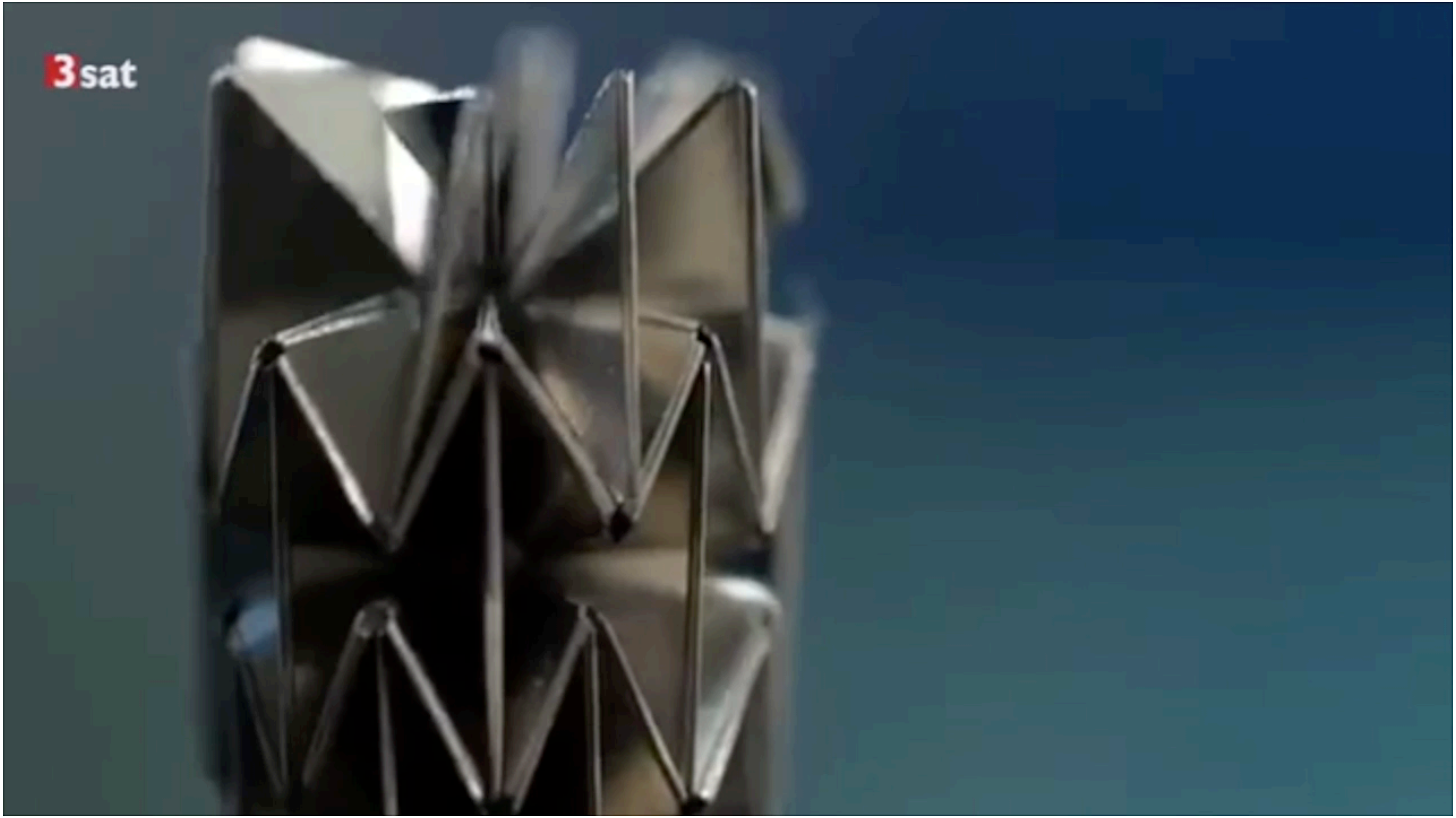
Papierfalten

Mathematik für das digitale Zeitalter

Falten



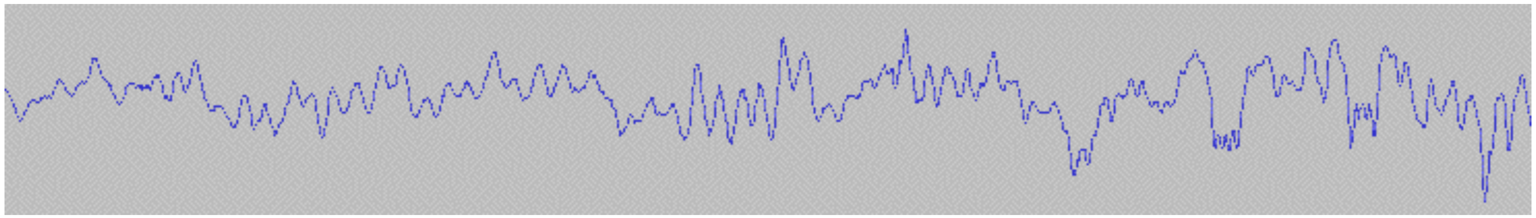
Ausschnitt aus: Der Origamicode

Angewandte Mathematik

Speicherung von Musik auf einer LP

Die Daten sind analog gespeichert

Analysis



Angewandte Mathematik

Speicherung von Musik
auf einer CD

Die Daten sind digital
gespeichert

$\updownarrow$

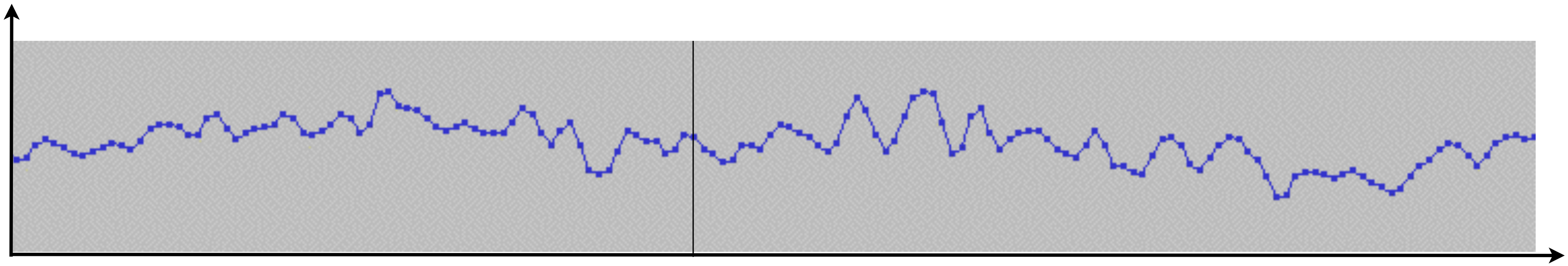
diskrete Mathematik,
Folgen, Kombinatorik

0110011110101101000100100100000111110101...

