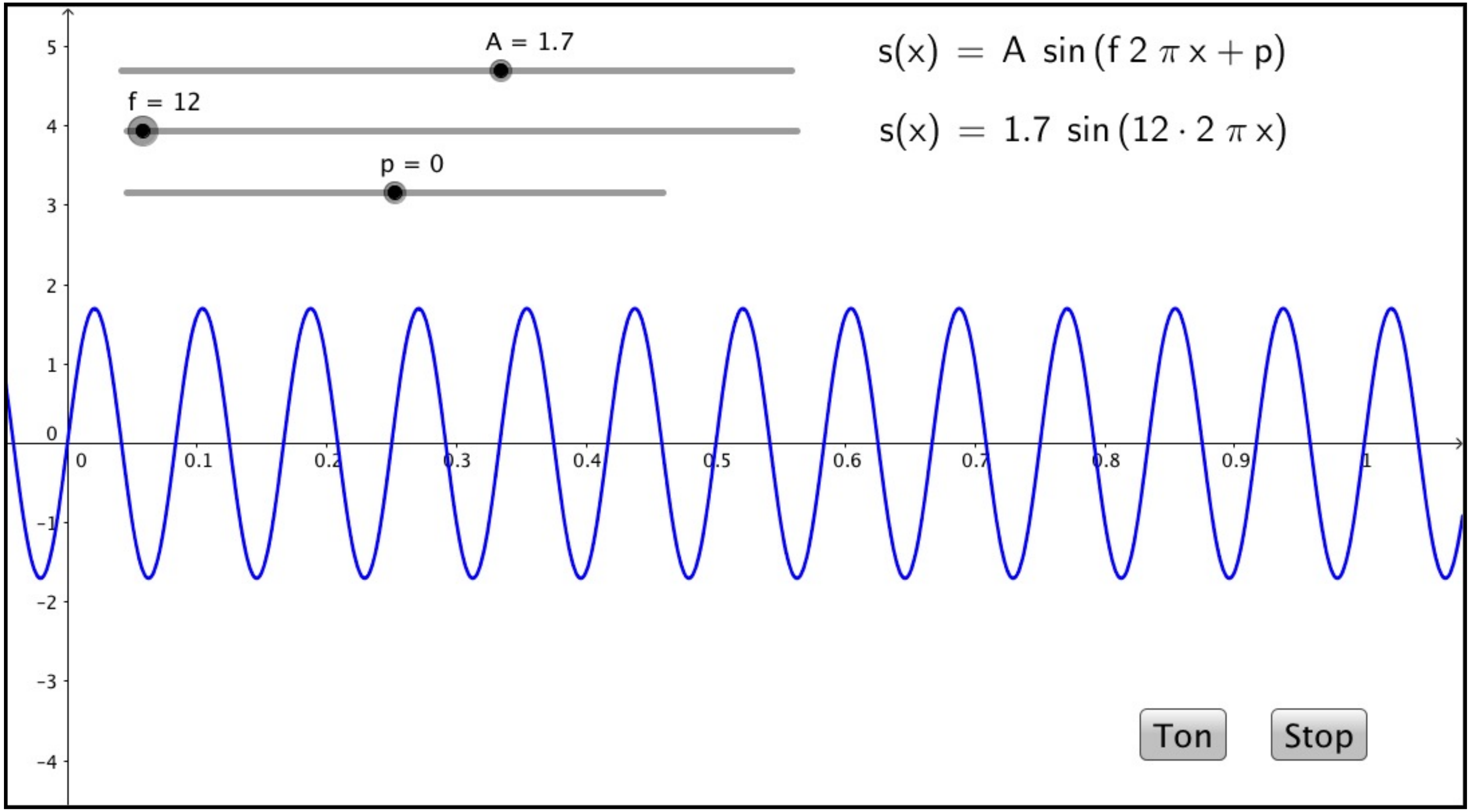
# Das Pythagoreische Komma

# Grundlagen

## Kenngrößen Amplitude, Frequenz, Phase




F2

# Grundlagen

## Einheiten für Frequenz und Lautstärke

Frequenz: Hertz (Heinrich Hertz,1857 - 1894)

Ein Signal (Ton) hat die Frequenz von $n$ Hz, wenn es $n$ Schwingungen pro Sekunde macht.

Lautstärke: Bel (Alexander Graham Bell,1847 - 1922)

Ein Ton hat die Lautstärke von $n$ Bel = $10n$ Dezibel, wenn der Schalldruck $10^n$ Mal größer ist als der Schalldruck bei der Hörschwelle. Das Maß ist ein logarithmisches Maß, was schnell zu Fehlinterpretationen und Missverständnissen führt. (normale Unterhaltung 4 bis 6 Bel, also 40 bis 60 Dezibel).

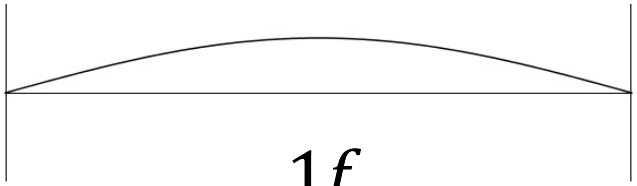
# Töne erzeugen

Ein schwingungsfähiger Gegenstand wird in Schwingungen versetzt.
Je nach Gestalt, Material und Spannung hören wir einen Ton in einer bestimmten Höhe.

- eine Saite wird gezupft, angeschlagen, gestrichen
- ein Trommel wird geschlagen
- eine Glocke wird angeschlagen
- eine Flöte wird angeblasen

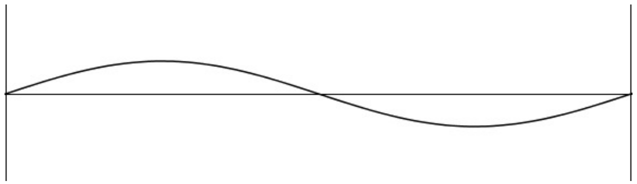
# Obertöne (theor.)

Aber: Ein Ton kommt nie allein.



