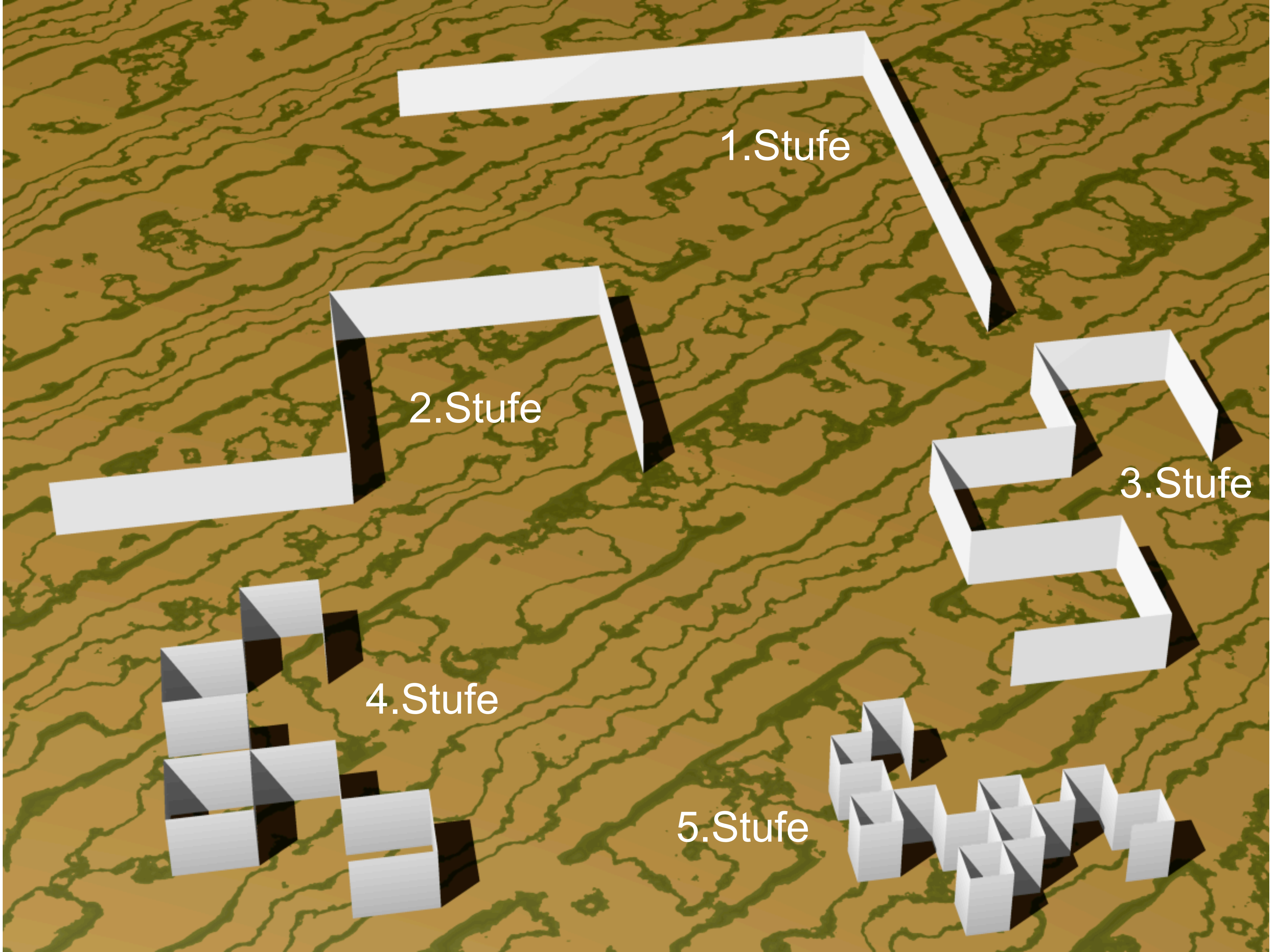
Papierfalten

geometrisch betrachtet

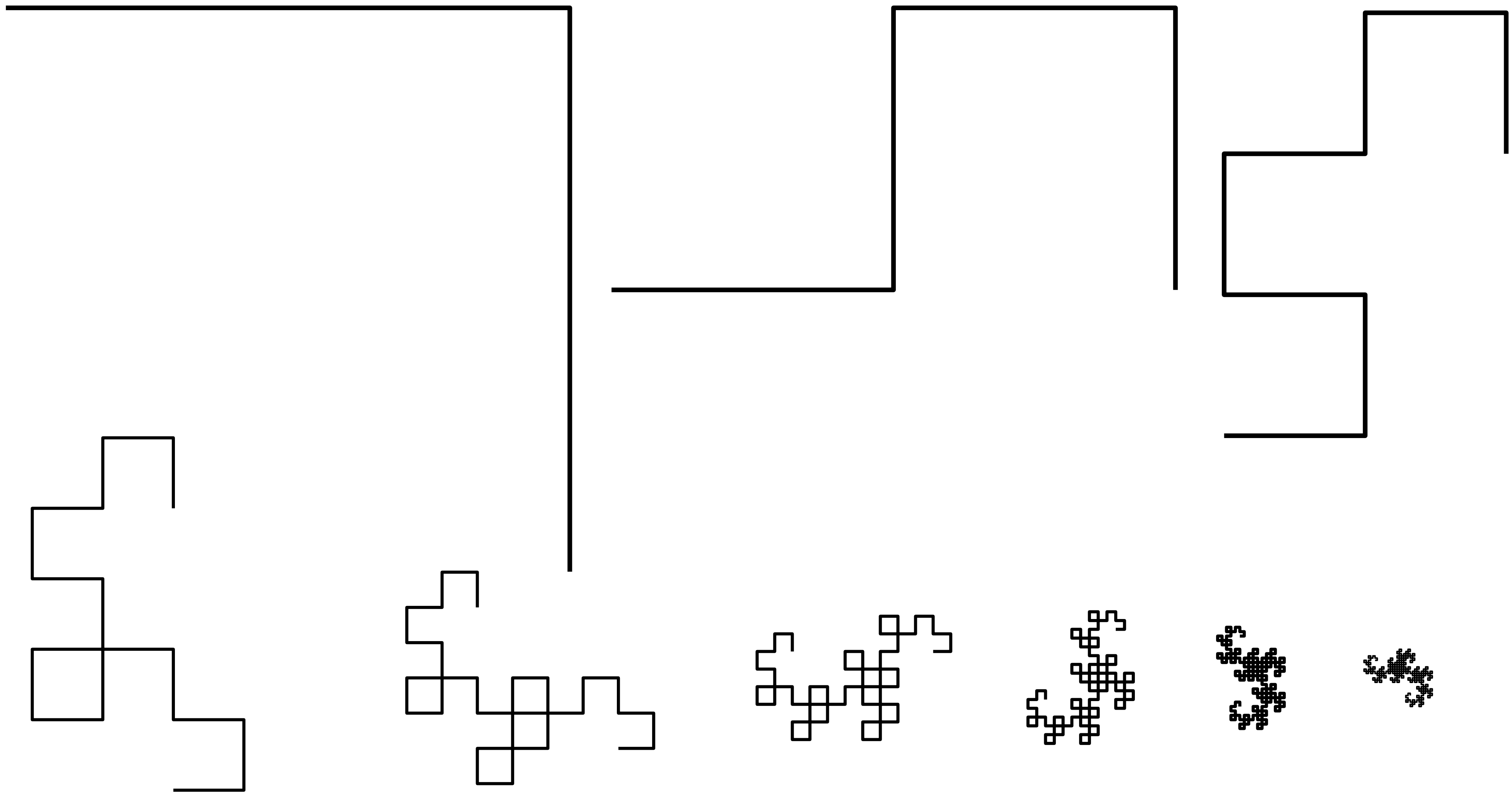
Geometrische Interpretation

- Die gefalteten Streifen werden so weit aufgefaltet, dass die Abschnitte einen rechten Winkel formen.
- Die Figuren werden so ausgerichtet, dass der erste Streifenabschnitt nach oben und der zweite nach links weist.


1.Stufe
2.Stufe
3.Stufe
4.Stufe
5.Stufe

Geometrische Interpretation

Die ersten 9 Stufen der Drachenkurve (Heightway-dragon)



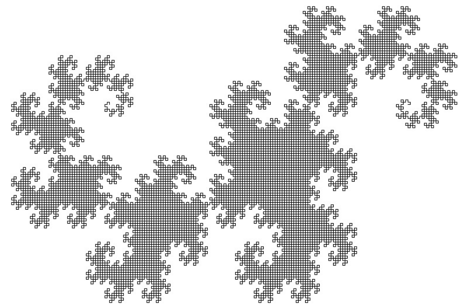
Bauen mit dem Reflexionsgesetz

Bauen mit dem Inflationsgesetz

Der Heighway-Dragon oder Drachenkurve

Die Figur wurde zuerst von den NASA-Physikern John Heighway, William Harter und Bruce Bancs untersucht (auch Harter-Heighway-Dragon)