Angewandte Mathematik

Speicherung von Musik auf einer CD

Abtastfrequenz 44000 Hz



Beispiel: Messwert 140 $= 10001100_2$

bei einem Maximum von 255 (8 bit)

Die Daten sind digital gespeichert

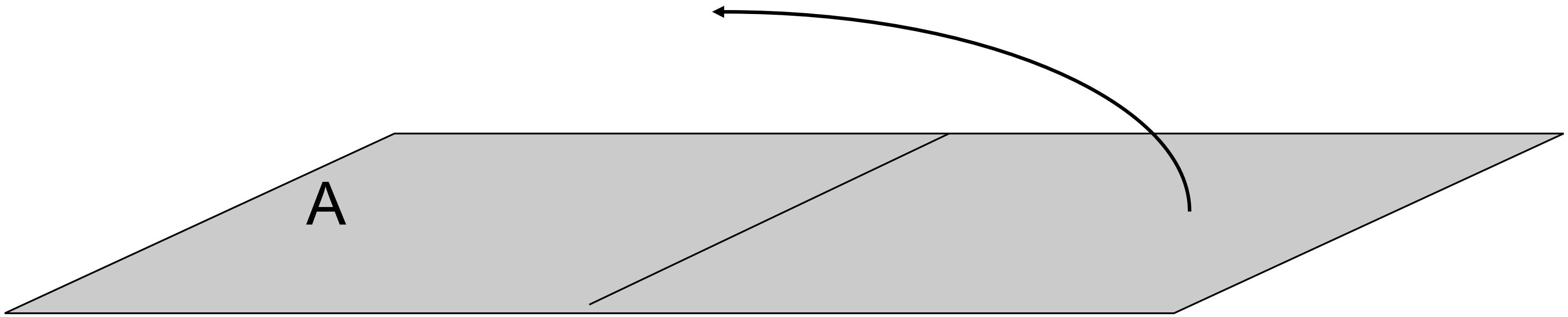
Das Erforschen digitaler Sequenzen

- Wie kann man eine digitale Sequenz erzeugen?
  - einfach
  - jedoch nicht langweilig einfach
  - mit einem Muster
  - aber keinem regelmäßigen Muster

mit Papierfalten!

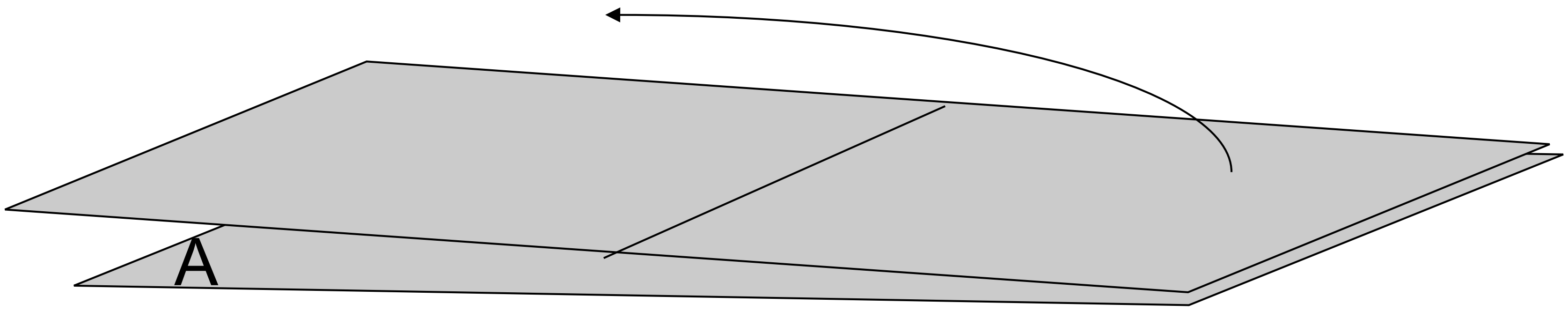
Was ist Papierfalten?