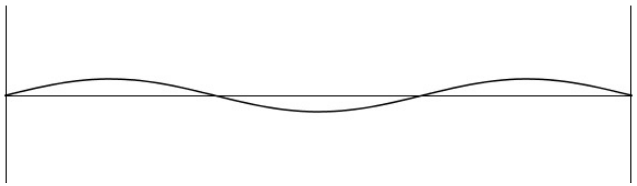
$1f$

Grundton



$2f$

1. Oberton



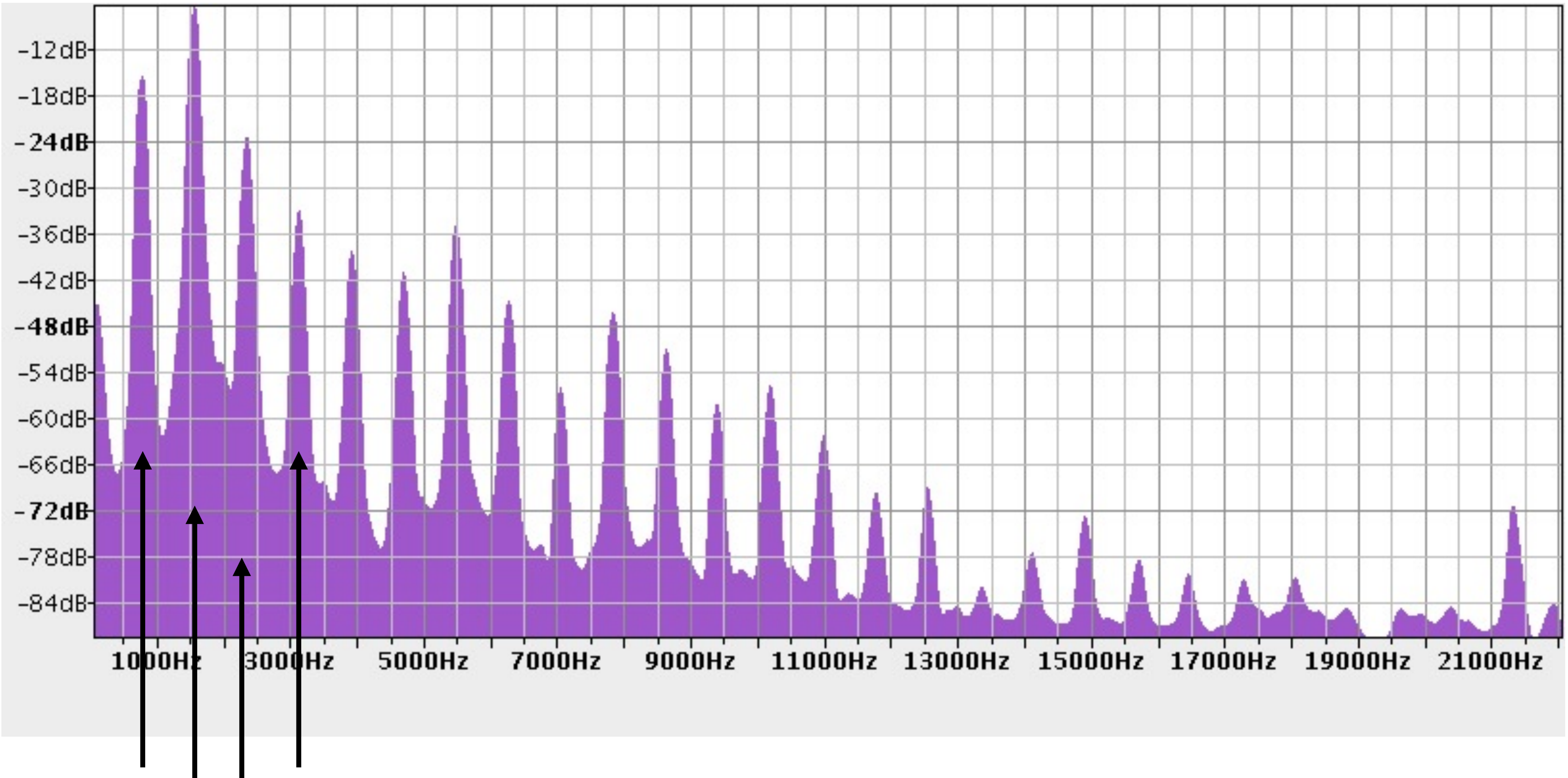
$3f$

2. Oberton

F5

# Obertöne (praktisch)

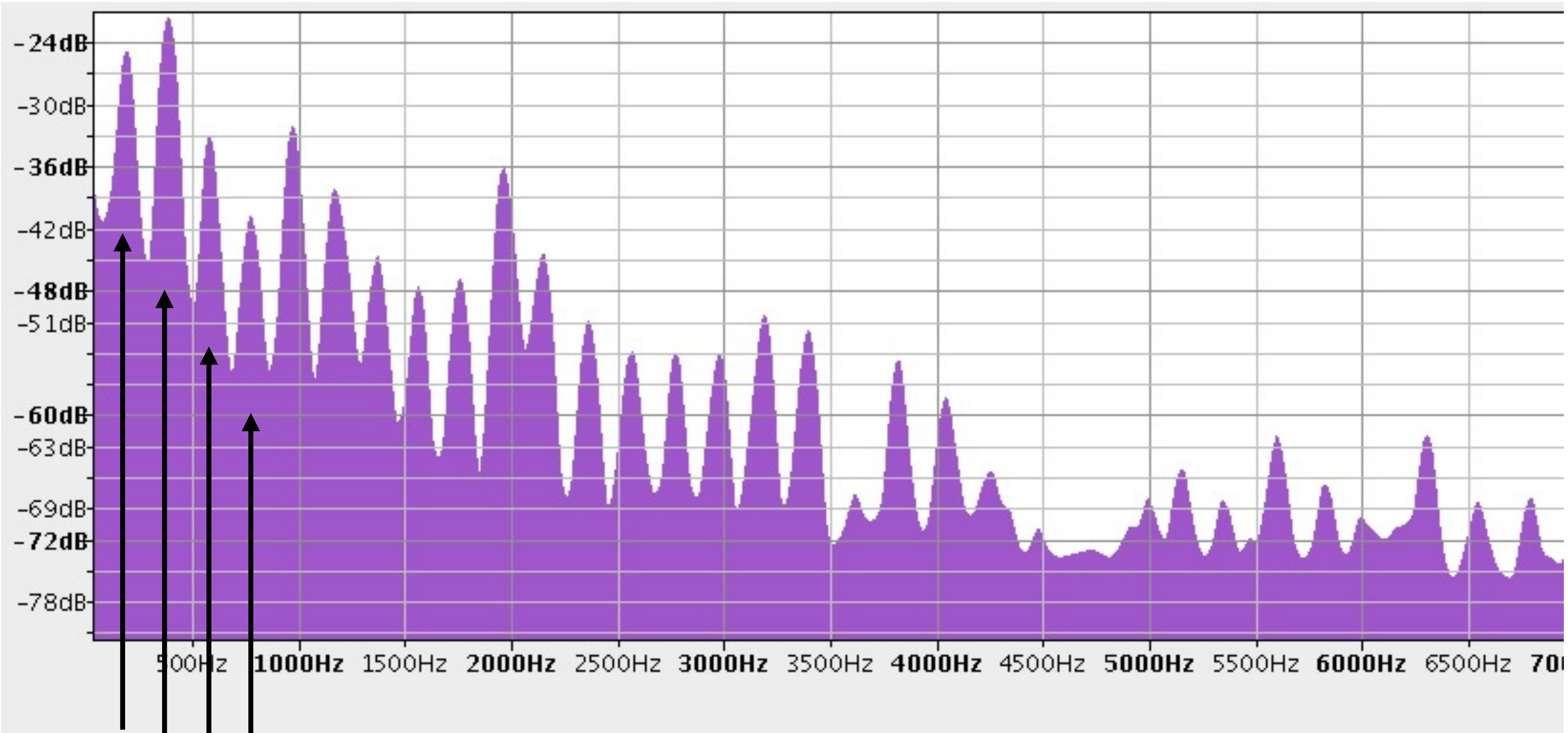
Blockflöte




795Hz 3138Hz
1576Hz
2358Hz

# Obertöne (praktisch)

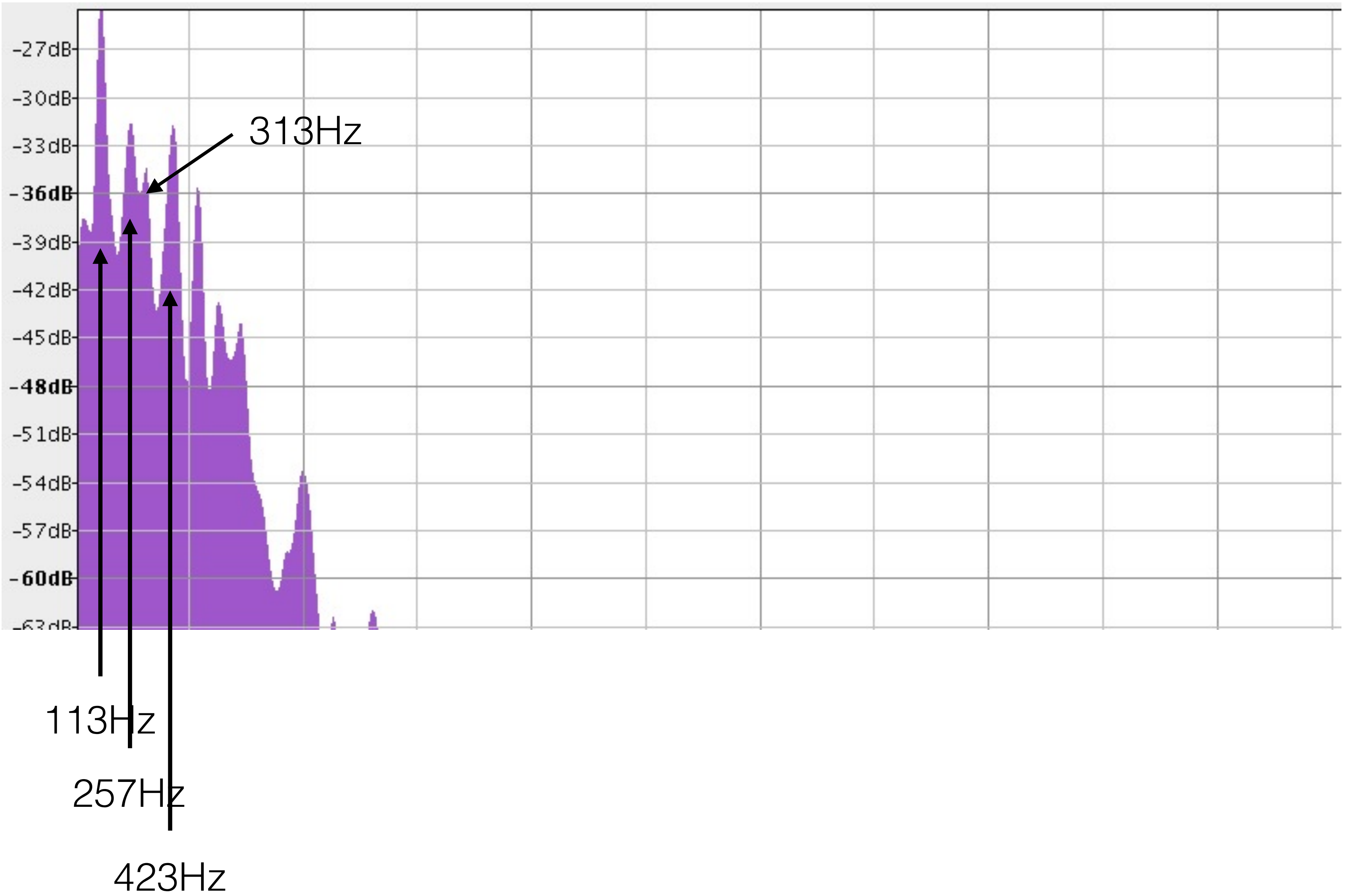
