

Nachtrag: Schriftliches Berechnen von Wurzeln

$$\sqrt{11} = 3,31$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline \end{array}$$

$$200 : 6x$$

$$\begin{array}{r} 189 \\ \hline \end{array}$$

$$1100 : 66x$$

$$\begin{array}{r} 661 \\ \hline \end{array}$$

$$43900 : 662x$$

Man holt immer zwei Stellen herunter und teilt durch das Doppelte des bisher erhaltenen Ergebnisses.

Nachtrag: Schriftliches Berechnen von Wurzeln

Was steckt dahinter?

1. Schritt: $\sqrt{w} \approx a$
 a^2

Rest: $r_1 = w - a^2$

2. Schritt: Die Näherung durch a wird um ein Stück b verbessert:

$$\sqrt{w} \approx a + b$$

$$\text{also } w \approx (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Rechnung für den 2. Schritt: $w - a^2 = r_1 \approx 2ab + b^2 = b(2a + b)$

$$\text{also } b \approx r_1 : (2a + b)$$

Man muss also den Rest der Rechnung durch das Doppelte von a (das bisherige Ergebnis) plus dem unbekanntem b teilen.

Vertrauen ist gut -
Kontrolle ist besser

Prüfziffern und Teilungsreste

Die Magie der Quersumme

99	♁	79	☆	59	⊗	39	♁	19	🔔
98	❄️	78	♁	58	😊	38	😊	18	♈
97	☆	77	♈	57	♁	37	❖	17	🌊
96	♁	76	♈	56	♁	36	♈	16	♈
95	💧	75	💧	55	🌀	35	📖	15	⊗
94	♈	74	♁	54	♈	34	❖	14	⊗
93	♈	73	😊	53	♁	33	♁	13	♁
92	💧	72	♈	52	♁	32	📖	12	😊
91	🔔	71	♁	51	◯	31	❖	11	⚙️
90	🌀	70	+	50	⊗	30	📖	10	☯️
89	🌙	69	♈	49	♁	29	♁	9	♈
88	📖	68	♈	48	♁	28	💧	8	♈
87	□	67	♁	47	⊗	27	♈	7	◯
86	☆	66	🌙	46	🌊	26	☆	6	❄️
85	♈	65	📖	45	♈	25	⊗	5	♈
84	♁	64	⊗	44	♁	24	□	4	🌀
83	🌙	63	♈	43	☆	23	🌊	3	❖
82	☆	62	♁	42	🌙	22	♈	2	🌙
81	♈	61	⊗	41	🌀	21	☯️	1	♁
80	♁	60	⚙️	40	♁	20	😊	0	♈

Magische Zeichen

Rechenproben

Die einfachste Probe ist die Quersummenprobe oder Neunerprobe

$$\begin{array}{r|l} 237 & 12 \\ +366 & 15 \\ \hline =603 & | 9 | 27 \rightarrow 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 703 & 10 \\ -246 & 12 \\ \hline =457 & | 16 | -2 \rightarrow +9 = 7 \\ & \rightarrow 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{513 \cdot 26} & \underline{9 \cdot 8} \\ 1026 & 72 \rightarrow 9 \\ 3078 & \\ \hline 13338 & | 18 \rightarrow 9 \end{array}$$

Prüfziffern

Wieso Prüfziffern?

Schreib-/Übermittlungsfehler:

- 1) Klabantermann → Klabaftermann
- 2) 04215371894 → ??

Redundanz - zusätzliche, „überflüssige“ Information

- 1) fehlererkennender, selbstkorrigierender Code
- 2) nicht redundanter Code - keine Fehlererkennung

Für 17.000 Wörter reichen (ohne Redundanz)
dreibuchstabile Wörter aus.

ISBN-Nummern

Internationale **S**tandard**B**uch**N**ummer

Die Prüfziffer der neuen, 13-stelligen ISBN-Nummern

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 9 & 7 & 8 & - & 3 & - & 8 & 3 & 4 & 8 & - & 1 & 7 & 5 & 7 & - & 0 \\ | & | & | & & | & & | & | & | & | & & | & | & | & | & & \\ \times 1 & \times 3 & \times 1 & & \times 3 & & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & & \\ 9+21+8+ & 9 & + & 8+9+4+24+1+21+5+21=140 \end{array}$$

Von der Ergebnisssumme wird die Einerziffer genommen
(= Teilungsrest beim Teilen durch 10)

Ist die Einerziffer 0, ist die Prüfziffer 0.

