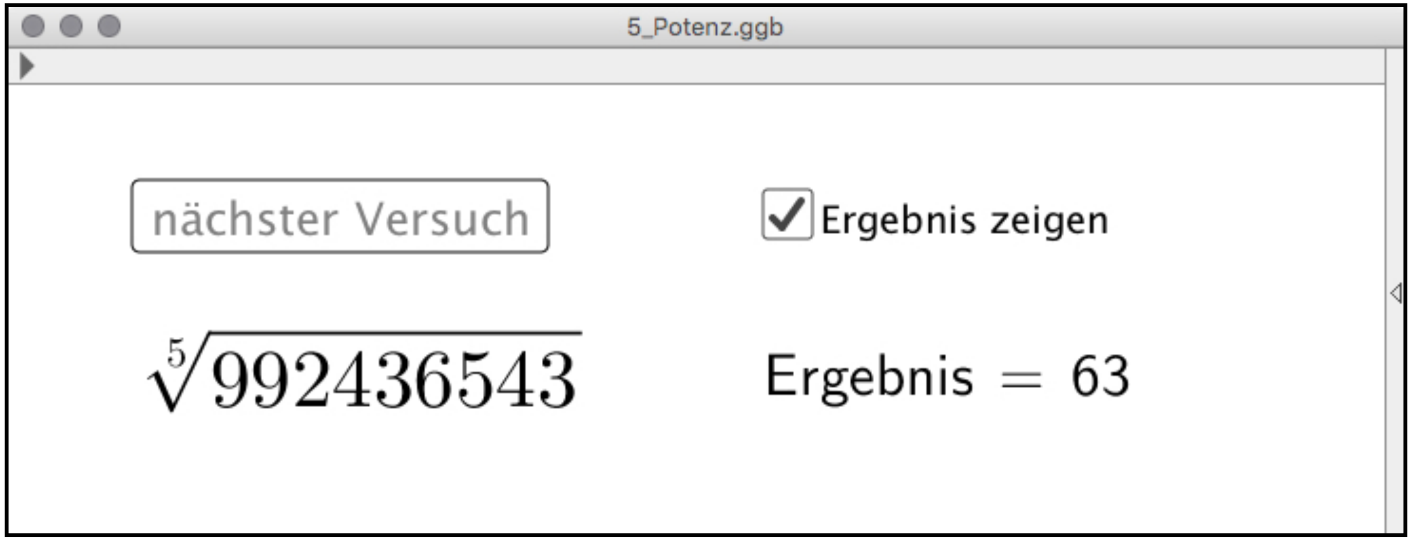
Die 5.Wurzel aus einer 10-stelligen Zahl

32	33554432

hoch 5 →

← 5. Wurzel

Das Ergebnis soll „glatt" aufgehen



Die 5.Wurzel aus einer 10-stelligen Zahl

32	33554432

— hoch 5 →

← 5. Wurzel —

Man muss die Tabelle der 5. Potenzen auswendig lernen.
Die Einerstelle wird direkt übernommen.
Die letzten 5 Stellen streichen und aus der verbleibenden Zahl die Zehnerstelle abschätzen.

Ausgangs-zahl	5. Potenz
1	1
2	32
3	243
4	1.024
5	3.125
6	7.776
7	16.807
8	32.768
9	59.049
10	100.000