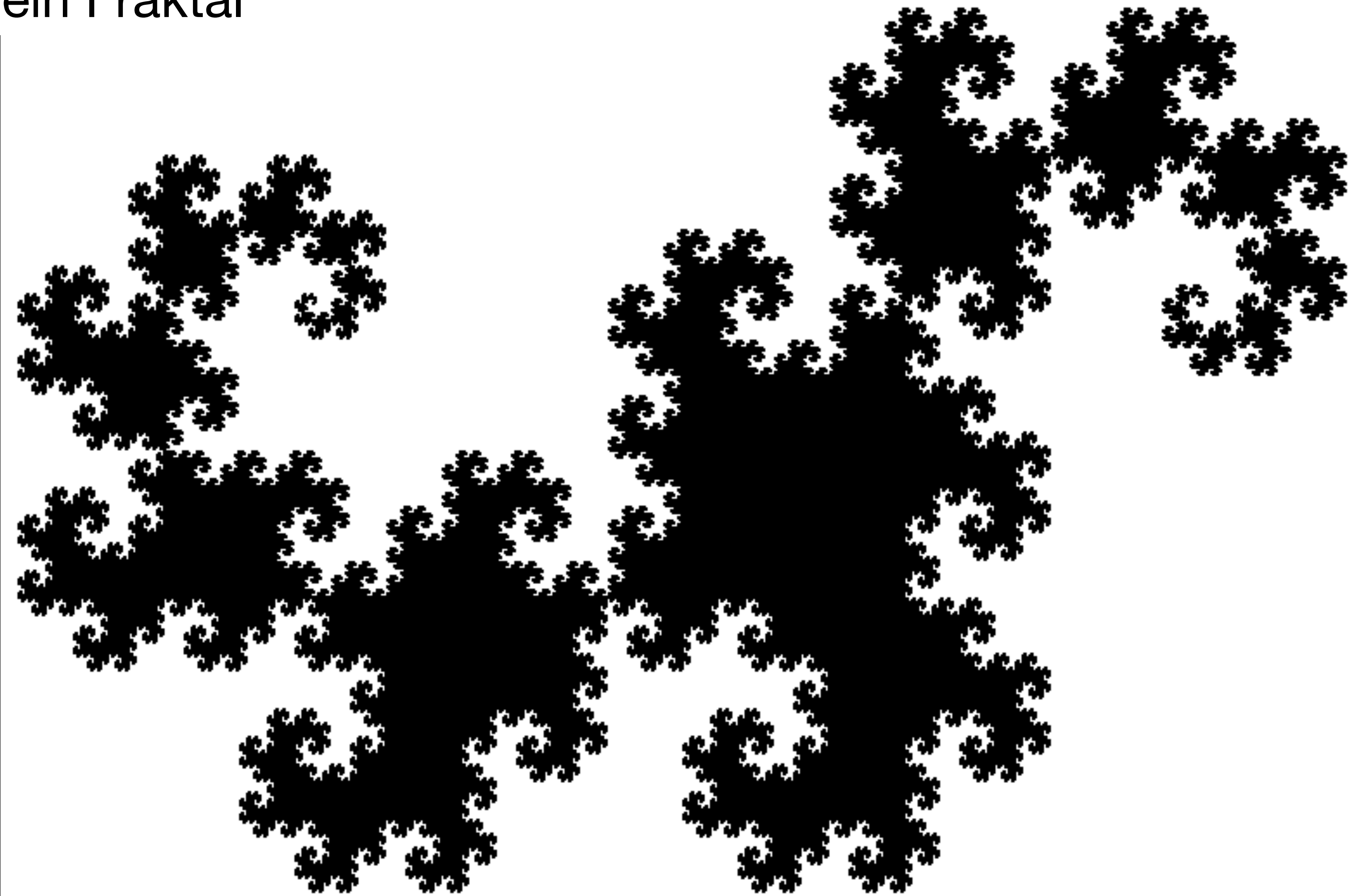
und durch einen Artikel von Martin Gardner 1967 in „Scientific American“ bekannt.



Die erste wissenschaftliche Veröffentlichung geschah durch Chandler Davis, Donald Knuth, Number representations and dragon curves. Journal of Recreational Mathematics **3** (1970)

Die Papierfaltungskurve ist …

ein Fraktal



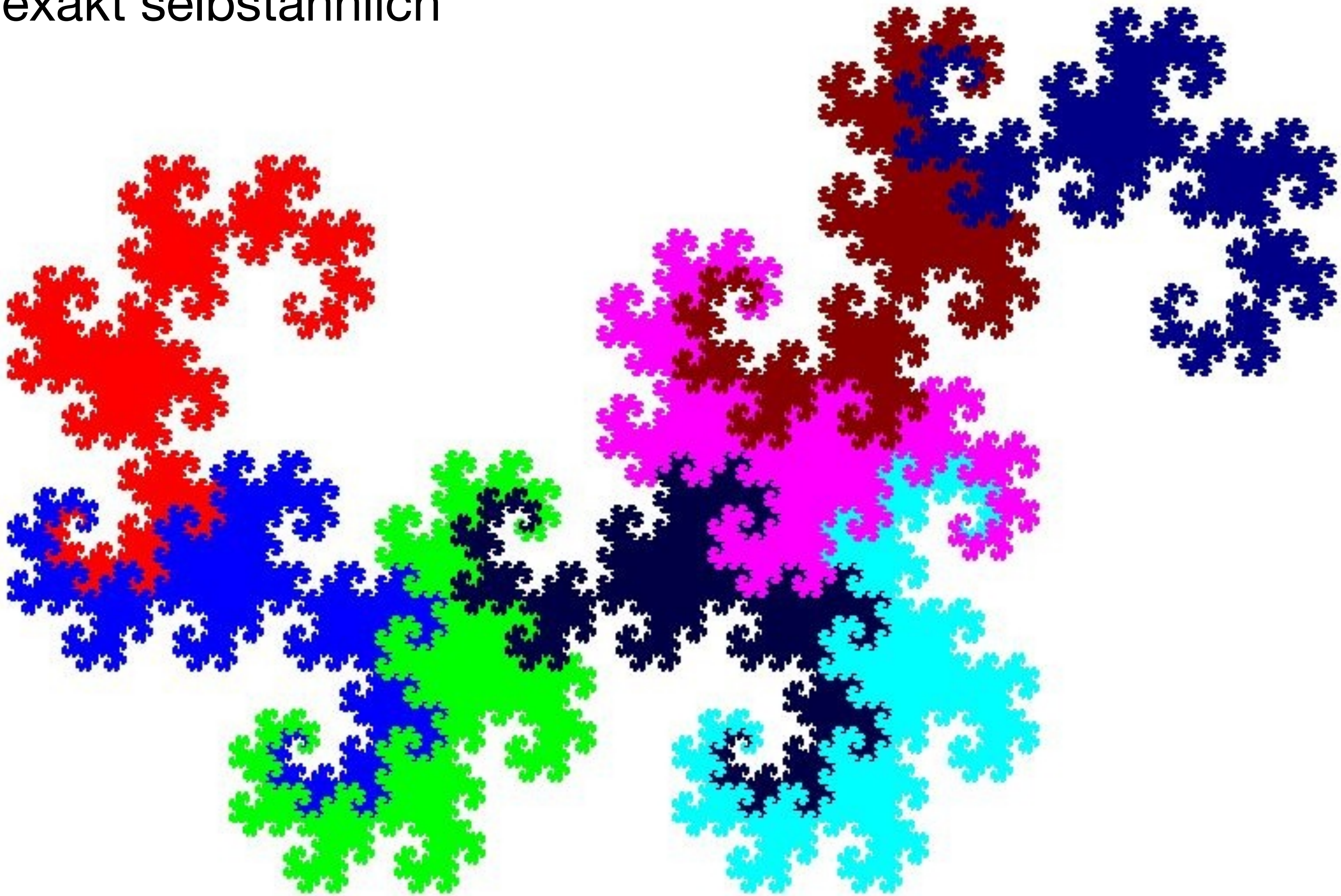
Die Papierfaltungskurve ist …

eine flächenfüllende Kurve

0

Die Papierfaltungskurve ist …

exakt selbstähnlich

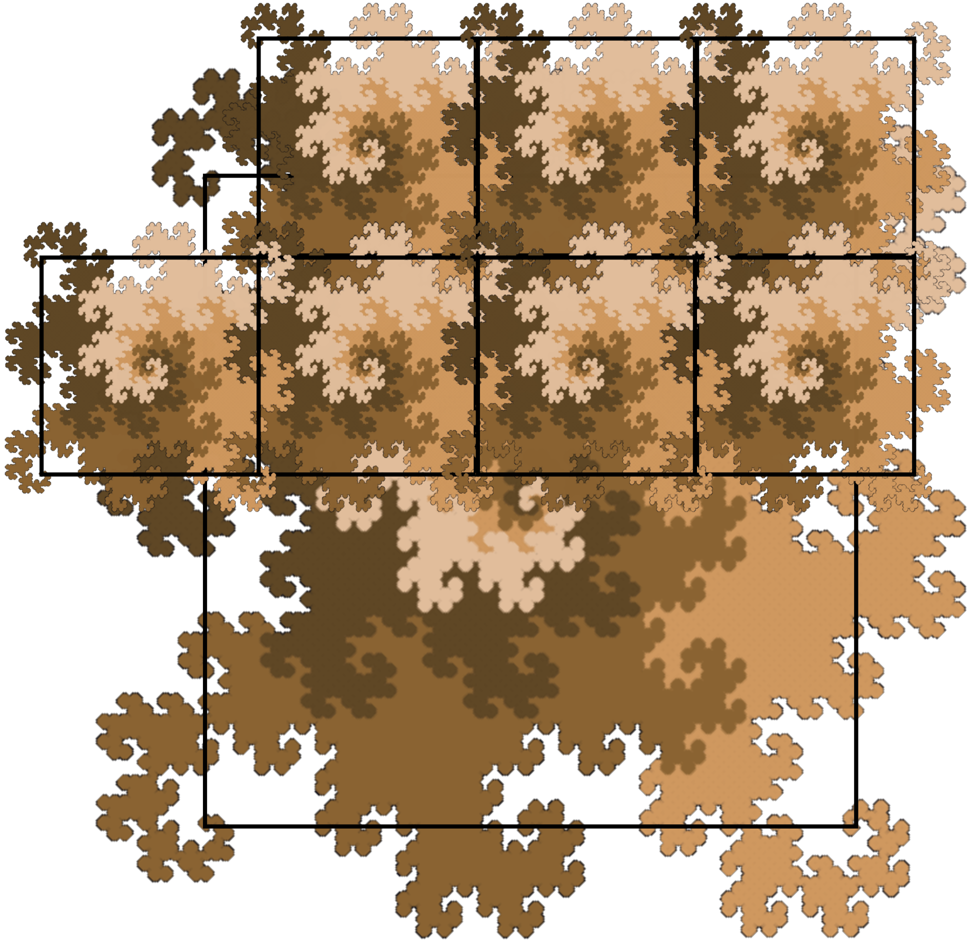


Die Papierfaltungskurve ist ein Fraktal

exakt selbstähnlich Begründung

Die Papierfaltungskurve ist …

ein Parketttteil



Vier Drachenkurven können zu einer „Kachel“ zusammengelegt werden, die ein quadratisches Grundmuster hat.