Ist die Einerziffer ungleich 0, so ist deren Differenz von 10 die Prüfziffer.

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Bisher: Kontonummern hatten auch Prüfziffern, aber jede Bank hatte ein eigenes System.

Die Bundesbank veröffentlichte (bei Bedarf neue) Dokumente dafür. Letzter Stand Frühjahr 2014:
82 DIN A 4 Seiten Berechnungsmethoden für die Prüfziffern plus
Excel-Tabelle mit ca. 19.000 Einträgen für alle Banken Deutschlands und deren verwendete Methode aus der 82-seitigen Auflistung

Die IBA-Nummer

Beispiel:

Kennzeichen	Berechnungsmethode für Prüfziffern
<p>A8</p> <p>gültig seit 08.09.2003, zuletzt geändert zum 07.03.2005</p>	<p>Die Kontonummer ist durch linksbündige Nullenauffüllung 10-stellig darzustellen. Die 10. Stelle ist per Definition die Prüfziffer.</p> <p>Variante 1: Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7</p> <p>Die Stellen 4 bis 9 der Kontonummer werden von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7 multipliziert. Die weitere Berechnung und die möglichen Ergebnisse entsprechen dem Verfahren 06. Führt die Berechnung nach Variante 1 zu einem Prüfzifferfehler, so sind die Konten nach Variante 2 zu prüfen.</p> <p>Stellennr.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A (A=10) Kontonr.: x x x x x x x x x P Gewichtung: 7 6 5 4 3 2</p> <p>Testkontonummern (richtig): 7436661, 7436670, 1359100 Testkontonummern (falsch): 7436660, 7436678</p> <p>Variante 2: Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1</p> <p>Die Stellen 4 bis 9 der Kontonummer werden von rechts nach links mit den Ziffern 2, 1, 2, 1, 2, 1 multipliziert. Die weitere Berechnung und die möglichen Ergebnisse entsprechen dem Verfahren 00.</p> <p>Stellennr.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A (A=10) Kontonr.: x x x x x x x x x P Gewichtung: 1 2 1 2 1 2</p> <p>Testkontonummern (richtig): 7436660, 7436678, 0003503398, 0001340967 Testkontonummern (falsch): 7436666, 7436677, 0003503391, 0001340966</p> <p>Ausnahme: Ist nach linksbündiger Auffüllung mit Nullen auf 10 Stellen die 3. Stelle der Kontonummer = 9 (Sachkonten), so erfolgt die Berechnung gemäß der Ausnahme in Methode 51 mit den gleichen Ergebnissen und Testkontonummern.</p>

t Number

verwendet von der
Sparda-Bank Berlin

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Kontonummer: **123456** max. 10-stellig

Bankleitzahl: **25000101** 8-stellig

D	E	p	p	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Mache aus der 22-stelligen IBAN eine 24-stellige Zahl.

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

D E

Berechne von dieser Zahl den Teilungsrest beim Teilen durch 97. Ist er nicht 0, subtrahiere diesen Rest von 98. Das ist die zweistellige Prüfziffer. Ist der Teilungsrest 0, ist die Prüfziffer 00.

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Die Rechnung (spezieller Taschenrechner, der 24-stellige Zahlen nicht rundet) liefert den Teilungsrest 66. Also ist die zweistellige Prüfzahl $98 - 66 = 32$.

Die IBAN lautet dann.

D	E	3	2	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Die IBA-Nummer

International **B**ank **A**ccount **N**umber

Test einer IBAN mit der Prüfzahl.

D	E	3	2	2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Die IBAN wird wieder in eine 24-stellige Zahl verwandelt, nun wird aber die Prüfzahl am Ende statt der zwei Nullen eingesetzt.

2	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	3	1	4	3	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Diese 24-stellige Zahl muss beim Teilen durch 97 einen Rest von 1 lassen, ansonsten ist sie falsch (aufgeschrieben worden).