- Ein Streifen Papier wird gefaltet rechts über links



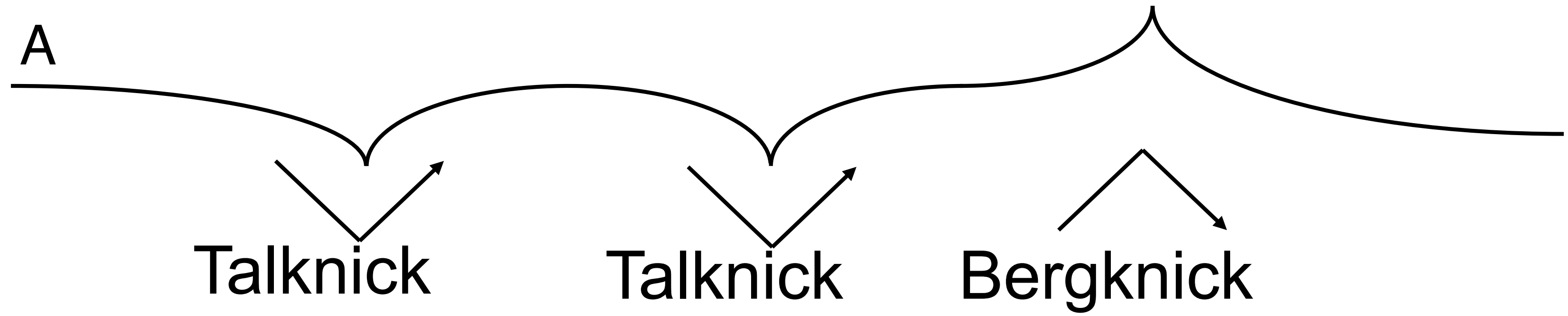
Was ist Papierfalten?

- Das Falten des Papierstreifens wird iteriert, d.h. wiederholt ausgeführt
- Der einmal gefaltete Streifen wird ein zweites Mal gefaltet



Was ist Papierfalten?

Nach dem Auffalten haben wir einen Streifen mit drei Knicken



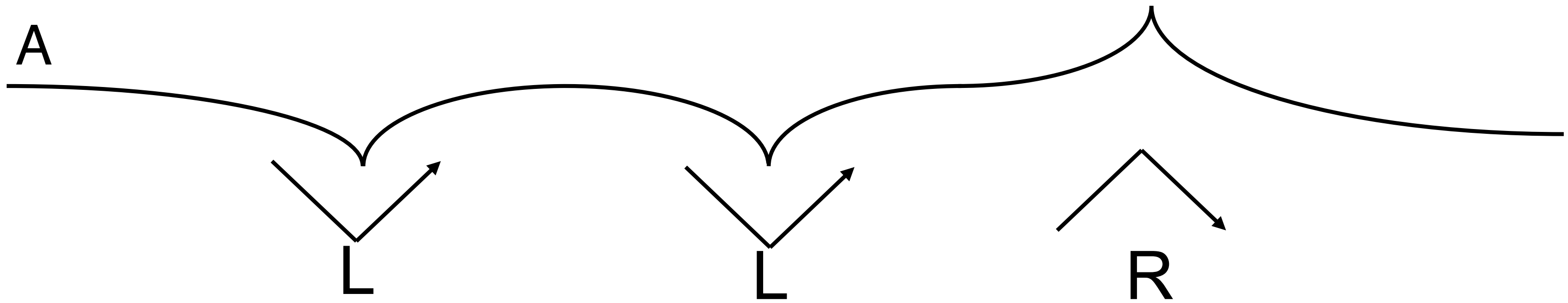
Für eine einheitliche Auswertung wählen wir folgende Orientierung:

- Anfangsmarke links
- Der erste Knick ist ein Talknick

Was ist Papierfalten?

Für die Knick-Protokolle wählen wir folgende Abkürzung:

Tal —> L   Berg —> R



Protokoll der ersten fünf Streifen

1. L
2. LLR
3. LLRLLRR
4. LLRLLRRLLLRRLRR
5. LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR

Es drängen sich (mathematische) Fragen auf

Fragen

1. L
2. LLR
3. LLRLLRR
4. LLRLLRRLLLRRLRR
5. LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR

- Wie geht es mit den Buchstabenketten weiter?
- Wie lang sind die Ketten?
- Wie viele Rs und Ls gibt es jeweils?
- Kommt es zu Wiederholungen?