Die „Größe“ der Papierfaltungskurve

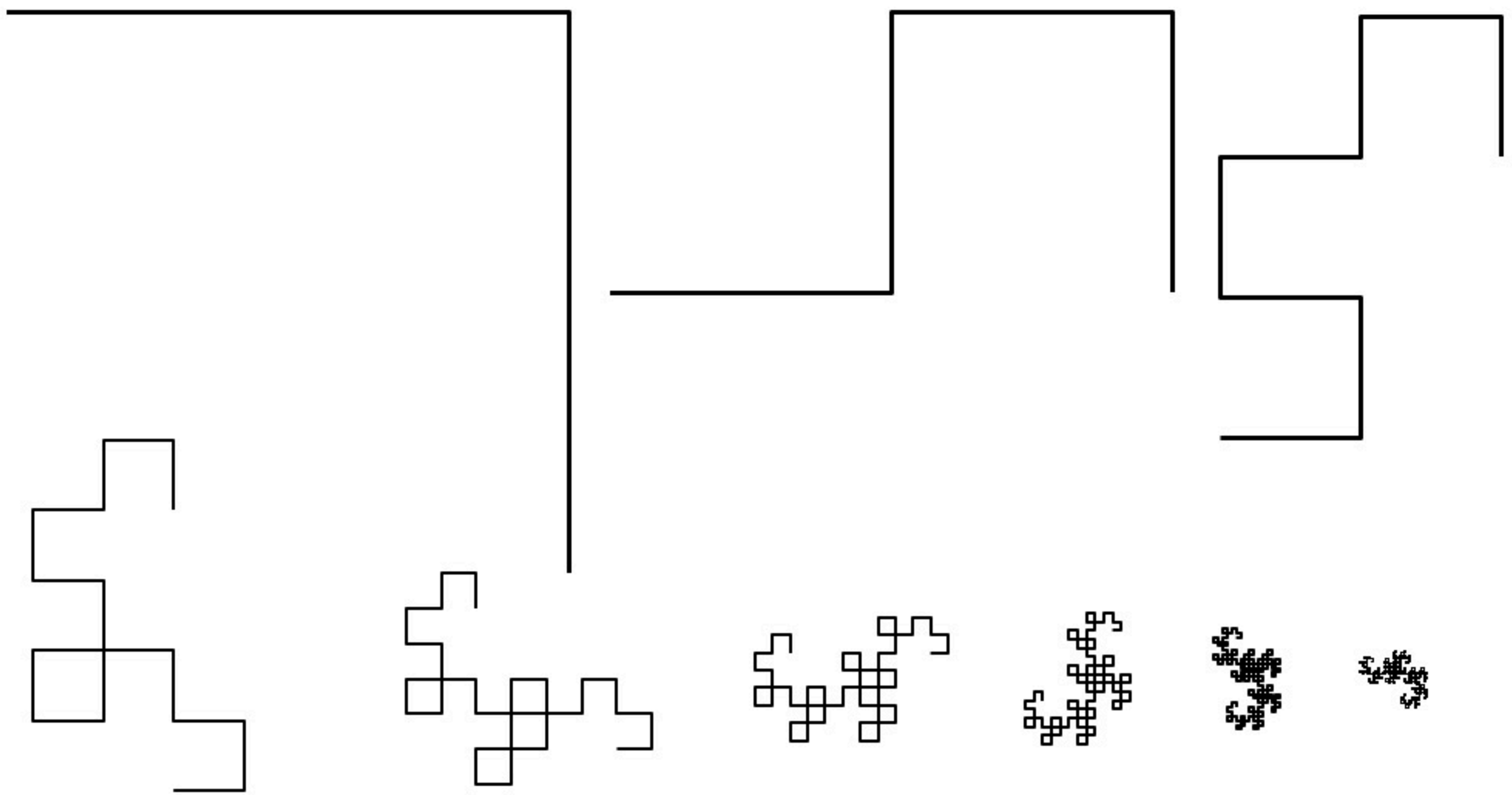
In den Filmen musste die Größe der Figur kontinuierlich an die Darstellungsfläche angepasst werden.

Wie entwickelt sich die Papierfaltungskurve beim tatsächlichen Papierfalten? D.h., dass die Kantenlänge mit jedem Schritt halbiert wird.

Schnelle Antwort: Der Papierstreifen bleibt gleich lang, wird aber immer stärker „zuammengeknüllt“. Also wird die Figur immer stärker schrumpfen.

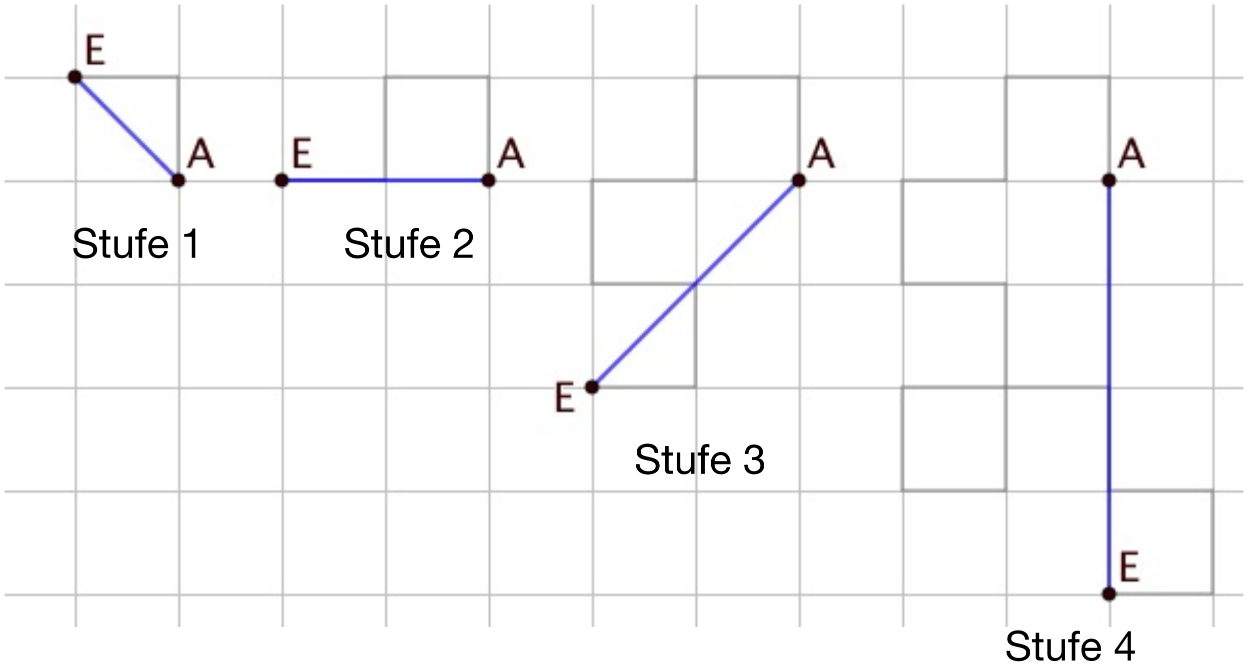
Die „Größe“ der Papierfaltungskurve

Schnelle Antwort: Der Papierstreifen bleibt gleich lang, wird aber immer stärker „zuammengeknüllt“. Also wird die Figur immer stärker schrumpfen.