Gitarrensaite




195Hz
391Hz
582Hz
775Hz

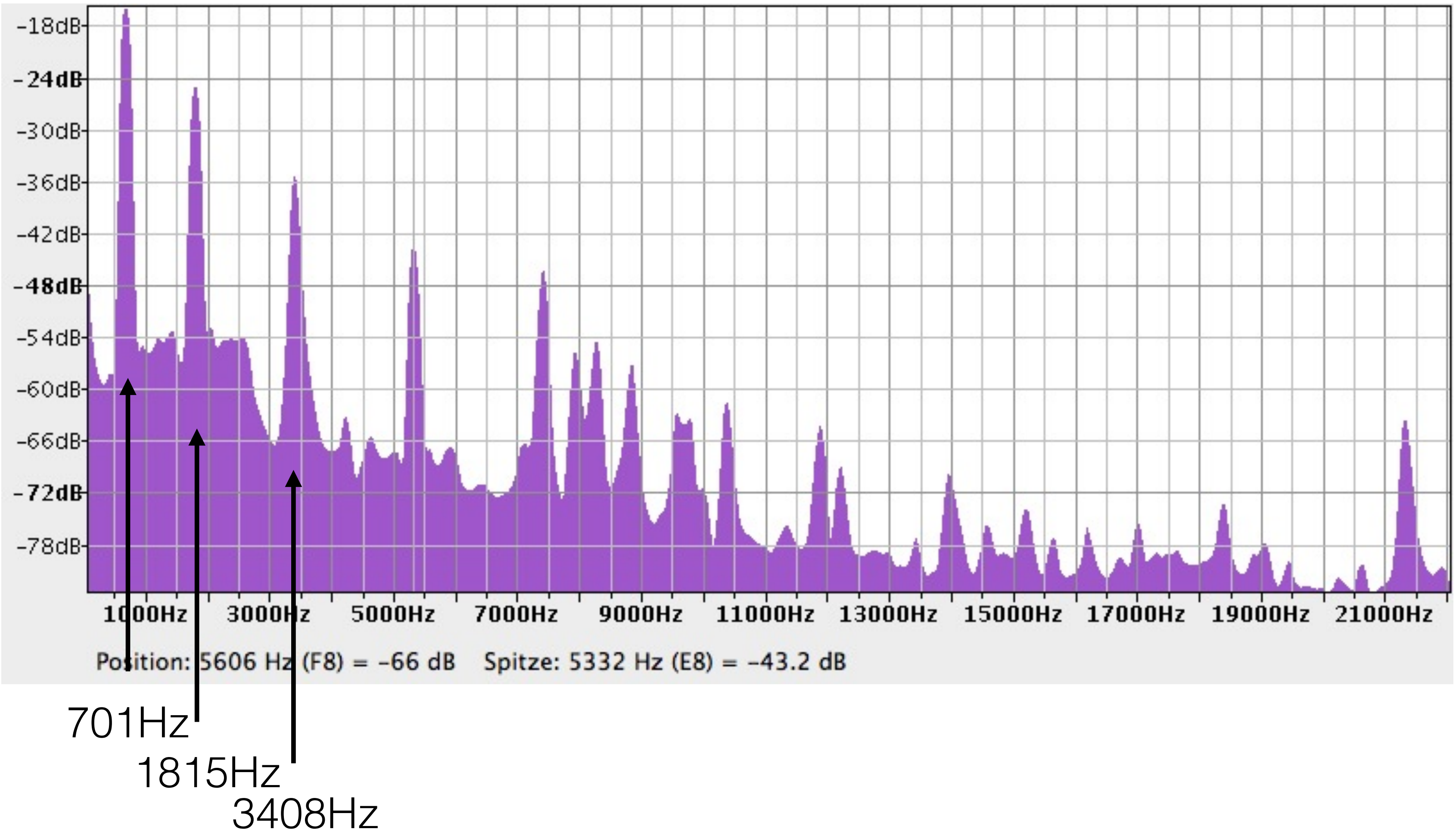
# Obertöne (praktisch)

## Gitarrenkörper



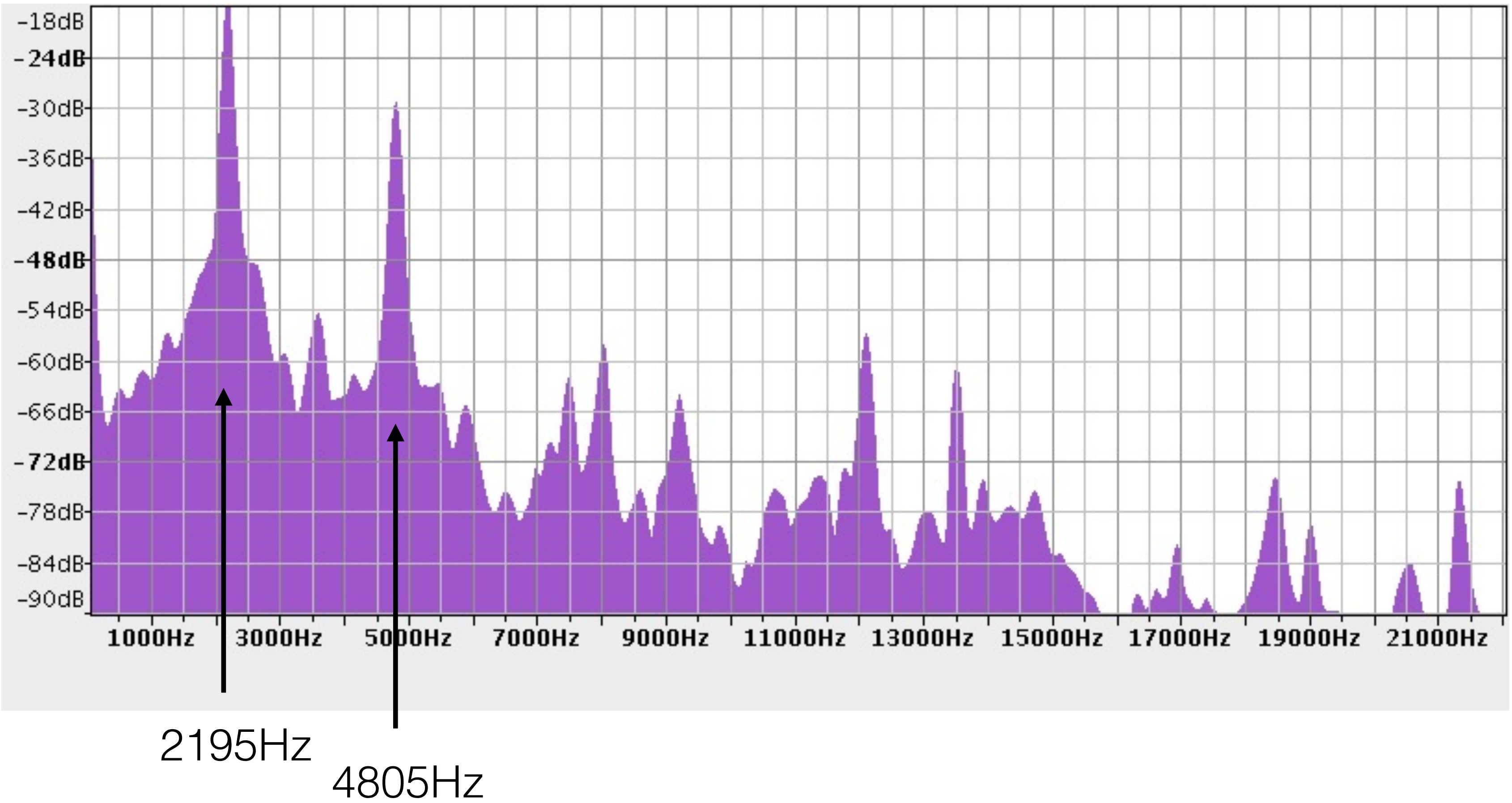
# Obertöne (praktisch)

Weinglas



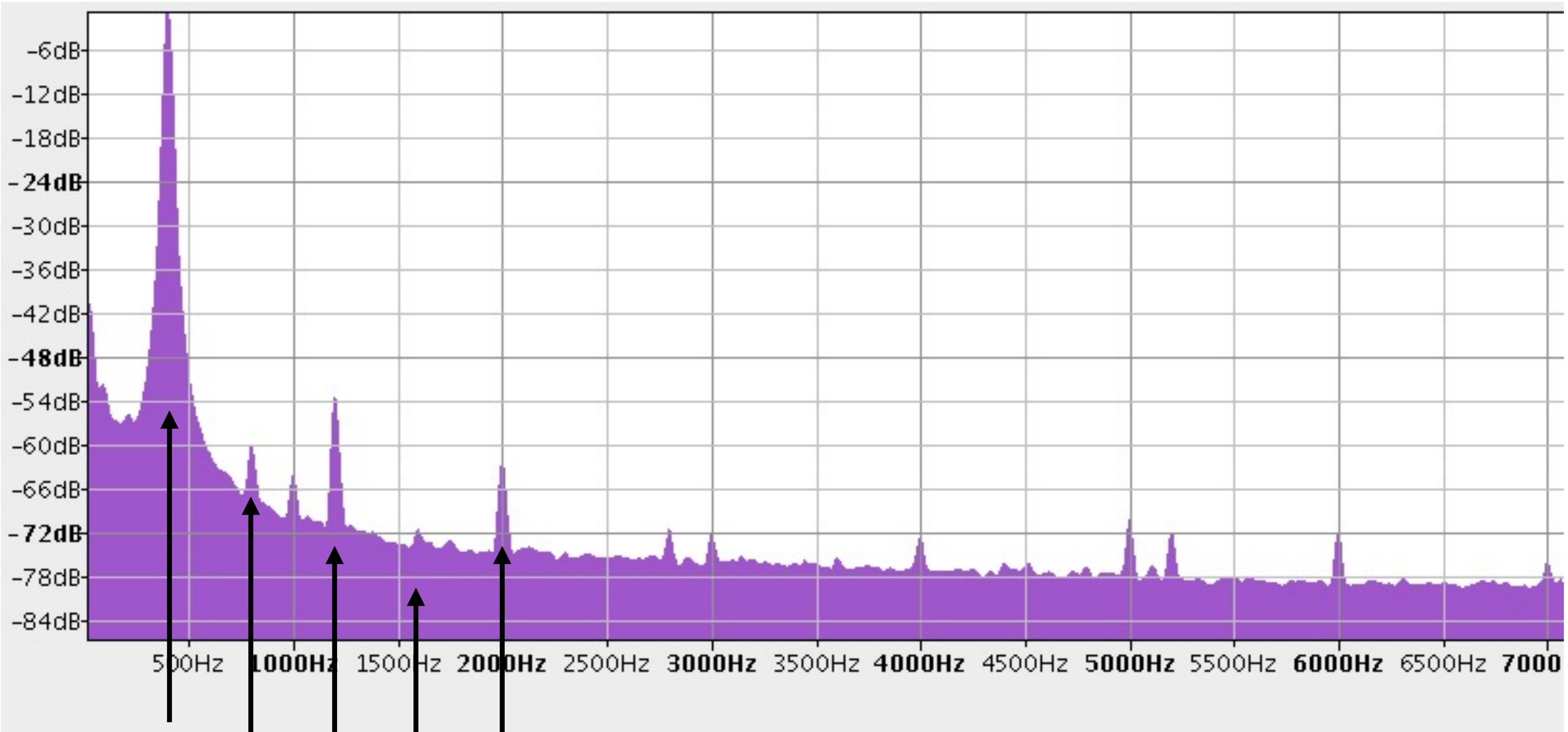
# Obertöne (praktisch)