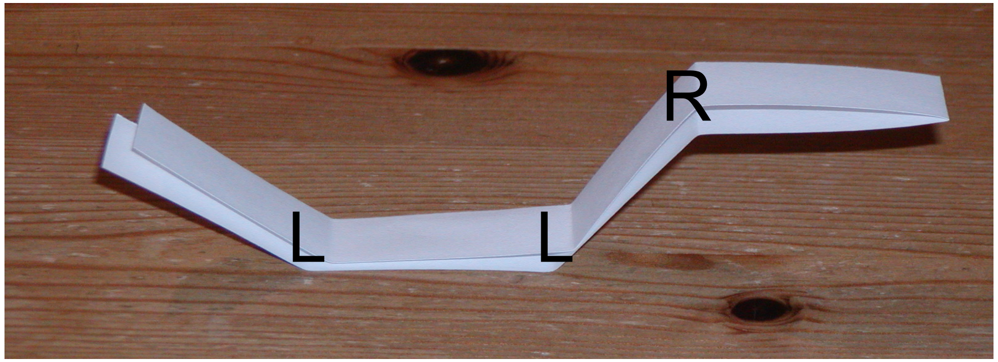
Antworten

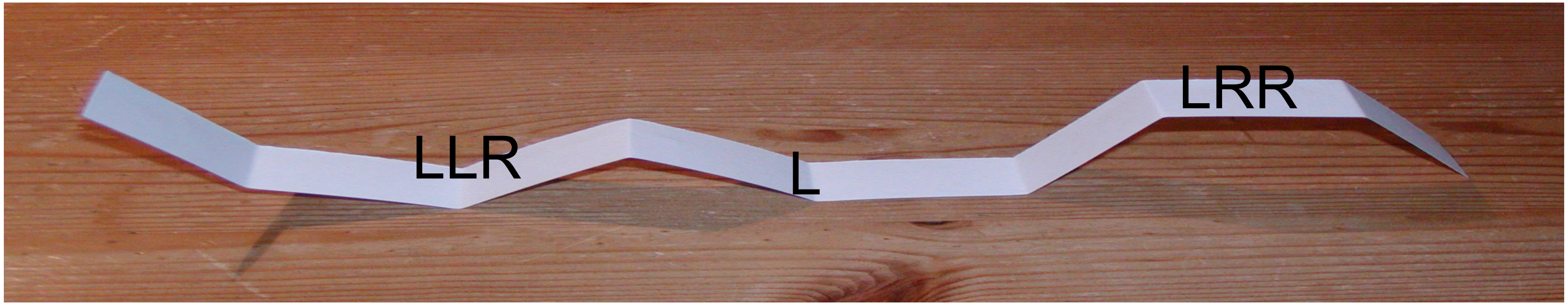
1. L
2. LLR
3. LLRLLRR
4. LLRLLRRLLLRRLRR
5. LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR

Stufe	1	2	3	4	5	n
Anzahl der Rs	0	1	3	7	15	$2^{n-1}-1$
Anzahl der Ls	1	2	4	8	16	2^{n-1}
Anzahl aller Zeichen	1	3	7	15	31	$2^{n}-1$

Antworten

Wie werden die Zeichenketten gebildet?





Das Reflexionsgesetz

Beim Papierfalten erhält man die nächste Knickfolge, indem man die letzte Knickfolge

- –abschreibt
- –ein L anhängt
- –den ersten Teil an dem L „reflektiert“

LLRLLRRL

Das Reflexionsgesetz

Beispiel: Von der 3. zur 4. Stufe

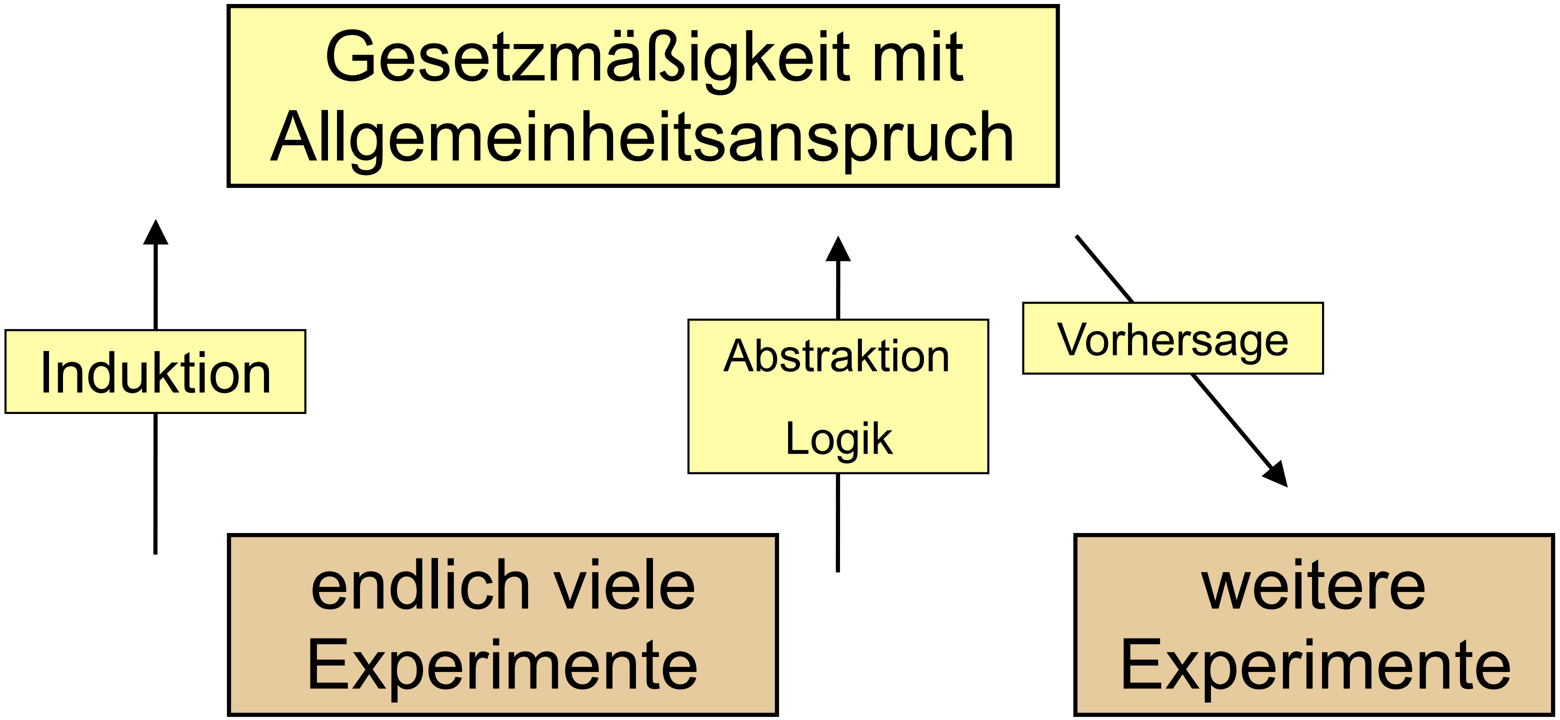
3. Stufe
LLRLLRR
↓
LLRLLRR L LLRRLRR

abschreiben

L anhängen

ersten Teil reflektieren

Naturwissenschaftliche, induktive Erkenntnisgewinnung



Kann man das Reflexionsgesetz beweisen?