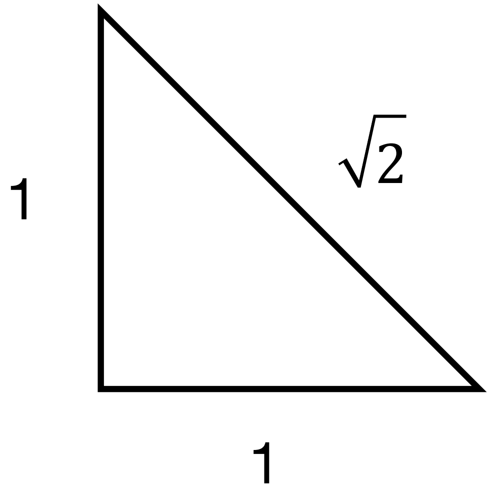
Die „Größe“ der Papierfaltungskurve

Genauer:



Stufe	1	2	3	4
Entfernung AE	1Diag.	2 Kanten	2 Diag.	4 Kanten

Die Diagonale im Quadrat



$$a^2 + b^2 = c^2$$

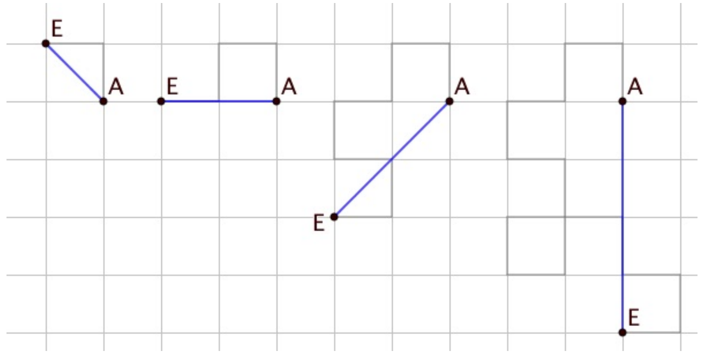
$$1^2 + 1^2 = c^2$$

$$2 = c^2$$

$$c = \sqrt{2}$$

Die „Größe“ der Papierfaltungskurve

Genauer:



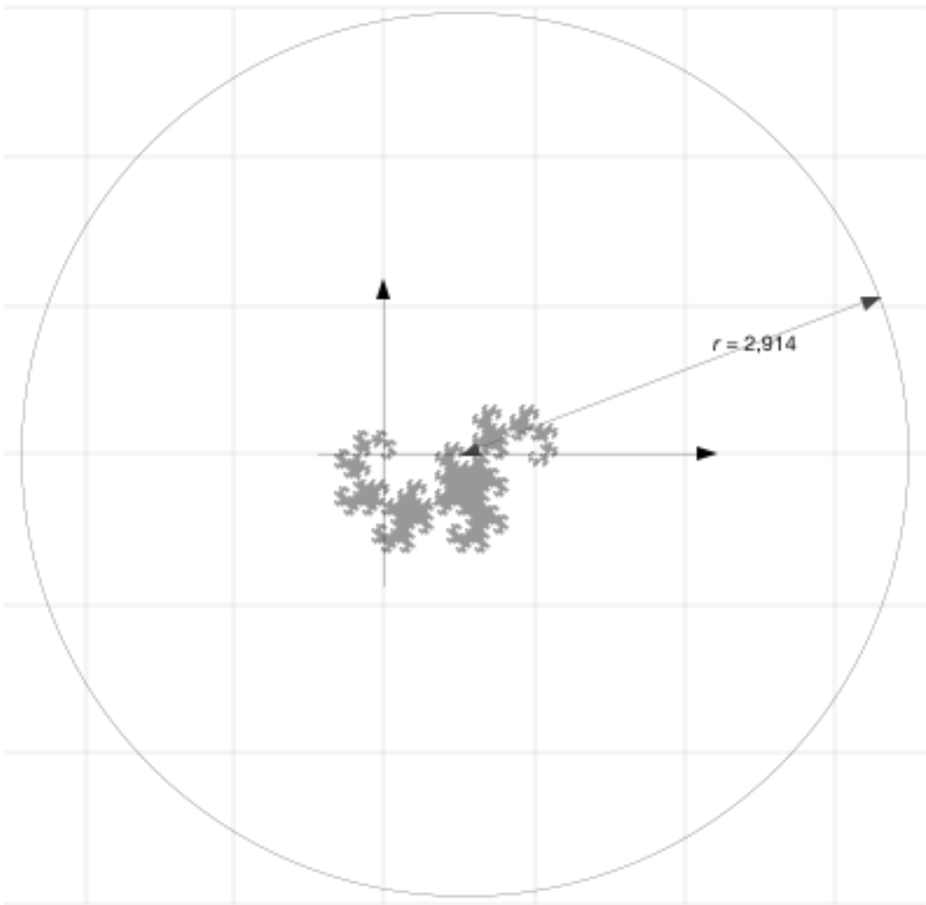
Stufe	1	2	3	4
Entfernung AE	1Diag.	2 Kanten	2 Diag.	4 Kanten
in Kantenlängen	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\right)^3$	$\left(\sqrt{2}\right)^4$

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Kantenlänge	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
Entfernung AE	0,707	0,500	0,354	0,250

Die Entfernung AE schrumpft auf Null.