Wasserglas



# Obertöne (praktisch)

Sinuston



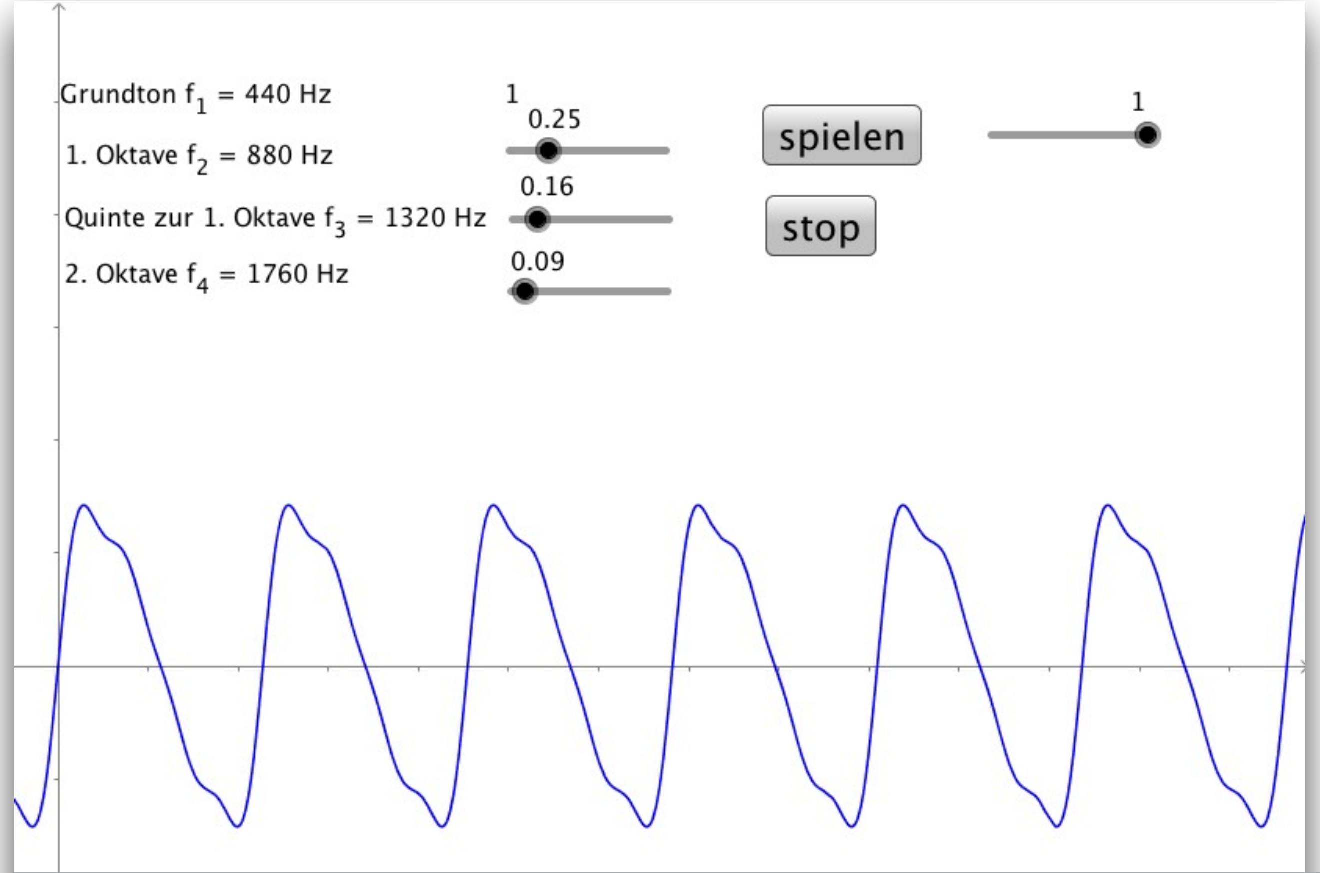

400Hz

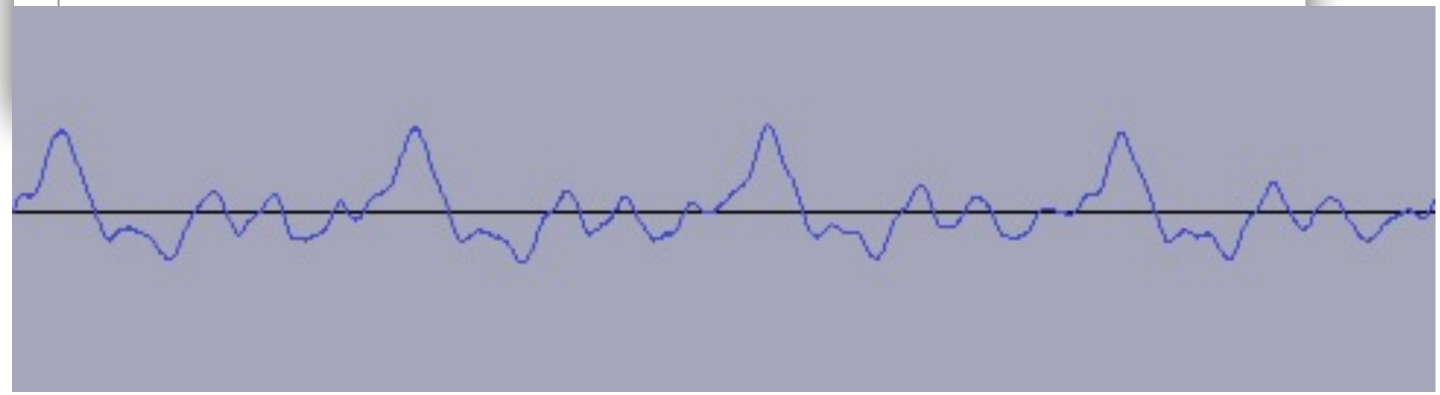
797Hz

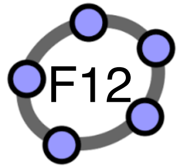
1198Hz 1989Hz

1593Hz

# Das Zusammensetzen von Tönen





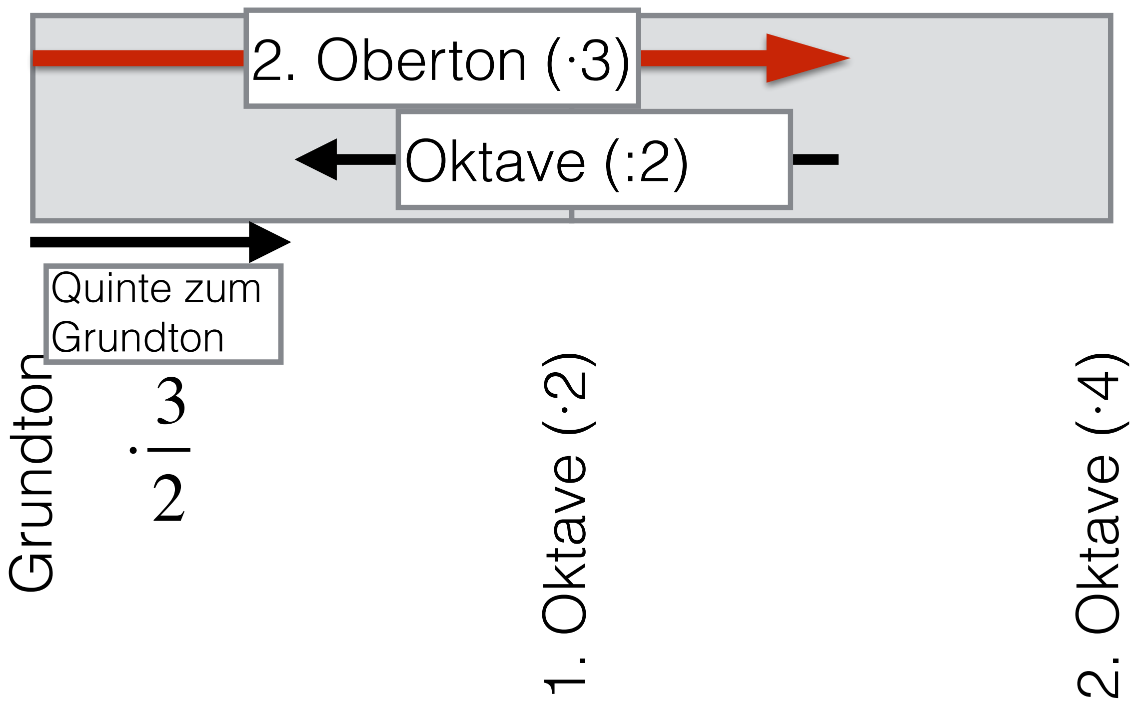
# Die Oktave

Die Oktave (Verdoppelung der Frequenz) ist die Grundeinteilung der Tonhöhen.

In diesem Tonhöhenabstand wiederholt sich die Einteilung in verschiedene Tonhöhen - Töne.

Der um eine Oktave höhere Ton wird gegenüber dem Grundton nicht als neuer Ton empfunden.

# Die Quinte




Die Quinte zum Grundton ist der Ton mit der $\frac{3}{2}$=1,5-fachen Frequenz des Grundtons.

# Pythagoras

Sein Motto: „Alles ist Zahl“

Harmonie zeigt sich in einfachen Zahlenverhältnissen

Quinte -> $\cdot\frac{3}{2}$ -> damit weitere Töne erzeugen

$$1 \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} \frac{9}{4} \xrightarrow{:2} \frac{9}{8}$$

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\text{Quinte}} \mathbf{G} \qquad \mathbf{G} \xrightarrow{\text{Quinte}} \mathbf{D'} \xrightarrow{\text{Oktave}} \mathbf{D}$$

Fortsetzen, bis man wieder zum Grundton bzw.
eine Oktave höher gelangt.

# Zweier- und Dreierpotenzen

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \longleftarrow \text{Grundton}$$

Quintenschritte

gegebenenfalls Oktavschritte nach unten

$$\frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 \qquad \frac{3^n}{2^{n+k}} = 1 \qquad 3^n \approx 2^m$$

Die Einteilung der Oktave in Töne gelingt dann, wenn Dreier- und Zweierpotenzen nahe bei einander liegen.