Grundlegendere Frage:

Wofür soll das Reflexionsgesetz gültig sein?
Was sind unsere Objekte, mit denen wir operieren?

Der formale Weg

Definition 1

Es sei A = {L,R} ein Alphabet und A* die Menge aller Wörter über diesem Alphabet.

Definition 2

Ist $w = S_1 S_2 S_3 \ldots S_k$ ein Wort aus A*, dann ist $\overline{w} = \overline{S_k} \ldots \overline{S_3}\,\overline{S_2}\,\overline{S_1}$

mit $\overline{\mathrm{S}_j} = \begin{cases} \mathrm{L} \text{ wenn } \mathrm{S}_j = \mathrm{R} \\ \mathrm{R} \text{ wenn } \mathrm{S}_j = \mathrm{L} \end{cases}, \; j = 1 \ldots k$

Der formale Weg

Definition 3

Es sei Λ eine Funktion mit $\Lambda: \begin{cases} A^* \to A^* \\ w \to w\mathrm{L}\overline{w} \end{cases}$

Λ heißt Reflexionsoperator

Definition 4

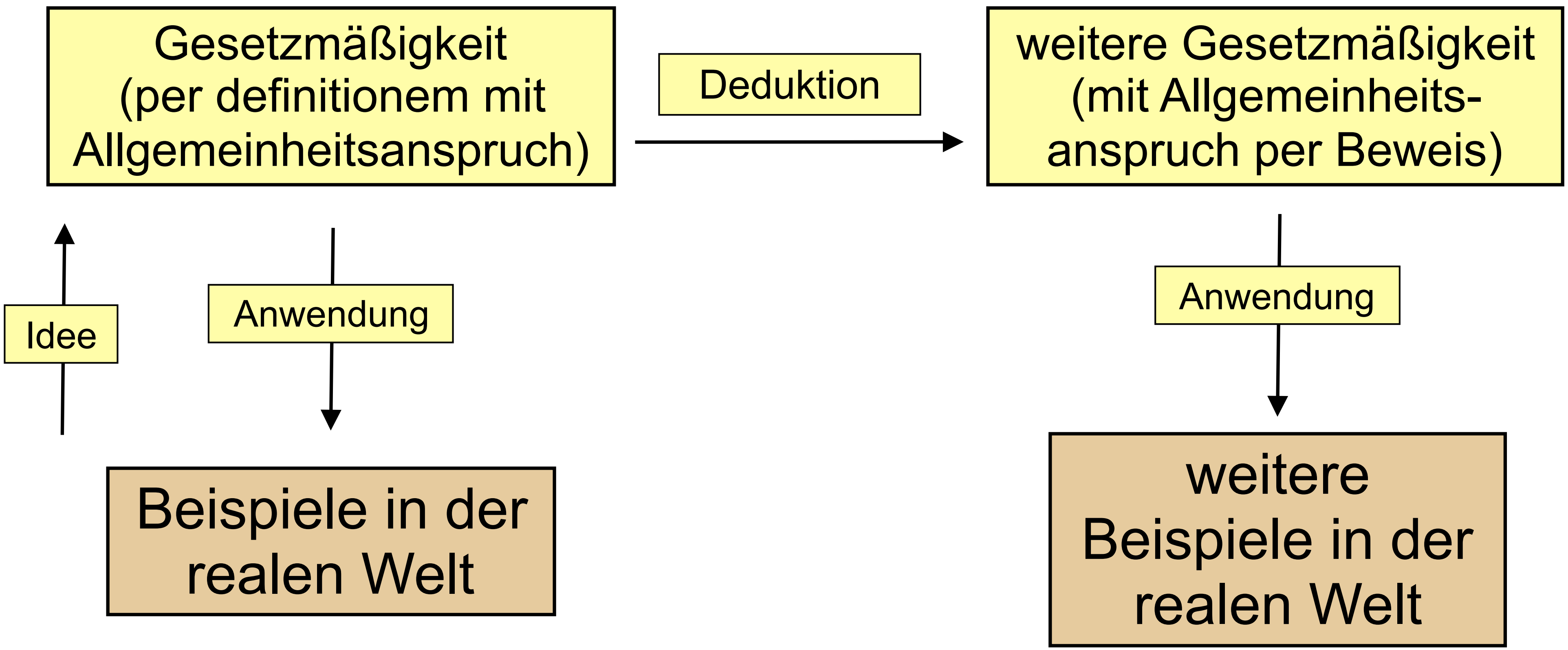
Es sei $\left(w_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wörtern aus A*, die rekursiv

definiert ist durch $w_1 = \mathrm{L}$ und $w_k = \Lambda(w_{k-1})$

Der formale Weg

- Die Wörter
  $w_1 = L$
  $w_2 = \Lambda(w_1) = LLR$
  $w_3 = \Lambda(w_2) = LLRLLRR$, ... erfüllen alle mit Sicherheit das Reflexionsgesetz, denn sie wurden per Definition so konstruiert.
- Ein Beweis des Reflexionsgesetzes ist somit NICHT möglich.