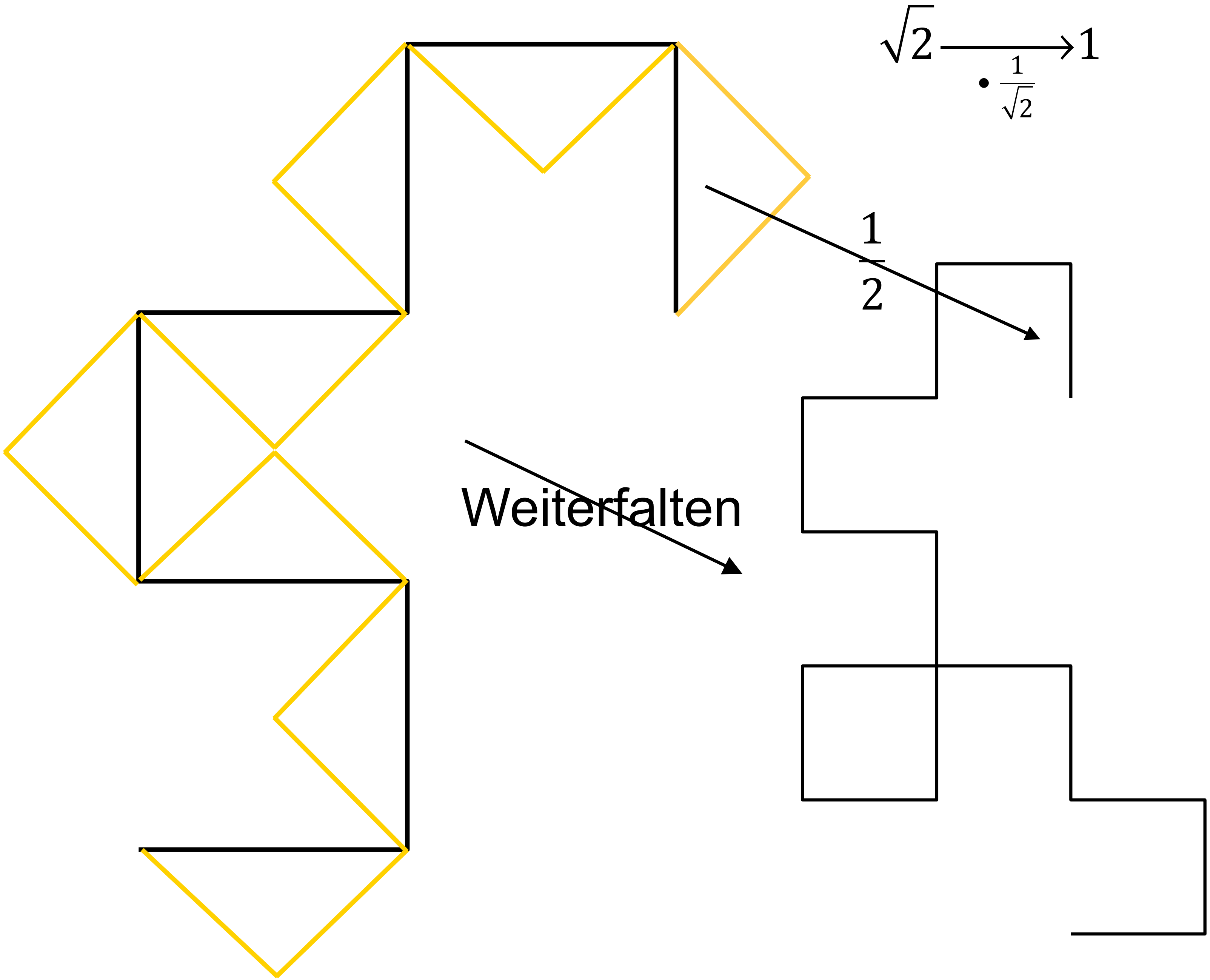
Die „Größe“ der Papierfaltungskurve



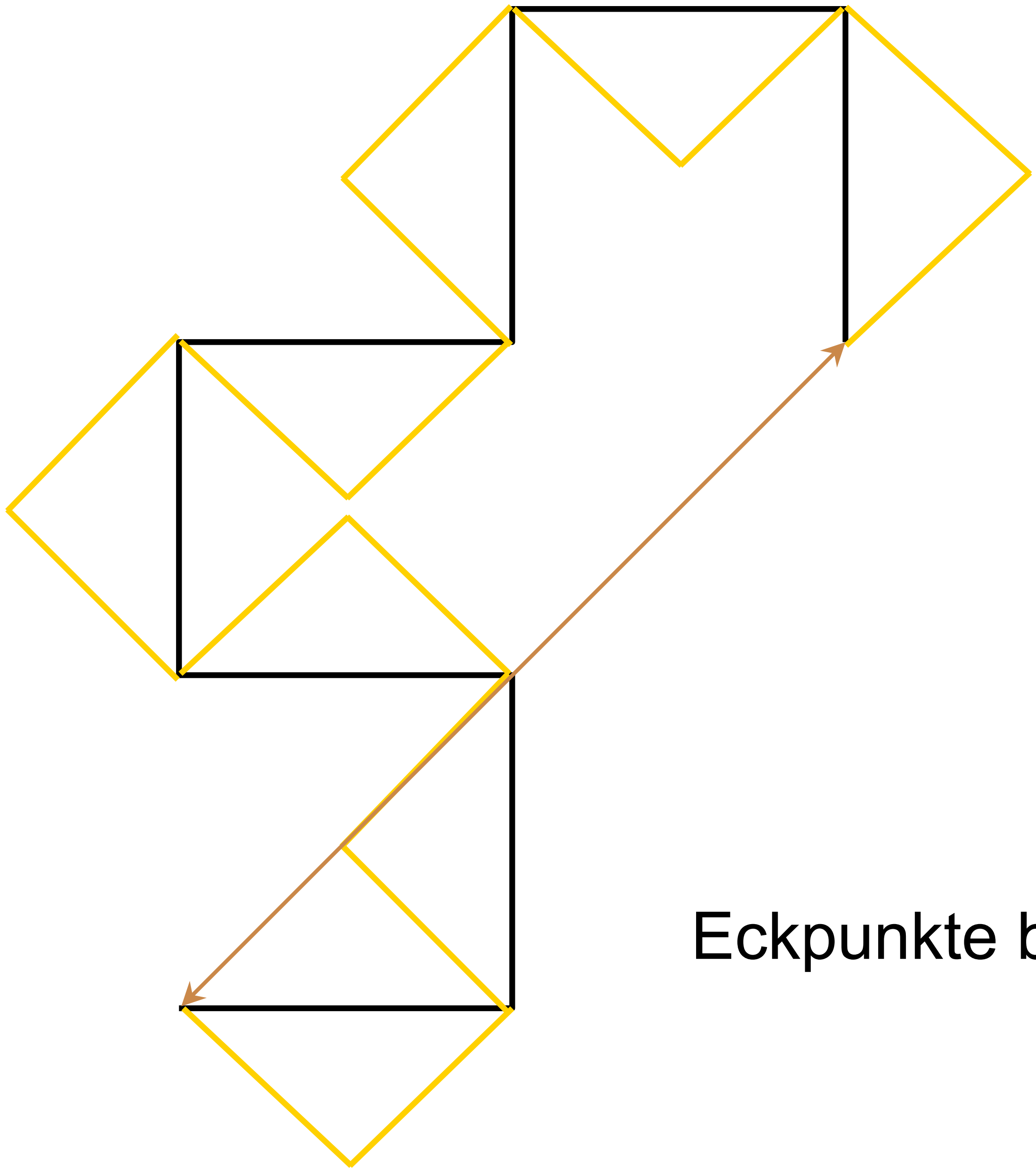
Man kann (mit aufwändigen Rechnungen) zeigen, dass jede Papierfaltungskurve einen Kreis von
3 x Entfernung AE nicht verlassen wird.

Da AE auf Null schrumpft, schrumpfen auch die Kreise auf Null und mit ihnen die darin liegenden Papierfaltungskurven.

Die richtige Verkleinerung



Die richtige Verkleinerung



Bei einer Verkleinerung der Kanten mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bleibt die Entfernung Anfang - Ende konstant

Eckpunkte bleiben erhalten

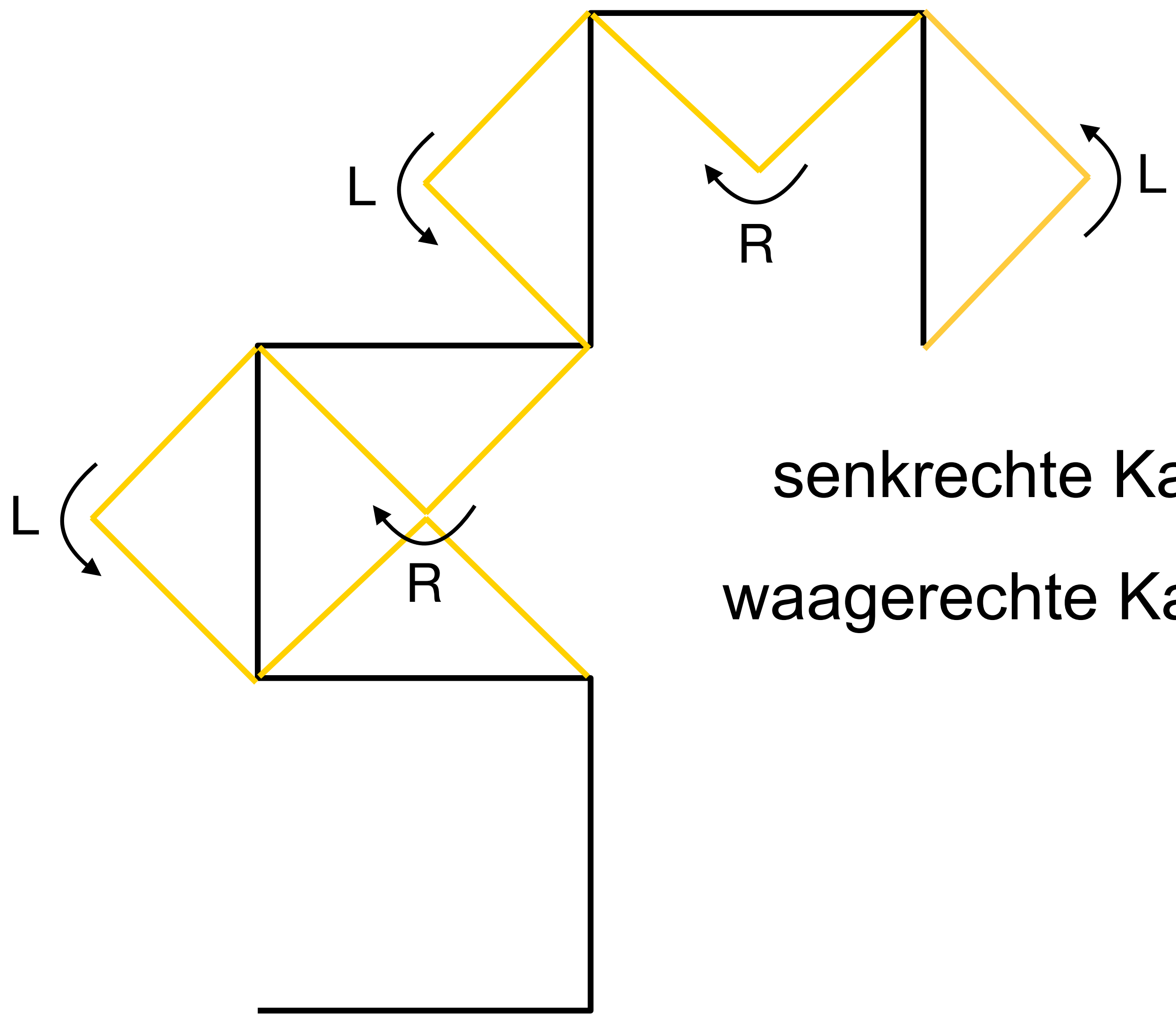
Bauen mit dem Inflationsgesetz

Das Problem der Überschneidung

Kommt es niemals zu Überschneidungen?

Das Problem der Überschneidung

Kommt es niemals zu Überschneidungen?

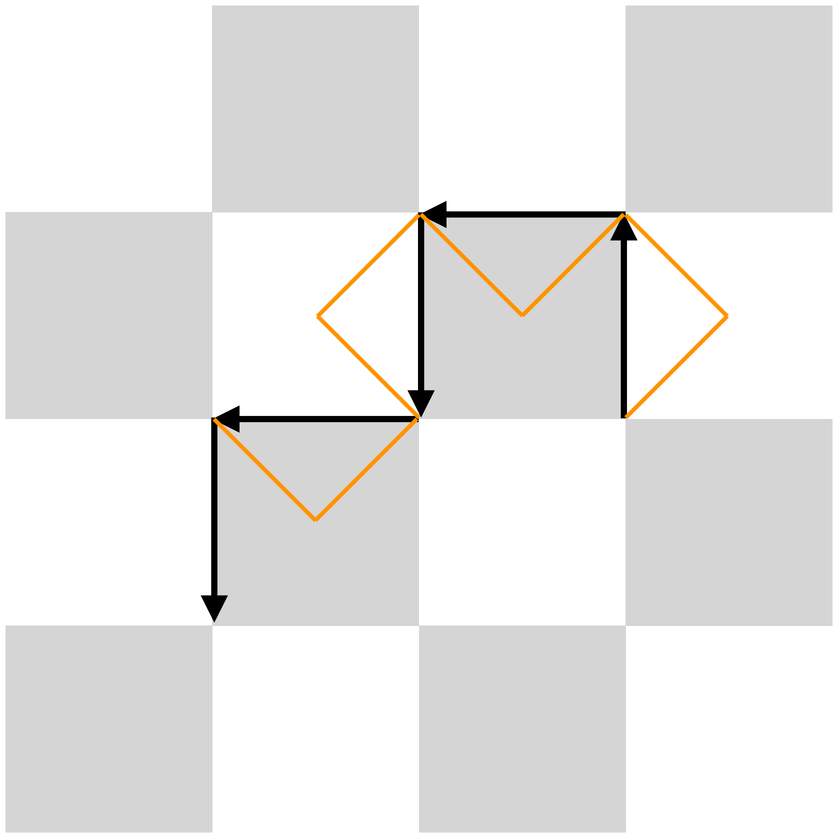


senkrechte Kante - Linksknick

waagerechte Kante - Rechtsknick

Das Problem der Überschneidung

Kommt es niemals zu Überschneidungen?