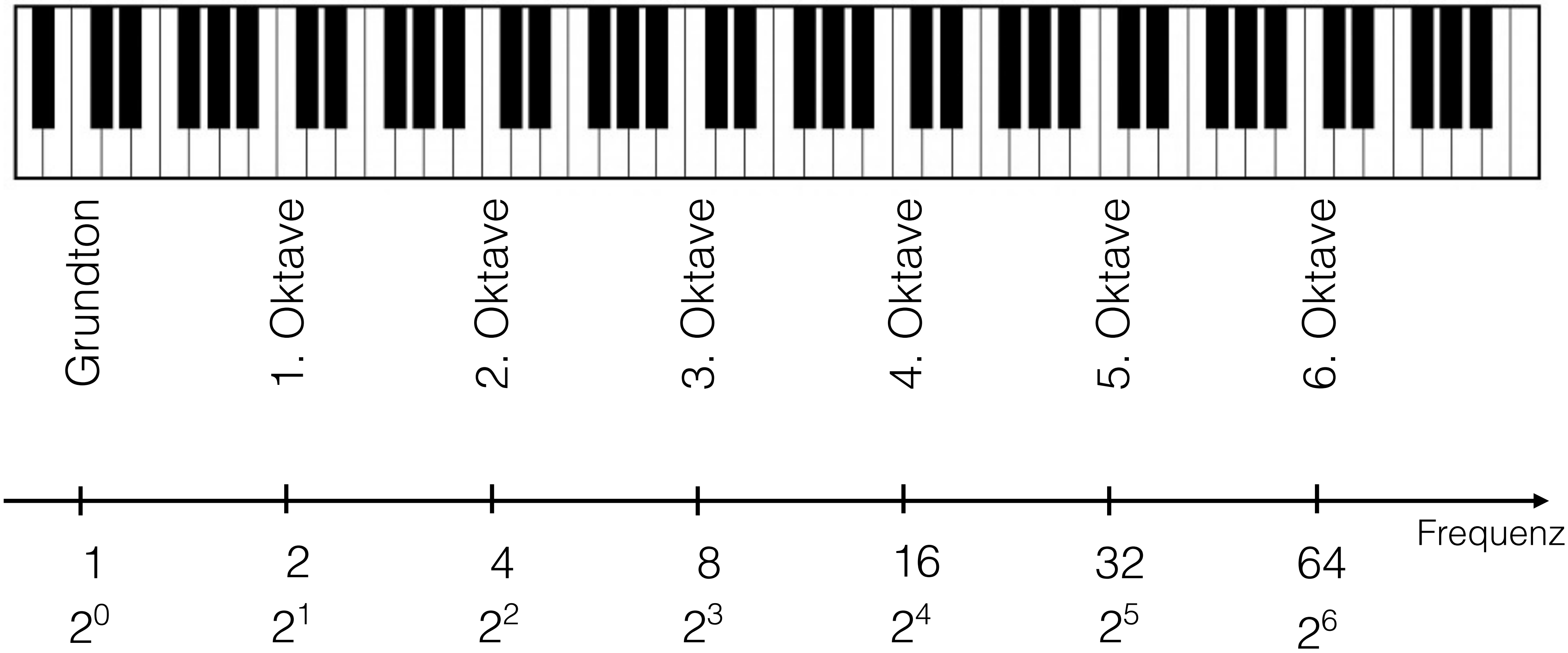
# Zweier- und Dreierpotenzen

| n | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 9 |
| 3 | 8 | 27 |
| 4 | 16 | 81 |
| 5 | 32 | 243 |
| 6 | 64 | 729 |
| 7 | 128 | 2.187 |
| 8 | 256 | 6.561 |
| 9 | 512 | 19.683 |
| 10 | 1.024 | 59.049 |
| 11 | 2.048 | 177.147 |
| 12 | 4.096 | 531.441 |
| 13 | 8.192 | 1.594.323 |
| 14 | 16.384 | 4.782.969 |
| 15 | 32.768 | 14.348.907 |

Arbeitsbögen

# Quintenzirkel

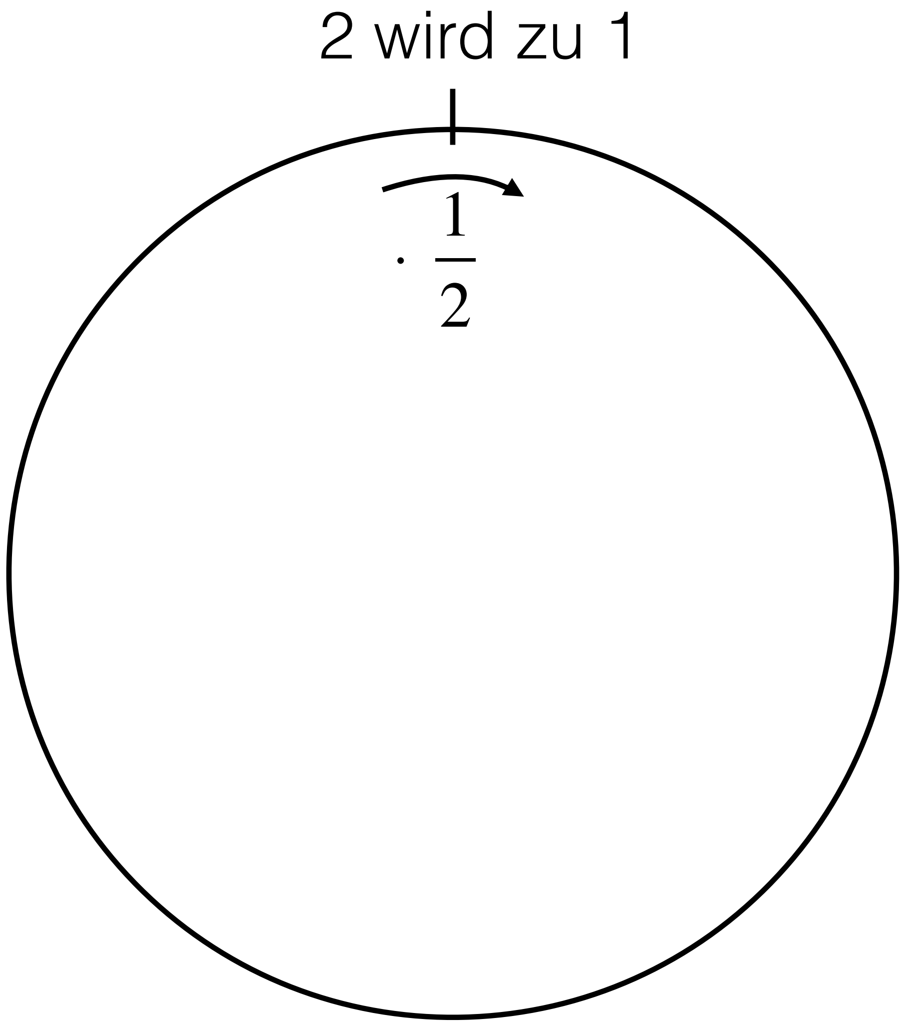
## Vorbereitung




Wir wickeln alle Oktavintervalle auf, so dass alle Töne, die genau eine Oktave auseinander liegen (Faktor 2), übereinander kommen.

# Quintenzirkel

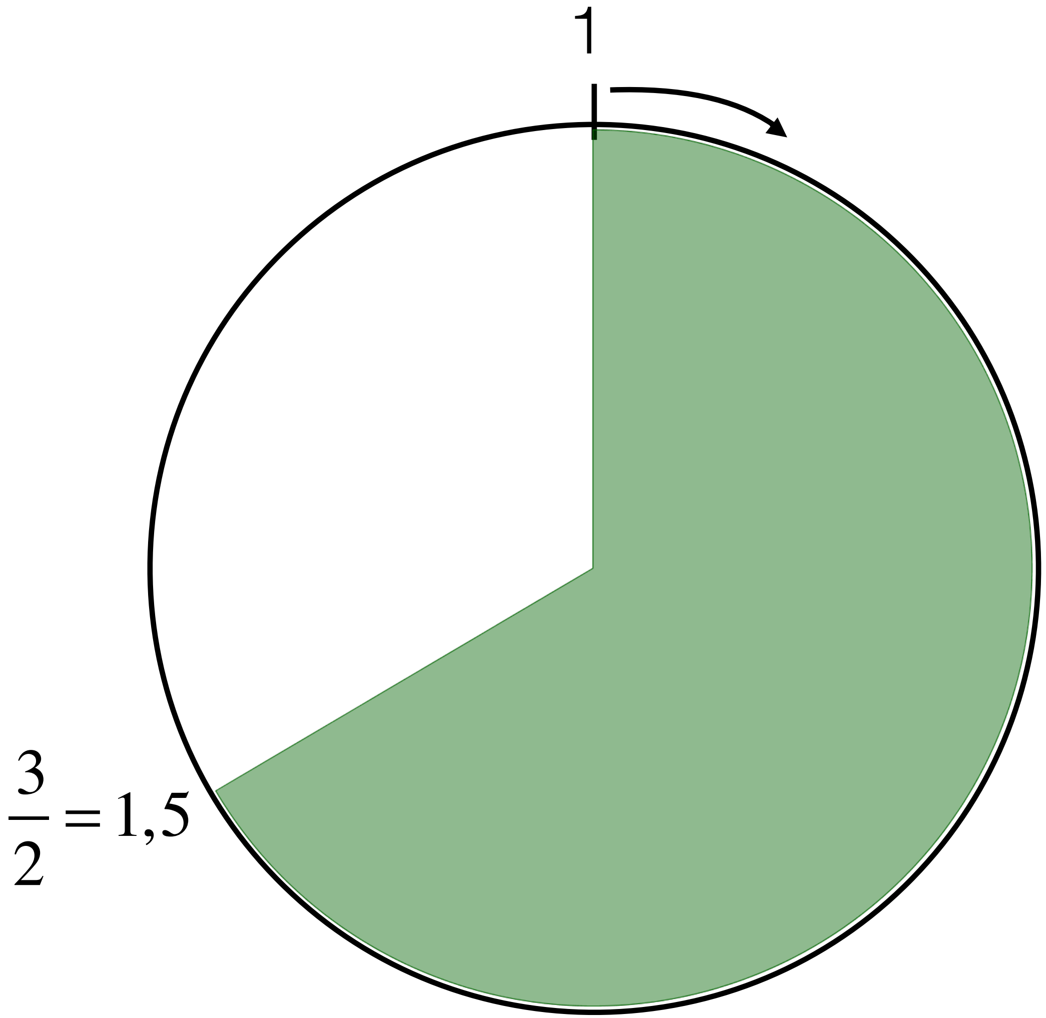
Eine Frequenzerhöhung ist eine Drehung im Uhrzeigersinn.