Mathematische, deduktive Erkenntnis



Weitere Erkenntnisse

- Wo entstehen welche Knicke beim weiteren Falten?
- Experiment: alte Knicke markieren

Weitere Erkenntnisse

LLRLLRRLLLRRLRR

L L R L L R R L L L R R L R R

L R L R L R L R L R L R L R L R

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR

Das Inflationsgesetz

Beim Papierfalten erhält man die nächste Knickfolge, indem man die letzte Knickfolge

- auseinander zieht
- vor, in die Lücken und hinter die Knickfolge abwechseln L und R einfügt

Das Inflationsgesetz

Ein Beispiel

von w_3 = LLRLLRR zu w_4 = LLRLLRRLLLRRLRR

w_3 = LLRLLRR

auseinanderziehen

L L R L L R R

LR abwechselnd aufschreiben

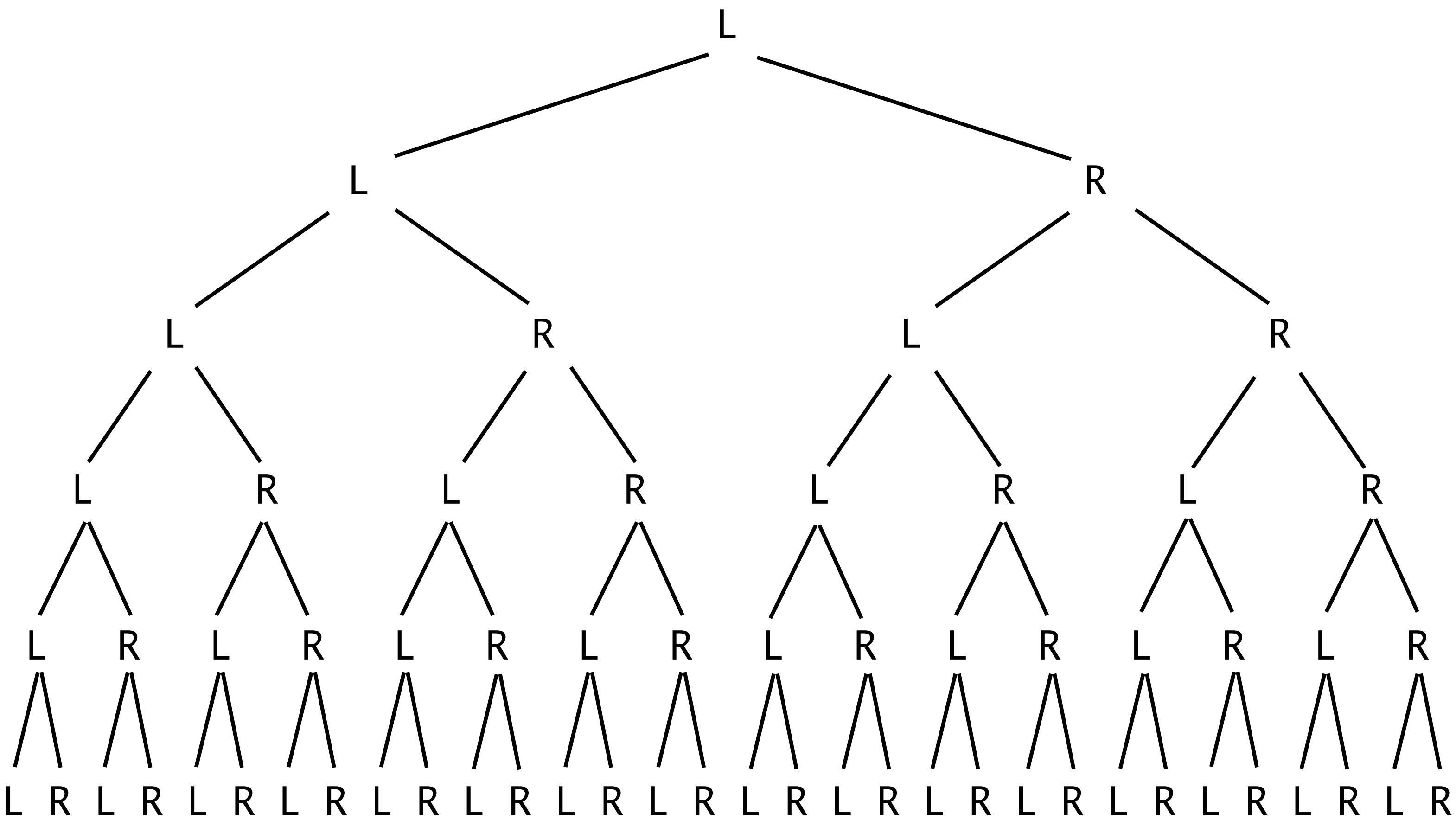
L R L R L R L R

zusammenfügen

LLRLLRRLLLRRLRR = w_4

Das Inflationsgesetz

Andere Erläuterung des Inflationsgesetzes:
der binäre Baum



Das Inflationsgesetz

Andere Erläuterung des Inflationsgesetzes: der binäre Baum - zusammengeschoben

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR

Zusammenhänge

- Reflexionsgesetz und Inflationsgesetz sind äquivalent
- d.h. die Knickfolge, die nach dem Reflexionsgesetz gebildet wird, stimmt in allen Symbolen mit der Knickfolge, die nach dem Inflationsgesetz gebildet wird, überein

Zusammenhänge

- naturwissenschaftliche, realitätsbezogene Begründung:
  beide Gesetze sind nur verschiedene Betrachtungsweisen desselben Prozesses, nämlich Papierfalten
- Die Begründung ist vernünftig, aber nicht für alle Wörter wirklich geprüft

Zusammenhänge

- formal deduktiver Beweis:
  - die Wörter, die mit dem Reflexionsgesetz definiert werden

  und

  - die Wörter, die mit dem Inflationsgesetz definiert werden

  sind an jeder Position im Wort gleich
- Der Beweis sichert diesen Zusammenhang für alle Wörter w_n

Gesetzmäßigkeiten

```
1.L
2.LLR
3.LLRLLRR
4.LLRLLRRLLLRRLRR
5.LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
  1234567890123456789012345678901
           1         2         3
```

Welches Zeichen wird auf Position 92 stehen?