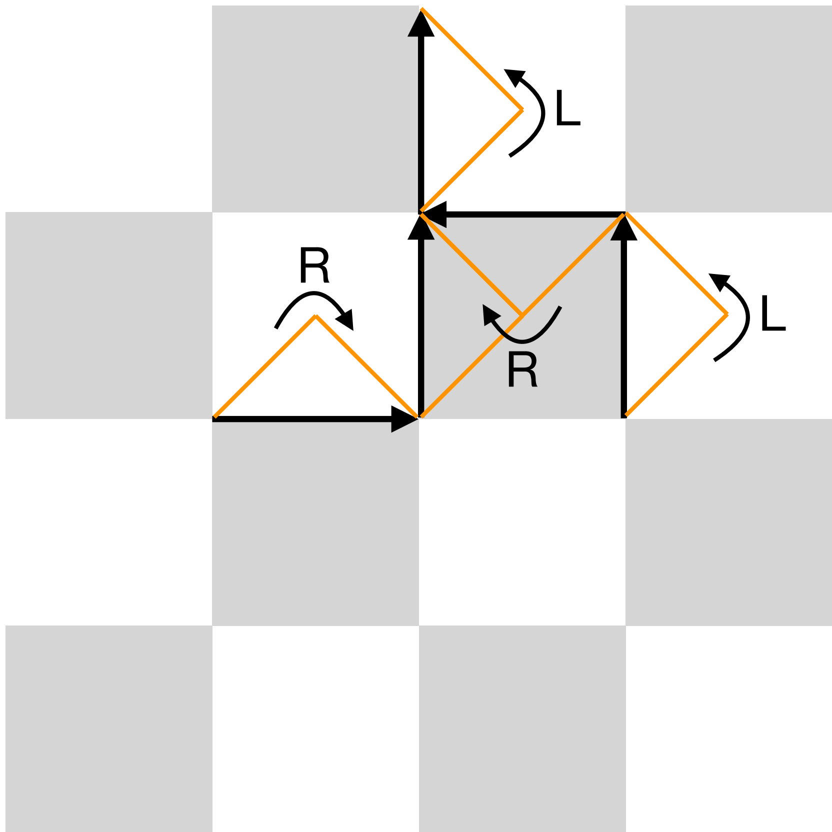


Bei einer gerichteten Kante der Drachenkurve ist beim passend unterlegten Schachbrettmuster links ein schwarzes und rechts ein weißes Feld.

Folgerung: Die neuen Linkskurven werden stets in einem weißen, die neuen Rechtskurven in einem schwarzen Quadrat aufgesetzt.

Das Problem der Überschneidung

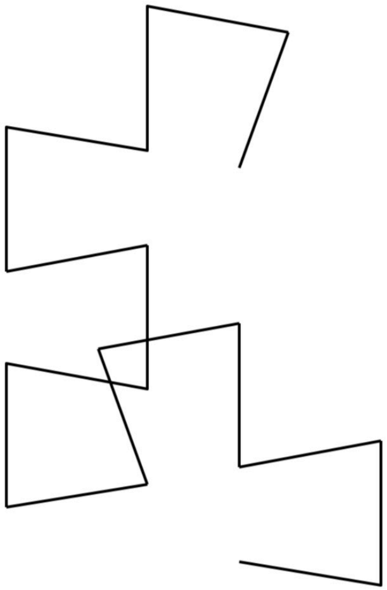
Kommt es niemals zu Überschneidungen?



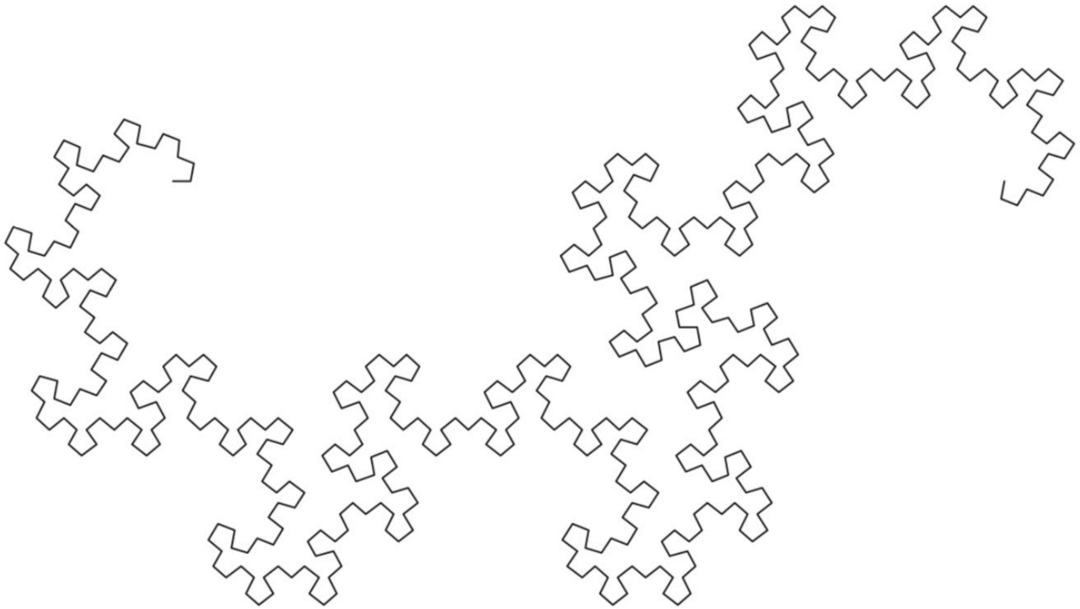
Die letzten Wege sind aber ungültig, da das schwarze Feld rechts ist.

Der Fall einer Überschneidung kann also nie auftauchen.