Kommt man über die 2, so wird die Frequenz halbiert, damit man letztlich in ein und derselben Oktave (im Intervall von 1 bis 2) bleibt.

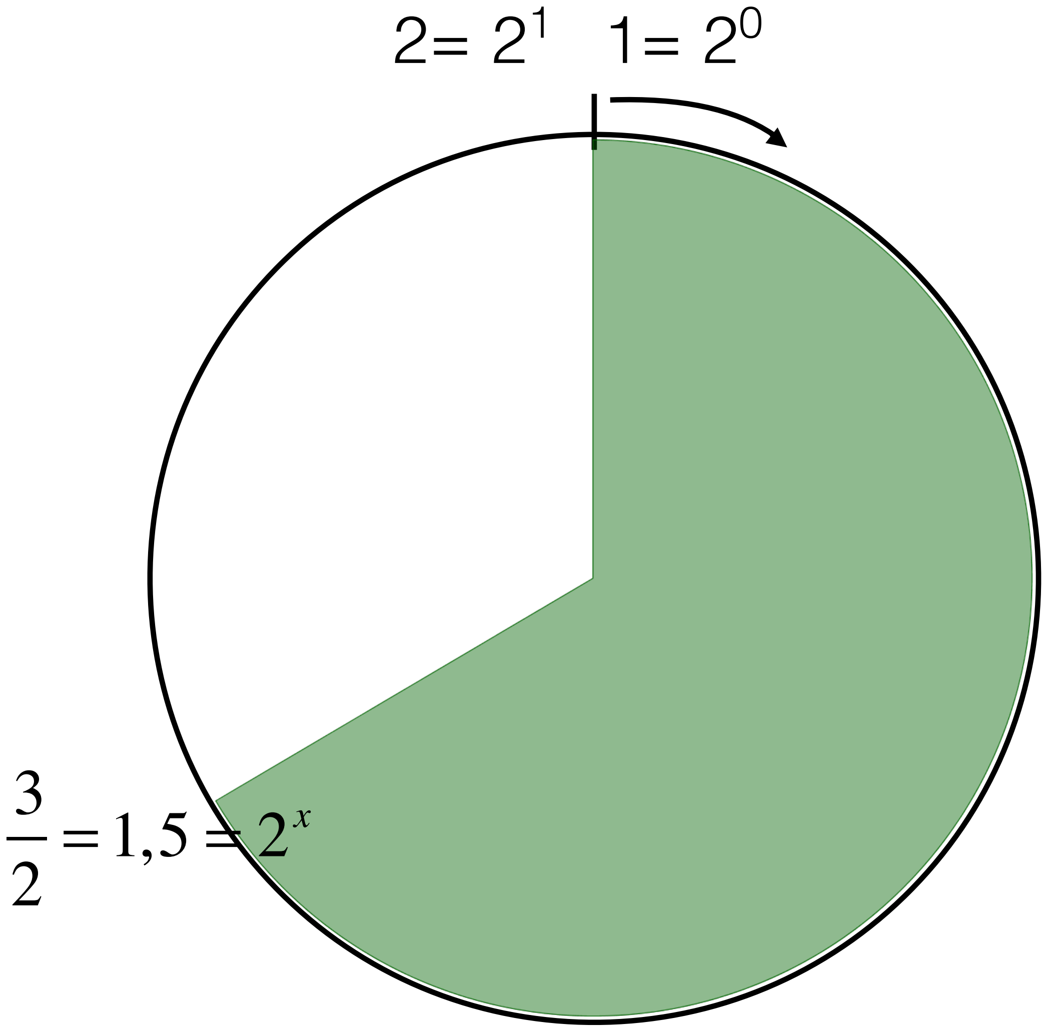
# Quintenzirkel

Die Quinte (Frequenzerhöhung mit $\frac{3}{2} = 1,5$ )
ist eine Drehung um 210,59°.



# Quintenzirkel

## Die Herleitung des Winkels.




$$2^x = \frac{3}{2} \quad | \log$$

$$\log 2^x = \log\left(\frac{3}{2}\right) \quad | \log a^b = b \cdot \log a$$

$$x \cdot \log 2 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

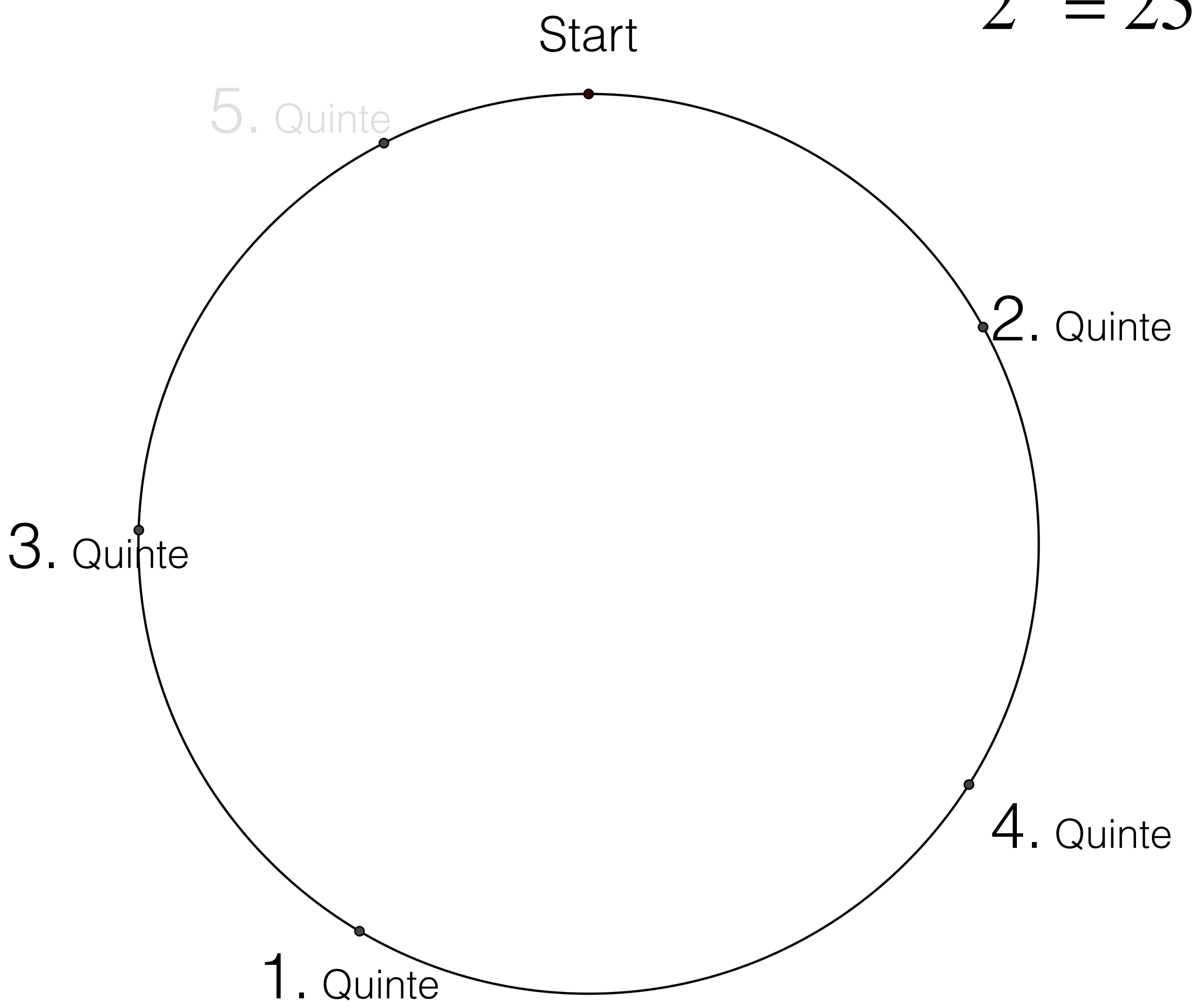
$$x = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log(2)} \approx 0{,}585$$

Für die Drehung:

$$\alpha = 360° \cdot x \approx 360° \cdot 0{,}585 \approx 210{,}5865°$$

# 1. Näherung: fünf Quinten

$$2^8 = 256 \approx 243 = 3^5$$




Die allererste Näherung
erhält man nach
fünf Quintenschritten.