Gesetzmäßigkeiten

```
1.L
2.LLR
3.LLRLLRR
4.LLRLLRRLLLRRLRR
5.LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
  1234567890123456789012345678901
           1         2         3
```

Eigenschaft	Positionsnummern hier eintragen						
Position ungerade, Zeichen ist L	1	5					
Position gerade, Zeichen ist L	2	4					
Position ungerade, Zeichen ist R	3						
Position gerade, Zeichen ist R							

Gesetzmäßigkeiten

```
1.L
2.LLR
3.LLRLLRR
4.LLRLLRRLLLRRLRR
5.LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
  1234567890123456789012345678901
           1         2         3
```

Eigenschaft	Positionsnummern hier eintragen						
Position ungerade, Zeichen ist L	1	5	9	13	17	21	25
Position gerade, Zeichen ist L	2	4	8	10	16	18	20
Position ungerade, Zeichen ist R	3	7	11	15	19	23	27
Position gerade, Zeichen ist R	6	12	14	22	24	28	30

Gesetzmäßigkeiten

Wie unterscheidet man die ungeraden Zahlen
1, 5, 9, 13, 17, …

von den ungeraden Zahlen
3, 7, 11, 15, 19, …   ?

Wie entscheide ich, ob 2437 zur oberen oder unteren Zahlenfolge gehört?

Gesetzmäßigkeiten

Gesetz für die ungeraden Positionen:
Dividiere die Platznummer mit Rest durch 4.
Ist der Rest 1, so steht dort ein L,
ist der Rest 3, so steht dort ein R.

Eigenschaft	Positionsnummern hier eintragen						
Position ungerade, Zeichen ist L	1	5	9	13	17	21	25
Position gerade, Zeichen ist L	2	4	8	10	16	18	20
Position ungerade, Zeichen ist R	3	7	11	15	19	23	27
Position gerade, Zeichen ist R	6	12	14	22	24	28	30

Gesetzmäßigkeiten

~~L~~L~~R~~L~~L~~R~~R~~L~~L~~L~~R~~R~~L~~R~~R~~L~~L~~L~~R~~L~~L~~R~~R~~R~~L~~L~~R~~R~~L~~R~~R~~L~~L~~L~~R~~L~~/~~…

~~1~~2~~3~~4~~5~~6~~7~~8~~9~~0~~1~~2~~3~~4~~5~~6~~7~~8~~9~~0~~1~~2~~3~~4~~5~~6~~7~~8~~9~~0~~1~~2~~3~~456…

1 2 3 (Zehnerstellen unter Position 10, 20, 30)

/L/L/R/L/L/R/R/L/L/L/R/R/L/R/R/L/L/L

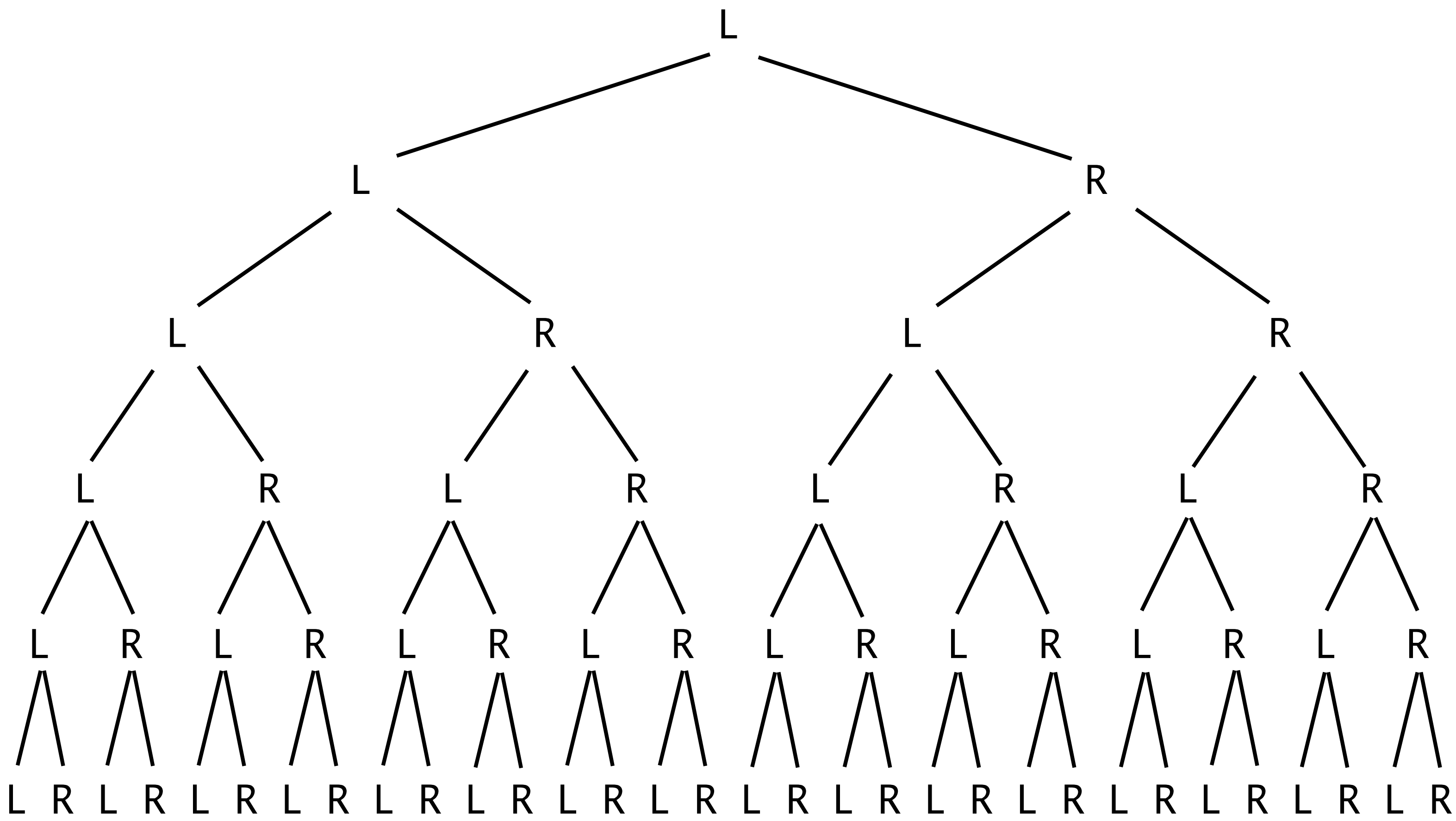
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8