Das Problem der Überschneidung



4. Stufe, 80°



9. Stufe, 100°

Macht man die Knicke der Drachenkurve

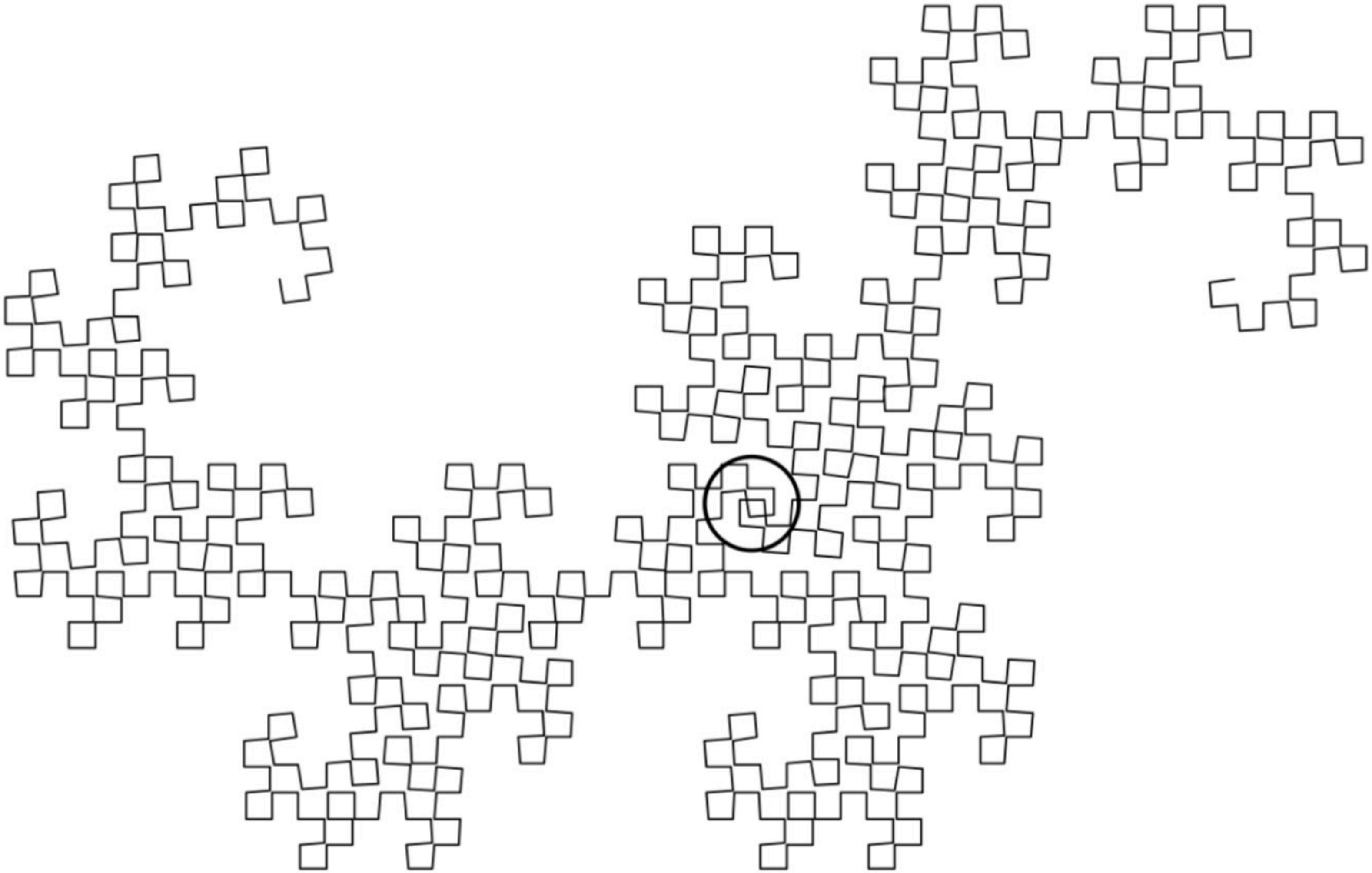
kleiner als 90° | größer als 90°

so kommt es

zu Überschneidungen | zu keinen Überschneidungen

– FALSCH –

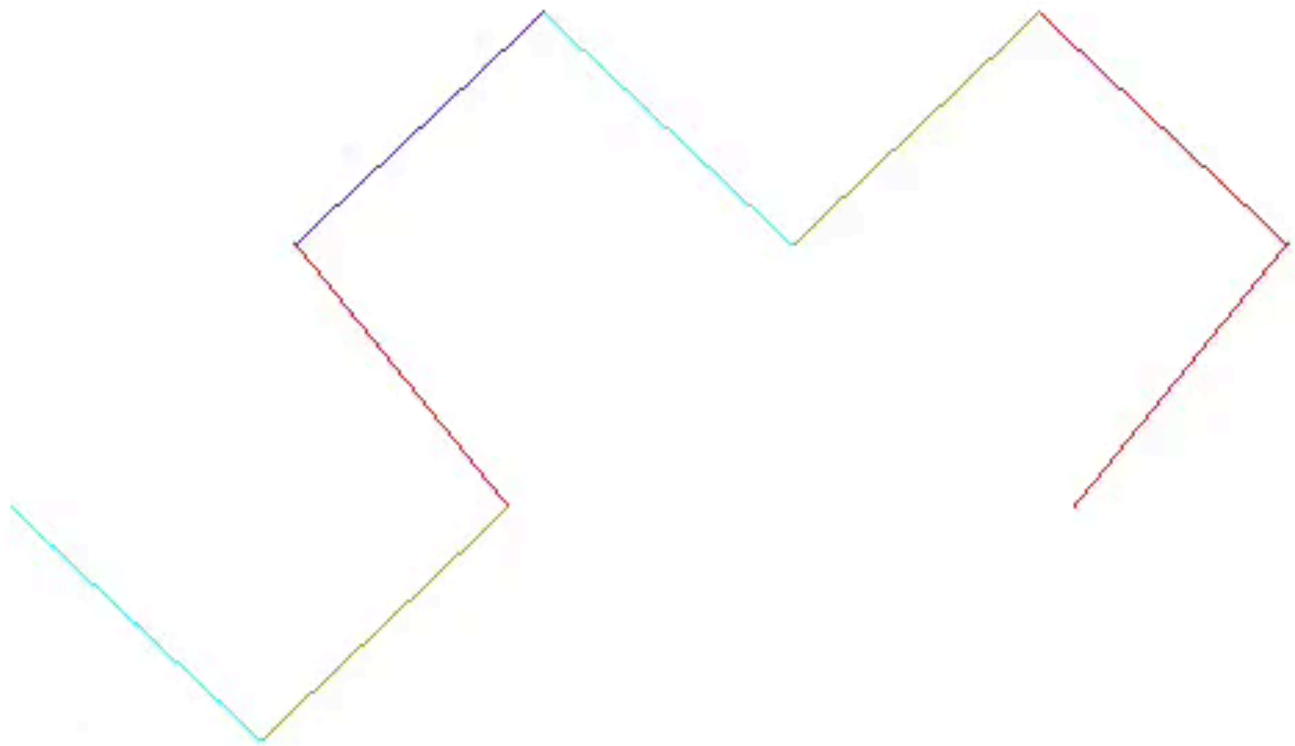
Das Problem der Überschneidung



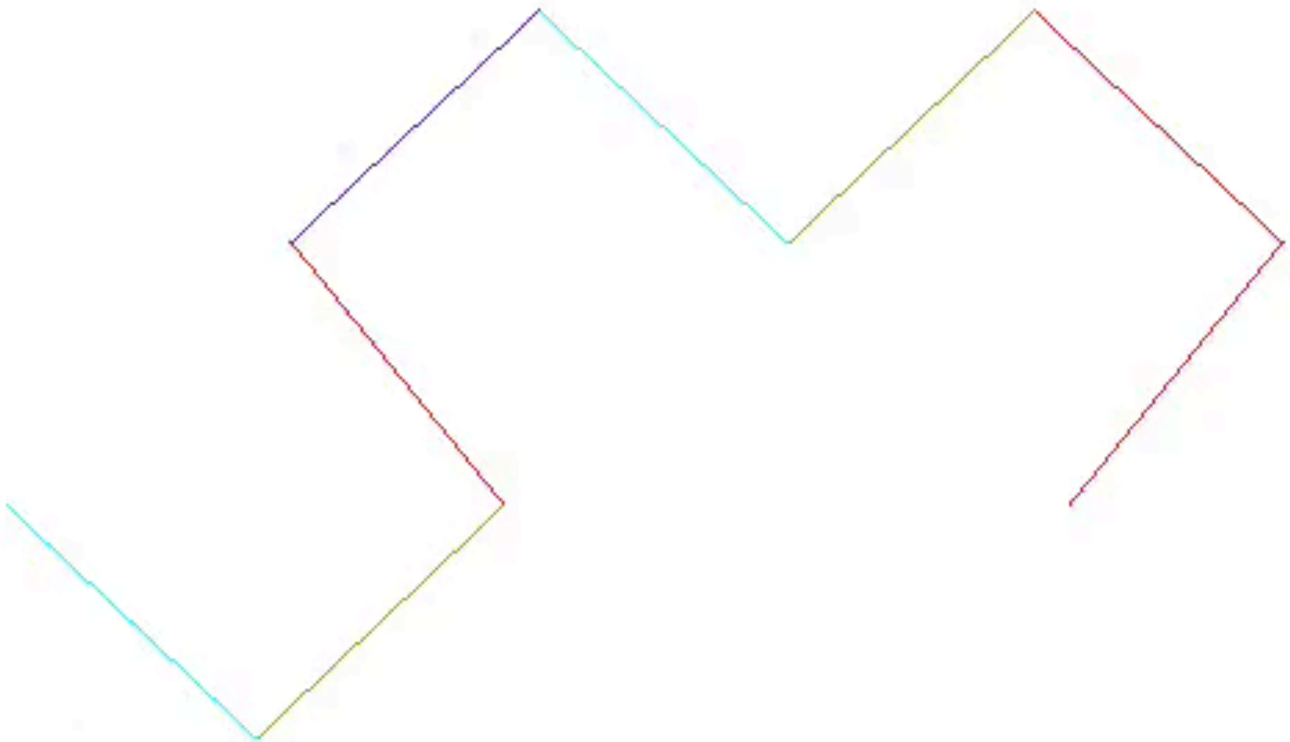
Bei Winkeln von ca. 94° kommt es zu Überschneidungen