Rechnen mit Resten

Die Theorie

$$\text{Rest}_n(a+b) = \text{Rest}_n(a+\text{Rest}_n(b)) = \text{Rest}_n(\text{Rest}_n(a)+\text{Rest}_n(b))$$

$$\text{Rest}_7(80) = \text{Rest}_7(70+10) = \text{Rest}_7(\text{Rest}_7(70)+\text{Rest}_7(10)) = 3$$

$$\text{Rest}_n(a-b) = \text{Rest}_n(a-\text{Rest}_n(b)) = \text{Rest}_n(\text{Rest}_n(a)-\text{Rest}_n(b))$$

$$\text{Rest}_7(-10) = \text{Rest}_7(60-70) = \text{Rest}_7(\text{Rest}_7(60)-\text{Rest}_7(70)) = 4$$

$$\text{Rest}_n(a \cdot b) = \text{Rest}_n(a \cdot \text{Rest}_n(b)) = \text{Rest}_n(\text{Rest}_n(a) \cdot \text{Rest}_n(b))$$

$$\text{Rest}_7(100) = \text{Rest}_7(10 \cdot 10) = \text{Rest}_7(\text{Rest}_7(10) \cdot \text{Rest}_7(10))$$

$$= \text{Rest}_7(3 \cdot 3) = \text{Rest}_7(9)$$

$$= 2$$

Rechnen mit Resten

Die Praxis 1a: Teilbarkeitsregeln

Die Teilbarkeit durch 9 (und 3): Quersummenregel

$$\begin{aligned}\text{Rest}_9(abc) &= \text{Rest}_9(100a+10b+c) \\ &= \text{Rest}_9(\text{Rest}_9(100)\cdot a + \text{Rest}_9(10)\cdot b + c) \\ &= \text{Rest}_9(1 \cdot a + 1 \cdot b + c) \\ &= \text{Rest}_9(a + b + c)\end{aligned}$$

Das gilt für beliebig große Zahlen, da alle Zehnerpotenzen (10, 100, 1000, ... beim Teilen durch 9 den Rest 1 lassen.

Rechnen mit Resten

Die Praxis 1b: Teilbarkeitsregeln

Die Teilbarkeit durch 4: Letzte beiden Ziffern

$$\begin{aligned}\text{Rest}_4(\text{abcd}) &= \text{Rest}_4(1000a+100b+10c+d) \\ &= \text{Rest}_4(\text{Rest}_4(1000)\cdot a + \text{Rest}_4(100)\cdot b + 10c + d) \\ &= \text{Rest}_4(0 \cdot a + 0 \cdot b + 10c + d) \\ &= \text{Rest}_4(10c + d)\end{aligned}$$

Das gilt für beliebig große Zahlen, da 100 und alle größeren Zehnerpotenzen (100, 1000, 10000, ...) beim Teilen durch 4 den Rest 0 lassen. Die entsprechenden Ziffern müssen nicht berücksichtigt werden.

Rechnen mit Resten

Die Praxis 2: Die Prüfziffer der IBAN

Sie kennen von einer Bankverbindung die BLZ und Kontonummer, nicht aber die IBAN.

Kontonummer: 17428

BLZ: 250 201 01

	2	5	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	7	4	2	8	1	3	1	4	0	0
=	2	5	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+														1	7	4	2	8	0	0	0	0	0	0
+																			1	3	1	4	0	0

Also: $25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^6 + 131.400$

Rechnen mit Resten

Die Praxis 2: Die Prüfziffer der IBAN

Kontonummer: 17428

BLZ: 250 201 01

Also: $25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^6 + 131.400$

10 Milliarden

$$\begin{aligned} & \text{Rest}_{97}(25.020.101 \cdot 10^{16} + 17.428 \cdot 10^6 + 131.400) \\ &= \text{Rest}_{97}(25.020.101 \cdot \text{Rest}_{97}(10^{16}) + 17.428 \cdot \text{Rest}_{97}(10^6) + \text{Rest}_{97}(131.400)) \\ &= \text{Rest}_{97}(25.020.101 \cdot 62 + 17.428 \cdot 27 + 62) \\ &= \text{Rest}_{97}(1.551.716.880) \\ &= 23 \quad \text{Also ist die Prüfzahl } 98 - 23 = 75 \quad \text{IBAN: DE75 2502 0101 0000 0174 28} \end{aligned}$$