$$5 \cdot 210{,}5865° = 1052{,}9325°$$

$$3 \cdot 360° = 1080°$$

$$\text{Differenz} = -27{,}0675°$$

# 2. Näherung: sieben Quinten

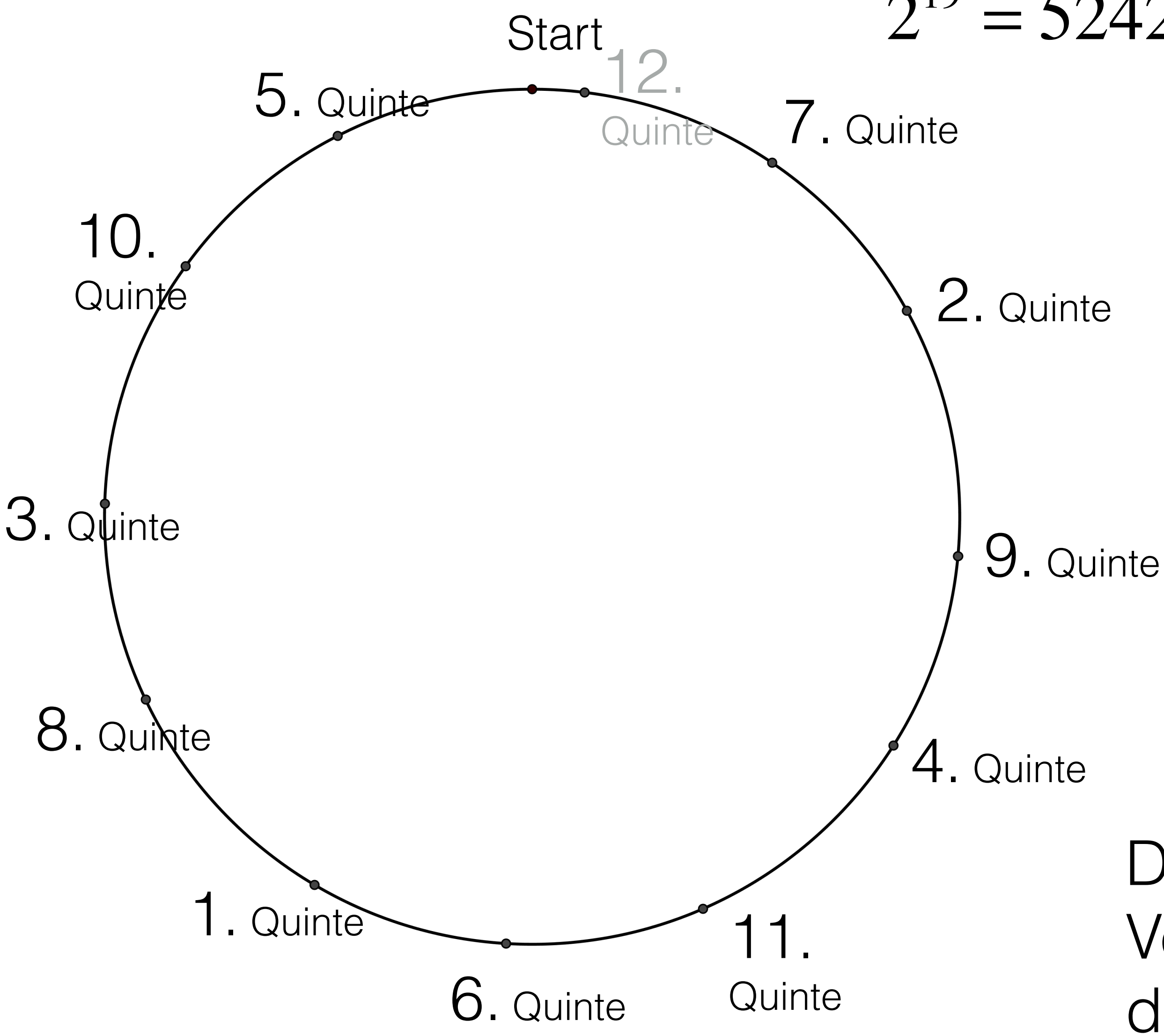
$$2^{11} = 2048 \approx 2187 = 3^7$$

Nach sieben Quintenschritten (und vier Oktav-verminderungen) kommt man wieder in die Nähe des Grundtons.

$$7 \cdot 210{,}5865° = 1474{,}1055°$$
$$4 \cdot 360° = 1440°$$
$$\text{Differenz} = 34{,}1055°$$

Das ist eine **schlechtere** Näherung als die in der Pentatonik.

# 3. Näherung: zwölf Quinten




$$2^{19} = 524288 \approx 531441 = 3^{12}$$

Die nächste, bessere Näherung erhält man nach 12 Quinten-schritten.

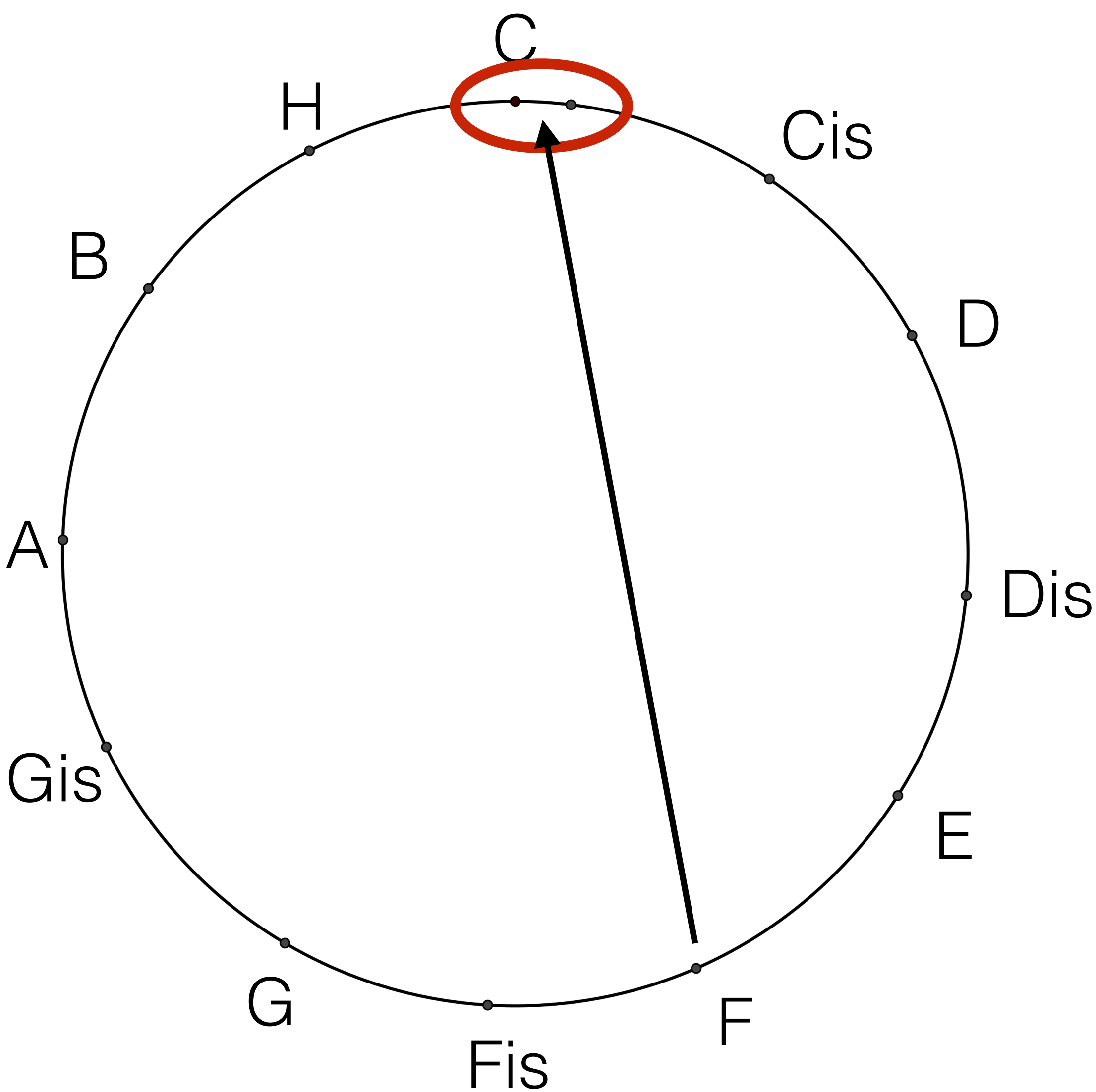
$$12 \cdot 210{,}5865° = 2527{,}0380°$$

$$7 \cdot 360° = 2520°$$

$$\text{Differenz} = 7{,}038°$$

Das ist eine **deutliche** Verbesserung gegenüber der Pentatonik.

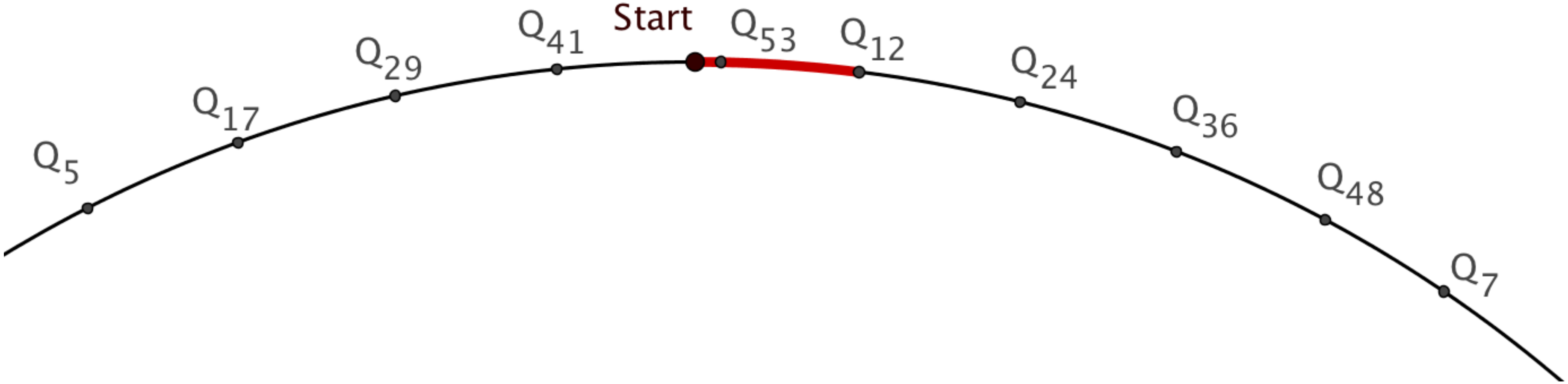
# Quintenzirkel und pythagoreisches Komma




Man erhält dann 12 Töne pro Oktave.