1 (Zehnerstelle unter Position 10)

Nach dem Streichen der ungeraden Positionen und Neunummerierung der verbleibenden Symbole erhält man wieder die Papierfaltungsfolge.

zur Erinnerung

Die Papierfaltungsfolge ist (Inflationsgesetz) ein zusammengedrückter, binärer Baum



Gesetzmäßigkeiten

Gesetz für die geraden Positionen:
Dividiere die Platznummer durch 2 und wende auf die neue Platznummer die Gesetze für eine gerade bzw. ungerade Platznummer erneut an.

Eigenschaft	Positionsnummern hier eintragen						
Position ungerade, Zeichen ist L	1	5	9	13	17	21	25
Position gerade, Zeichen ist L	2	4	8	10	16	18	20
Position ungerade, Zeichen ist R	3	7	11	15	19	23	
Position gerade, Zeichen ist R	6	12	14	22	24	28	30

R bleibt R

Gesetzmäßigkeiten

Gesetz für die geraden Positionen:
Dividiere die Platznummer durch 2 und wende auf die neue Platznummer die Gesetze für eine gerade bzw. ungerade Platznummer erneut an.

Beispiel:

$$92 \xrightarrow{:2} 46 \xrightarrow{:2} 23 \xrightarrow{:4,\text{Rest}} 3 \rightarrow R$$

Auf Platz 92 steht ein R

Binäre Darstellung der Platznummer

1	1	L
2	10	L
3	11	R
4	100	L
5	101	L
6	110	R
7	111	R
8	1000	L
9	1001	L
10	1010	L
11	1011	R
12	1100	R
13	1101	L
14	1110	R
15	1111	R
16	10000	L
17	10001	L
18	10010	L
19	10011	R
20	10100	L
21	10101	L
22	10110	R
23	10111	R
24	11000	R
25	11001	L

Die Bestimmung von L und R aus der Platznummer kann direkt erfolgen, wenn man die Platznummer binär darstellt.

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	16	8	4	2	1

Am Ende eine 0 —> gerade Zahl
durch 2 teilen —> 0 streichen

Am Ende eine 1 —> ungerade Zahl
durch 4 teilen, Rest bestimmen
01 —> Rest 1 —> L
11 —> Rest 3 —> R

Binäre Darstellung der Platznummer

1	1	L
2	10	L
3	11	R
4	100	L
5	101	L
6	110	R
7	111	R
8	1000	L
9	1001	L
10	1010	L
11	1011	R
12	1100	R
13	1101	L
14	1110	R
15	1111	R
16	10000	L
17	10001	L
18	10010	L
19	10011	R
20	10100	L
21	10101	L
22	10110	R
23	10111	R
24	11000	R
25	11001	L

Am Ende eine 0 —> gerade Zahl
durch 2 teilen —> 0 streichen

Am Ende eine 1 —> ungerade Zahl
durch 4 teilen, Rest bestimmen
01 —> Rest 1 —> L
11 —> Rest 3 —> R

$$92 \xrightarrow{:2} 46 \xrightarrow{:2} 23 \xrightarrow{:4,\text{Rest}} 3 \rightarrow R$$

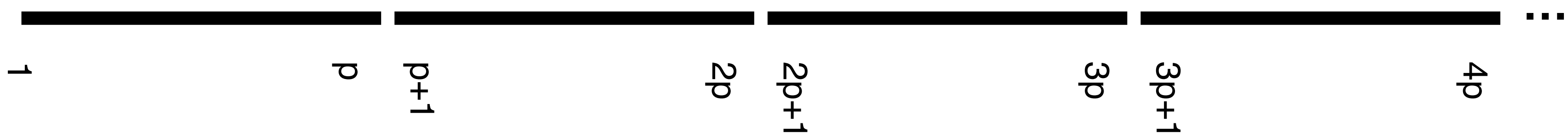
92 = 64 + 28 = 64 + 16 + 12 = 64 + 16 + 8 + 4

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	1	0	0

$92 = 1011100_2$

Periodizität

Die Papierfaltungsfolge ist nicht periodisch.



Der Beweis erfolgt dadurch, dass an den Positionen p und 3p stets verschiedene Zeichen stehen.

Beispiele:

a) ungerade Position p: $p = 21$ —> Rest_4 1 —> L

$3p = 63$ —> Rest_4 3 —> R

b) Position p, die sich 3 Mal durch 2 teilen lässt (= durch 8):

$p = 24$ durch 8 $p' = 3$ —> Rest_4 3 —> R

$3p = 72$ durch 8 $p' = 9$ —> Rest_4 1 —> L