

Papierfalten

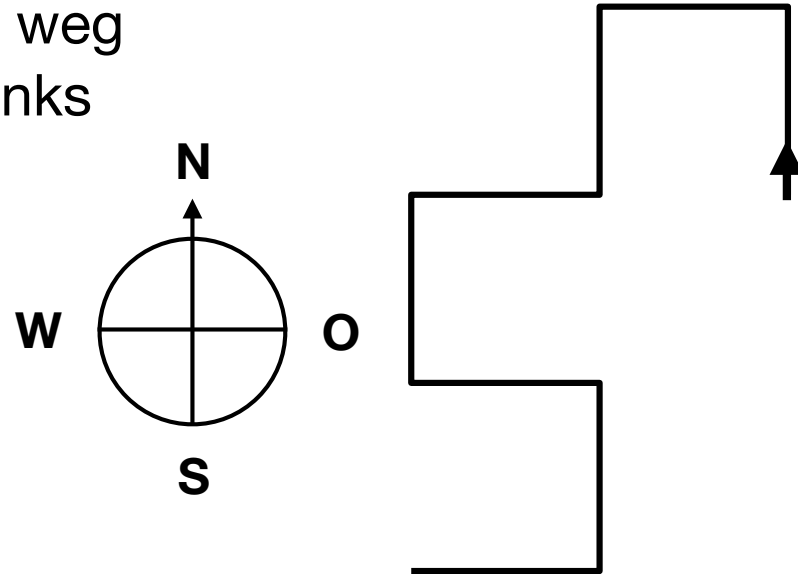
Variationen der Codierung und der Faltvorschrift

Eine neue Codierung

Es werden die üblichen Papierfaltungsfiguren (Drachenskurven) betrachtet mit der üblichen Ausrichtung

- der erste Abschnitt weist von uns weg
 - der zweite Abschnitt weist nach links
- (so dass der erste Knick ein Linksknick ist)

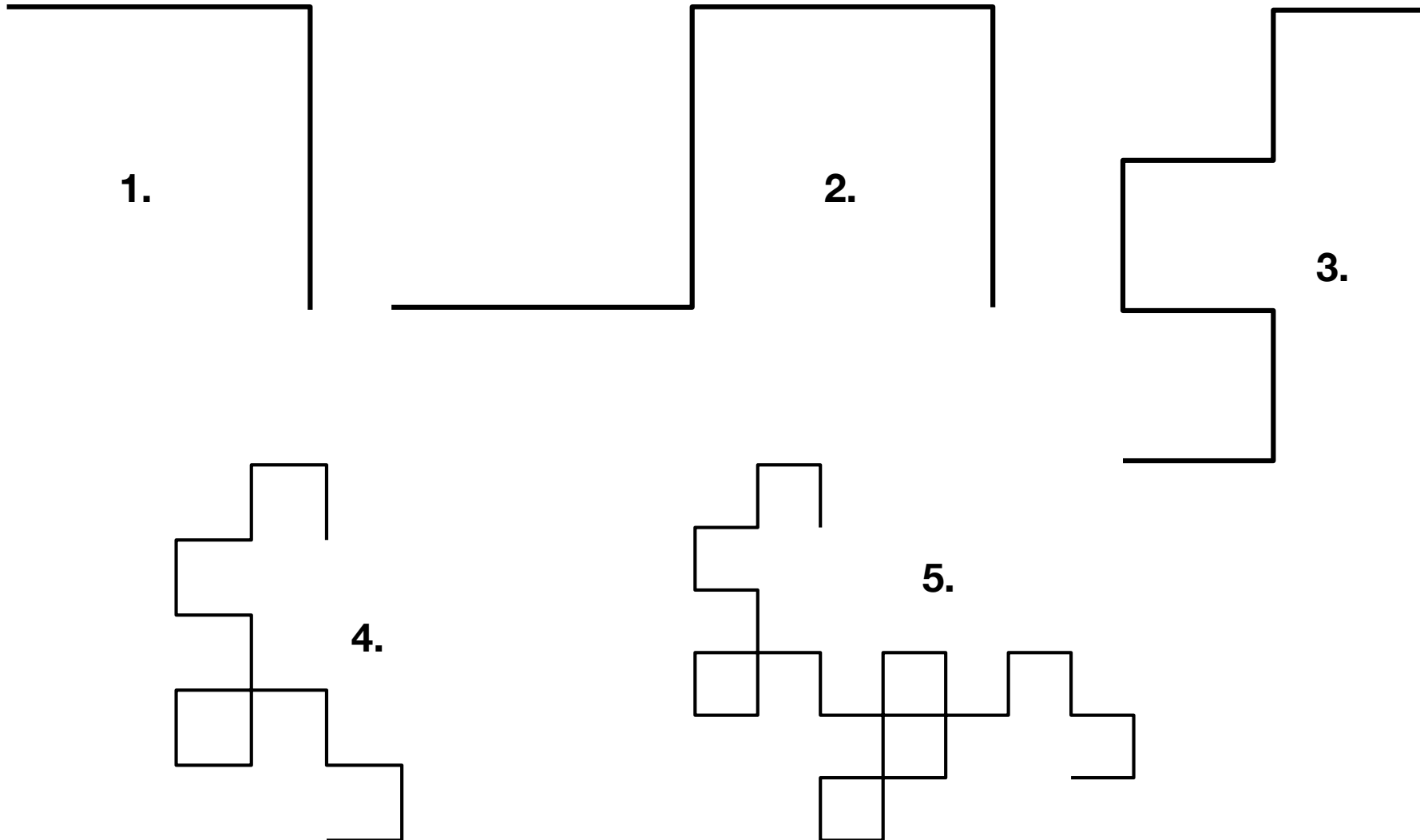
Läuft man nun auf dem Streifen vom Anfang zum Ende, notiert man die Himmelsrichtung jedes einzelnen Abschnittes.