Vom F zum C ist es keine reine Quinte. Der Unterschied zum reinen Ton ist das pythagoreische Komma.

# Die Suche nach besseren Näherungen




$$41 \cdot 210{,}5865° = 8634{,}0465°$$
$$24 \cdot 360° = 8640°$$
$$\text{Differenz} = -5{,}9535°$$

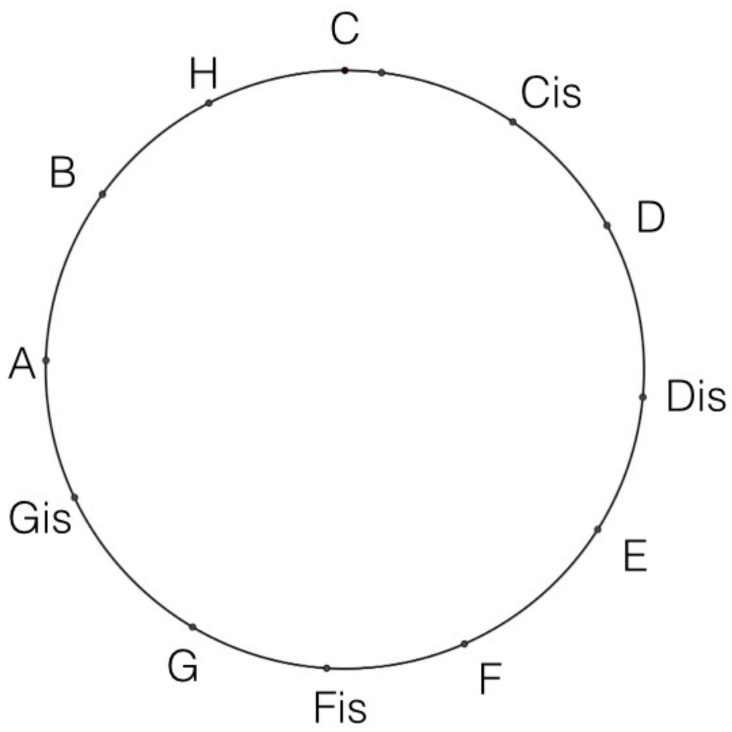
$$53 \cdot 210{,}5865° = 11161{,}0845°$$
$$31 \cdot 360° = 11160°$$
$$\text{Differenz} = 1{,}0845°$$

Erst nach 41 Quintenschritten erhält man eine (leichte) Verbesserung gegenüber dem pythagoreischen Komma.
Und erst bei 53 Quintenschritten ist die Verbesserung erheblich.

# Die gleichstufige Stimmung

auch temperierte oder wohltemperierte Stimmung

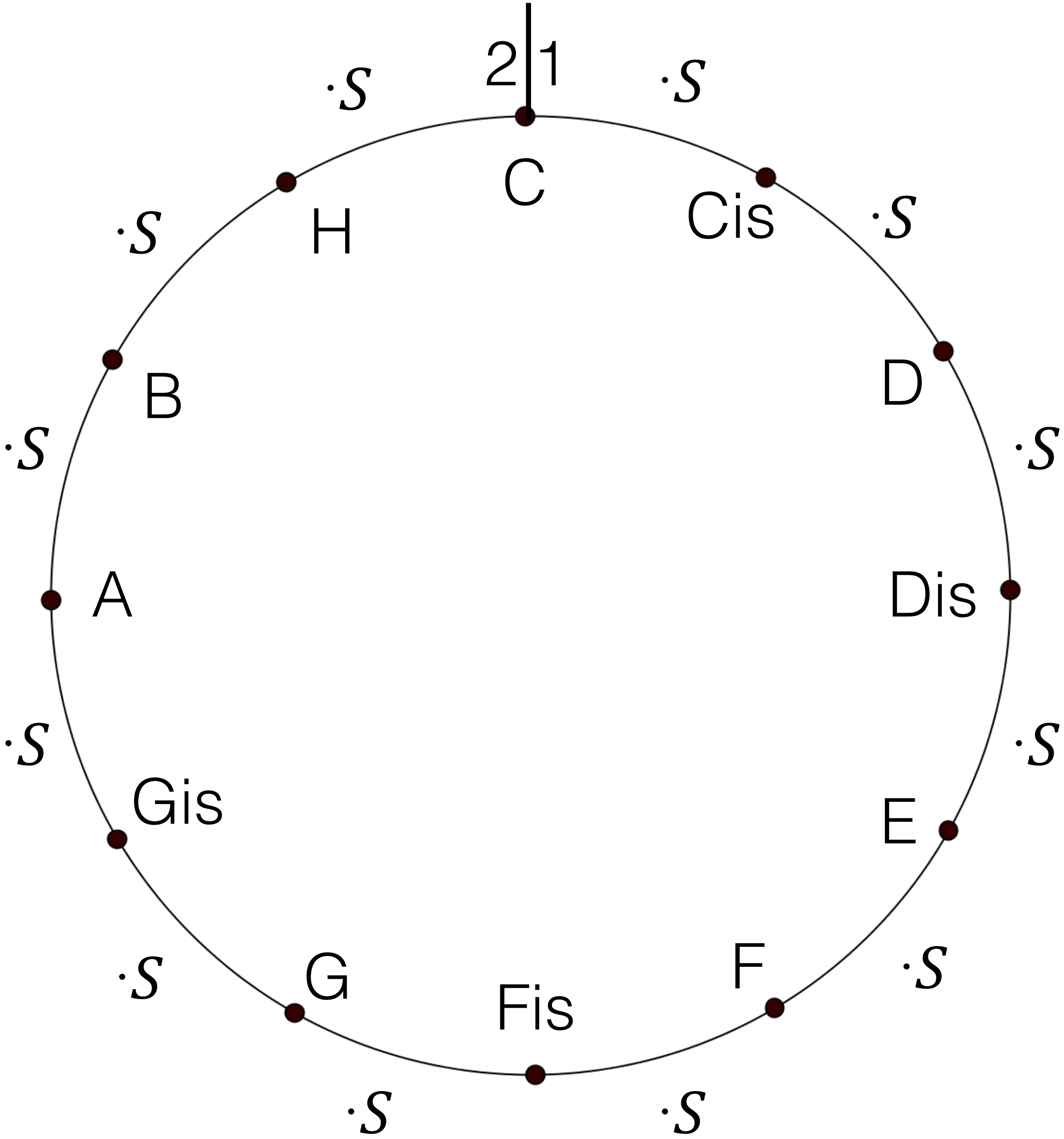
Grundlagen von A. Werkmeister (1645 - 1706)
und J.S. Bach (1685 - 1750)




Die Oktave bleibt in zwölf Halbtöne eingeteilt, aber jeder Halbtonschritt ist gleich groß.

math.: Die Frequenz wird für jeden Halbtonschritt mit dem Faktor $S$ erhöht.

# Die gleichstufige Stimmung

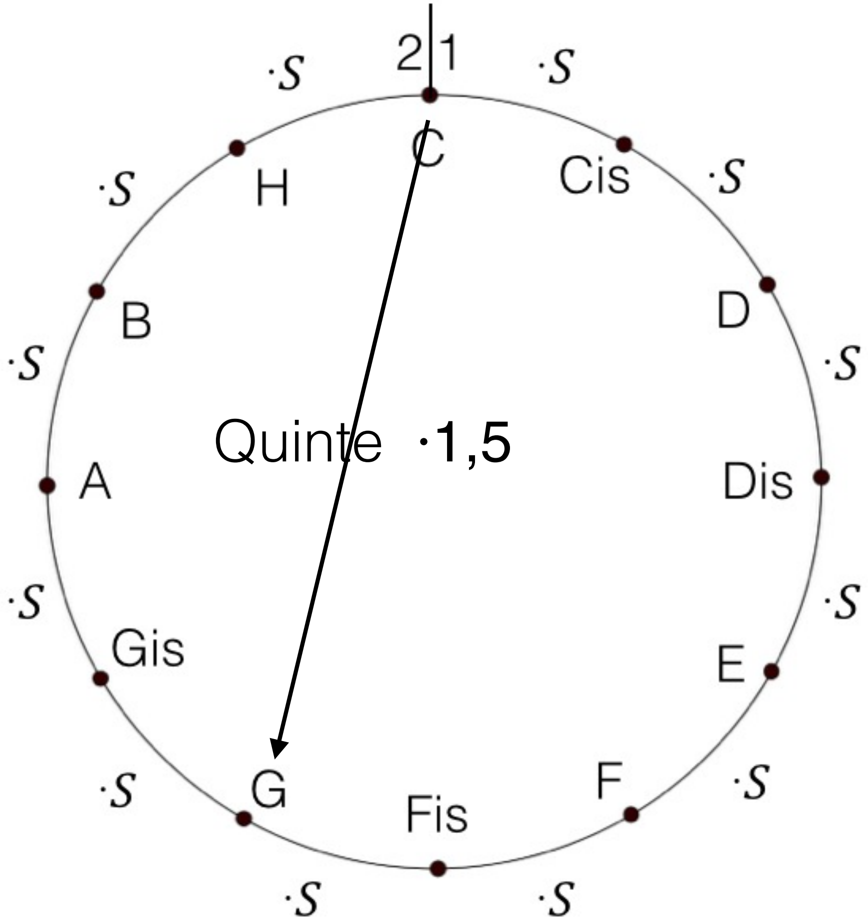



Nach zwölf Schritten $\cdot S$ erreicht man vom Grundton (1x) die Oktave (2x).

$$S^{12} = 2 \quad | \sqrt[12]{\phantom{x}}$$

$$S = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463$$

# Die gleichstufige Stimmung




Die Quinte besteht aus sieben Halbtonschritten. Also multipliziert man dazu sieben man mit $S$.

$$S^7 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1{,}059463^7 \approx 1{,}498308$$

Die einfachen Intervalle sind nicht mehr rein.