Peitgen, 1995

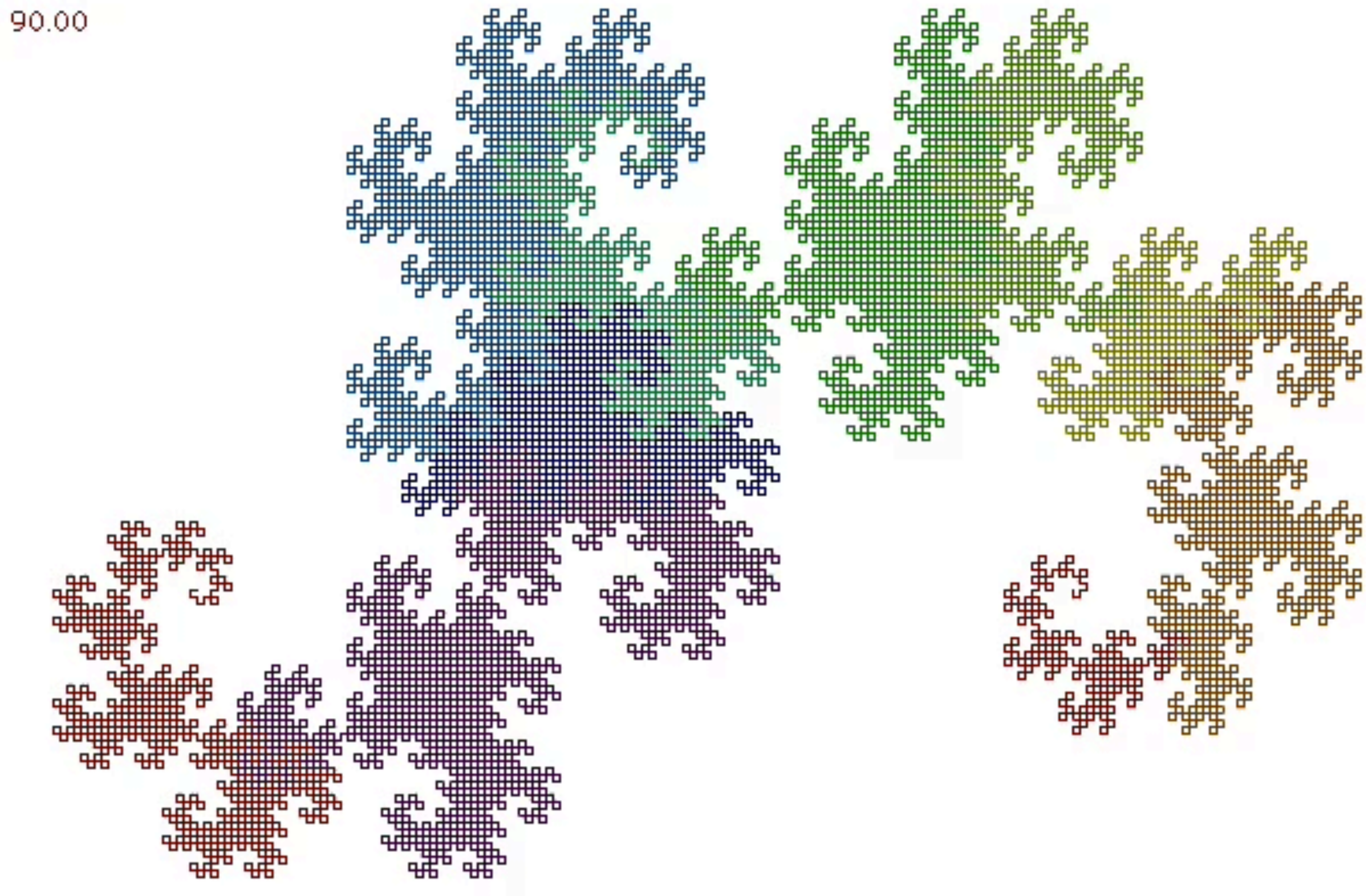
Das Problem der Überschneidung



Das Problem der Überschneidung



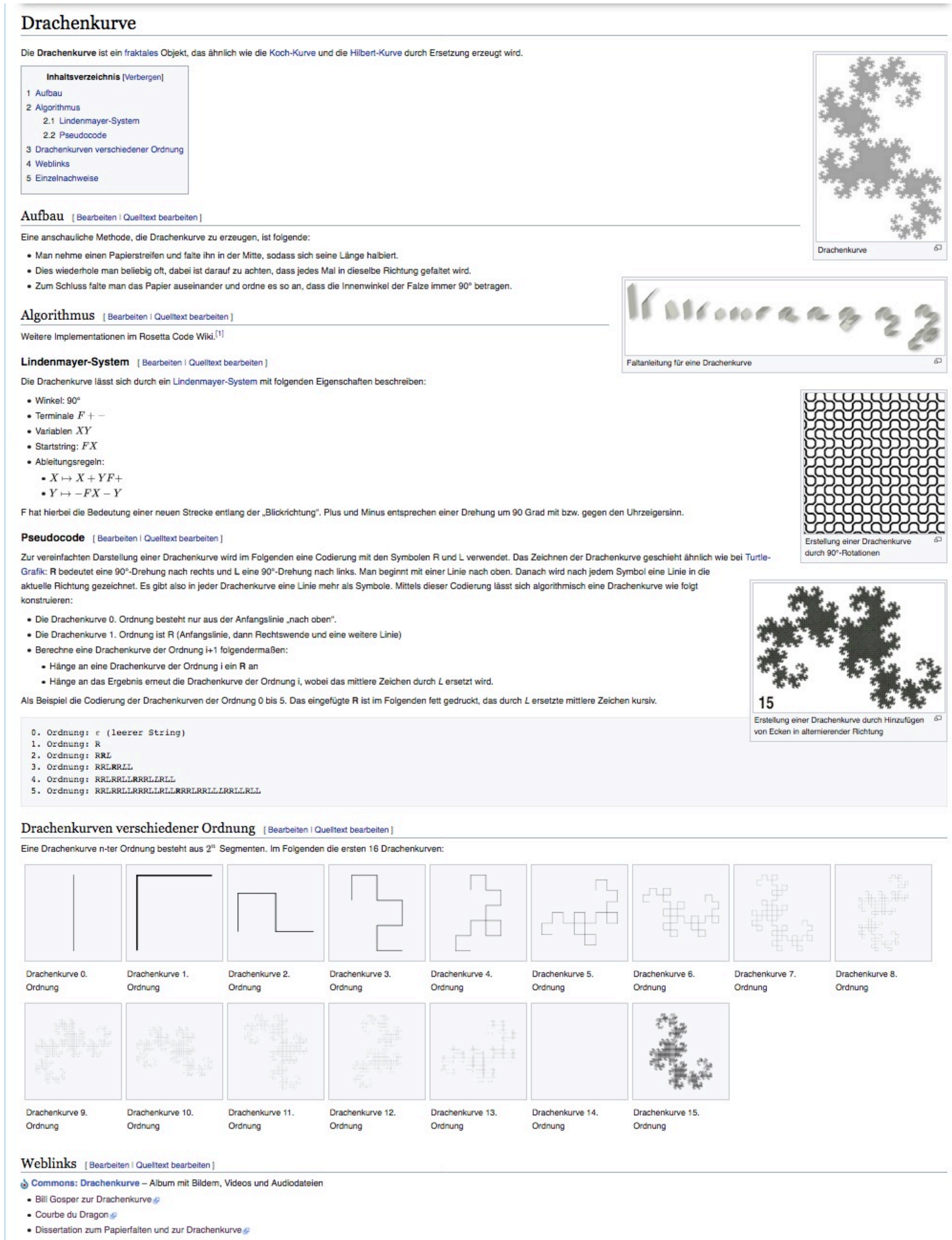
Das Problem der Überschneidung



Weitere Informationen

Wikipedia
Stichwort „Drachenkurve“

Link auf meine Arbeit zum Papierfalten



Drachenkurve

Die **Drachenkurve** ist ein fraktales Objekt, das ähnlich wie die Koch-Kurve und die Hilbert-Kurve durch Ersetzung erzeugt wird.

Inhaltsverzeichnis [Verbergen]

Drachenkurve

Aufbau [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine anschauliche Methode, die Drachenkurve zu erzeugen, ist folgende:

- Man nehme einen Papierstreifen und falte ihn in der Mitte, sodass sich seine Länge halbiert.
- Dies wiederhole man beliebig oft, dabei ist darauf zu achten, dass jedes Mal in dieselbe Richtung gefaltet wird.
- Zum Schluss falte man das Papier auseinander und ordne es so an, dass die Innenwinkel der Falze immer 90° betragen.

Faltanleitung für eine Drachenkurve

Algorithmus [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Weitere Implementationen im Rosetta Code Wiki.[1]

Lindenmayer-System [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Die Drachenkurve lässt sich durch ein Lindenmayer-System mit folgenden Eigenschaften beschreiben:

- Winkel: 90°
- Terminale $F + -$
- Variablen XY
- Startstring: FX
- Ableitungsregeln:
  - $X \mapsto X + YF +$
  - $Y \mapsto -FX - Y$

F hat hierbei die Bedeutung einer neuen Strecke entlang der „Blickrichtung“. Plus und Minus entsprechen einer Drehung um 90 Grad mit bzw. gegen den Uhrzeigersinn.

Erstellung einer Drachenkurve durch 90°-Rotationen

Pseudocode [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Zur vereinfachten Darstellung einer Drachenkurve wird im Folgenden eine Codierung mit den Symbolen R und L verwendet. Das Zeichnen der Drachenkurve geschieht ähnlich wie bei Turtle-Grafik: **R** bedeutet eine 90°-Drehung nach rechts und **L** eine 90°-Drehung nach links. Man beginnt mit einer Linie nach oben. Danach wird nach jedem Symbol eine Linie in die aktuelle Richtung gezeichnet. Es gibt also in jeder Drachenkurve eine Linie mehr als Symbole. Mittels dieser Codierung lässt sich algorithmisch eine Drachenkurve wie folgt konstruieren:

- Die Drachenkurve 0. Ordnung besteht nur aus der Anfangslinie „nach oben“.
- Die Drachenkurve 1. Ordnung ist R (Anfangslinie, dann Rechtswende und eine weitere Linie)
- Berechne eine Drachenkurve der Ordnung i+1 folgendermaßen:
  - Hänge an eine Drachenkurve der Ordnung i ein **R** an
  - Hänge an das Ergebnis erneut die Drachenkurve der Ordnung i, wobei das mittlere Zeichen durch *L* ersetzt wird.

Als Beispiel die Codierung der Drachenkurven der Ordnung 0 bis 5. Das eingefügte **R** ist im Folgenden fett gedruckt, das durch *L* ersetzte mittlere Zeichen kursiv.

```
0. Ordnung: ε (leerer String)
1. Ordnung: R
2. Ordnung: RRL
3. Ordnung: RRLRRLL
4. Ordnung: RRLRRLLRRRLLRLL
5. Ordnung: RRLRRLLRRRLLRLLRRRLRRLLLRRLLRLL
```

15

Erstellung einer Drachenkurve durch Hinzufügen von Ecken in alternierender Richtung

Drachenkurven verschiedener Ordnung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine Drachenkurve n-ter Ordnung besteht aus 2^n Segmenten. Im Folgenden die ersten 16 Drachenkurven:

Drachenkurve 0. Ordnung
Drachenkurve 1. Ordnung
Drachenkurve 2. Ordnung
Drachenkurve 3. Ordnung
Drachenkurve 4. Ordnung
Drachenkurve 5. Ordnung
Drachenkurve 6. Ordnung
Drachenkurve 7. Ordnung
Drachenkurve 8. Ordnung
Drachenkurve 9. Ordnung
Drachenkurve 10. Ordnung
Drachenkurve 11. Ordnung
Drachenkurve 12. Ordnung
Drachenkurve 13. Ordnung
Drachenkurve 14. Ordnung
Drachenkurve 15. Ordnung

Weblinks [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Commons: Drachenkurve – Album mit Bildern, Videos und Audiodateien

- Bill Gosper zur Drachenkurve
- Courbe du Dragon
- Dissertation zum Papierfalten und zur Drachenkurve