Beispiel (3. Stufe): NWSWSOSW

Eine neue Codierung

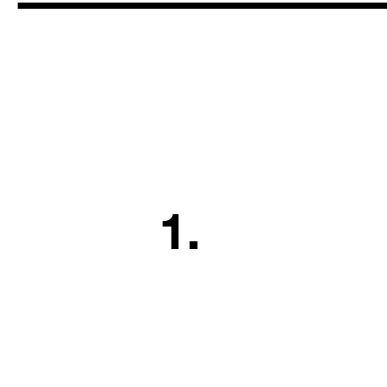
Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:



Eine neue Codierung

Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:

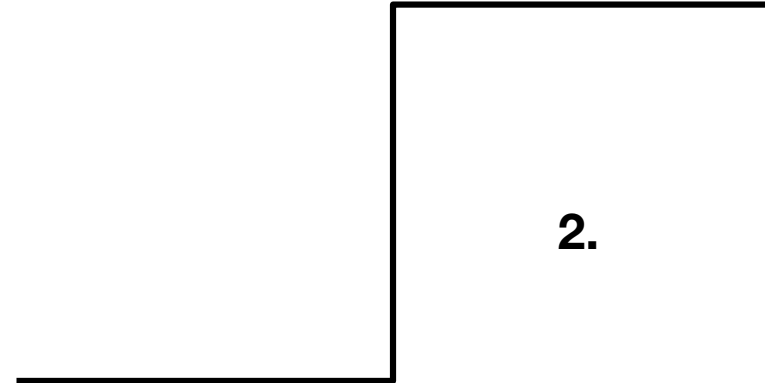
1. NW



Eine neue Codierung

Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:

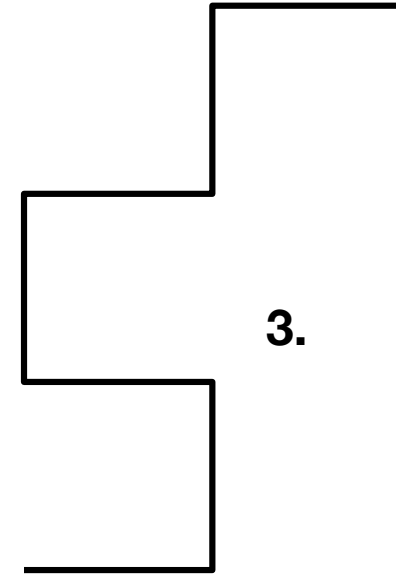
1. NW
2. NWSW



Eine neue Codierung

Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:

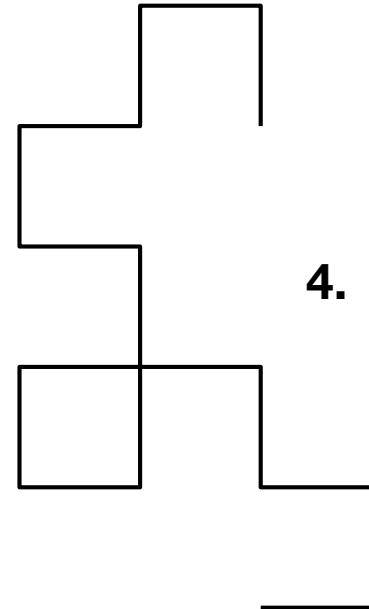
1. NW
2. NWSW
3. NWSWSOSW



Eine neue Codierung

Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:

1. NW
2. NWSW
3. NWSWSOSW
4. NWSWSOSWSONOSOSW



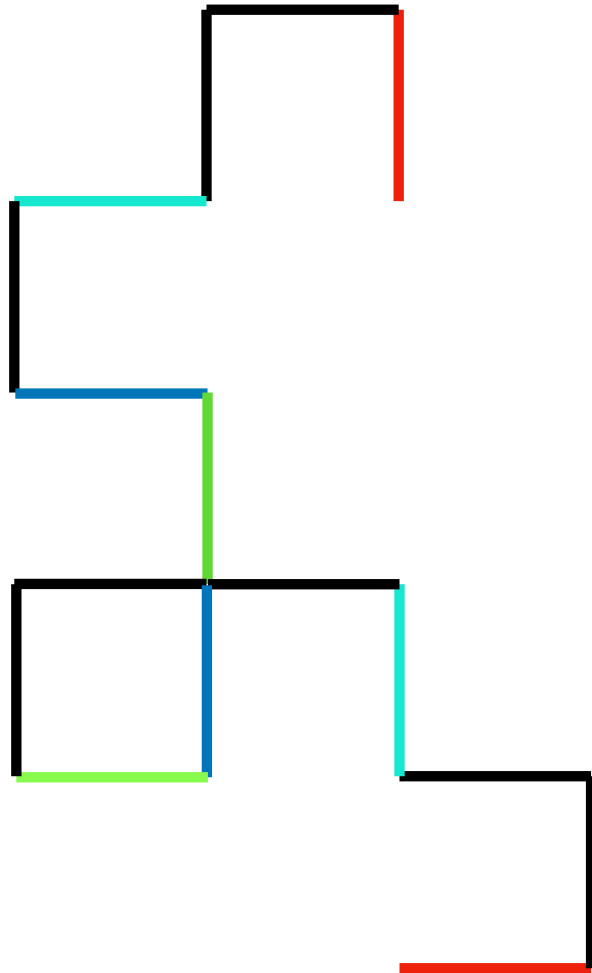
Eine neue Codierung

Die ersten fünf Streifen liefern in dieser neuen Codierung:

1. NW
2. NWSW
3. NWSWSOSW
4. NWSWSOSWSONOSOSW
5. NWSWSOSWSONOSOSWSONONWNOSONOSOSW

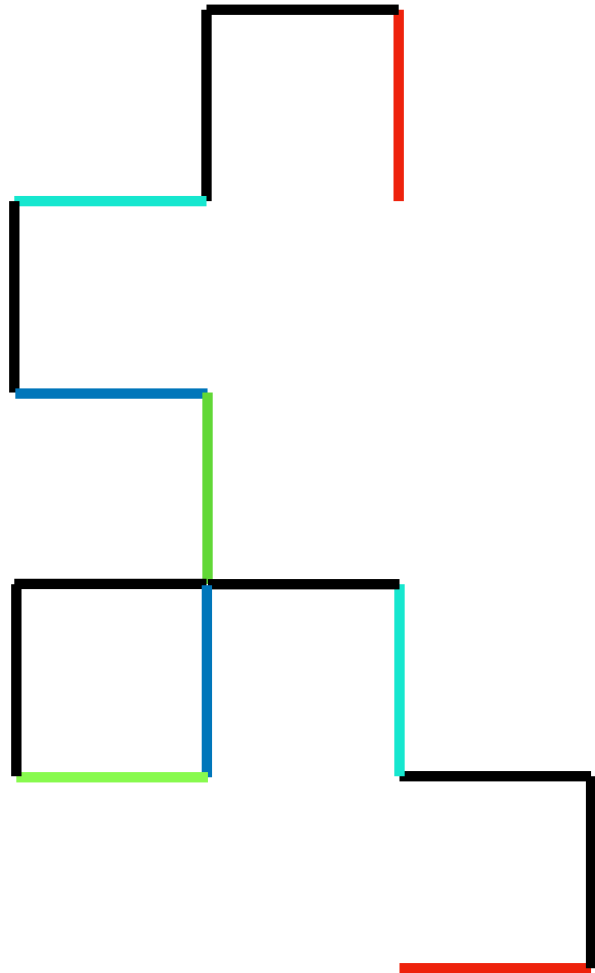
Das Reflexionsgesetz

Entdeckungen beim Auffalten



Das Reflexionsgesetz

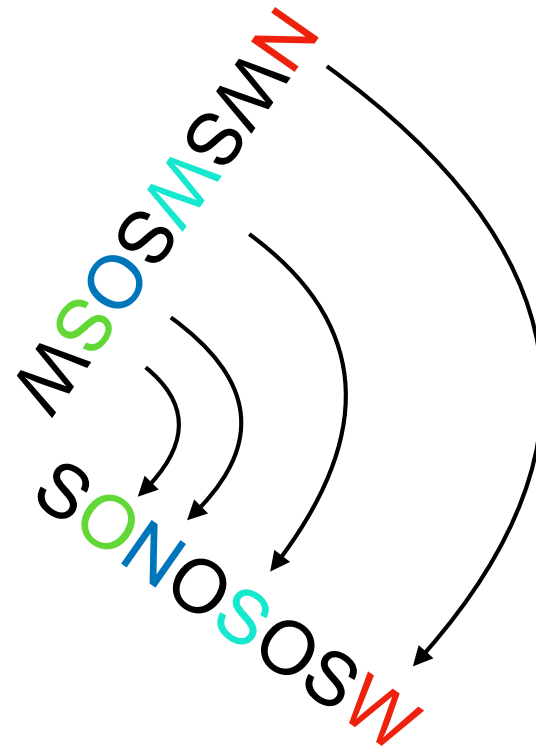
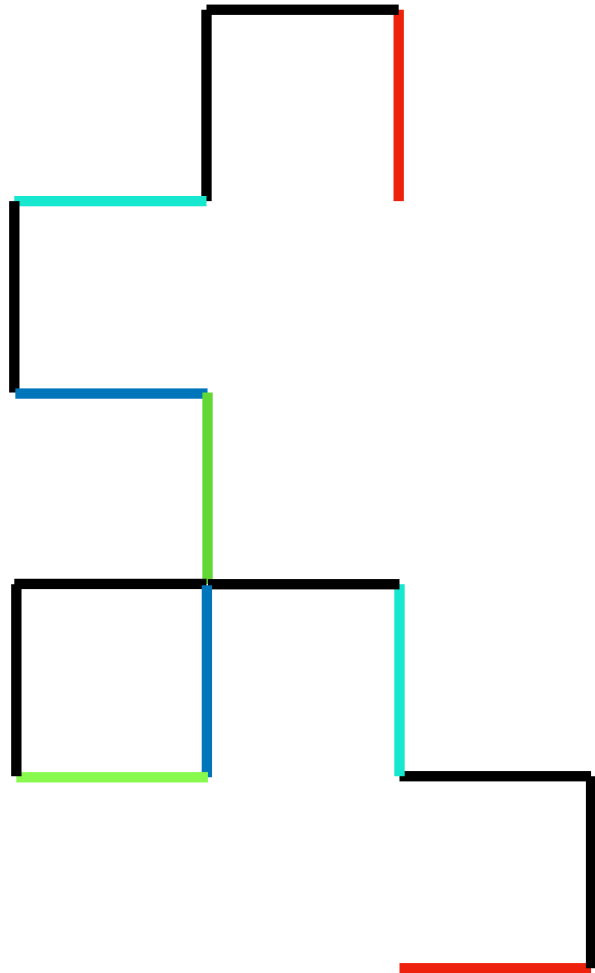
Entdeckungen beim Auffalten



MSOSMSMN
SONOSOSW

Das Reflexionsgesetz

Entdeckungen beim Auffalten

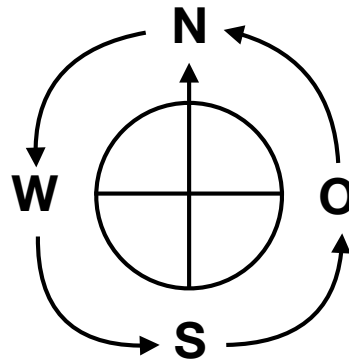


Das Reflexionsgesetz

Man gelangt von einem Codierungswort zum nächsten, indem man

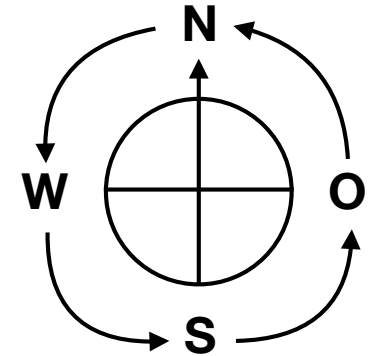
- das alte Wort abschreibt
- das alte Wort anschließend rückwärts schreibt mit folgender Änderung

N → W
W → S
S → O
O → N



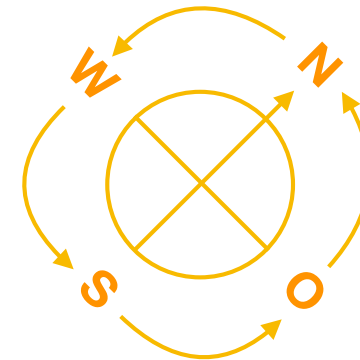
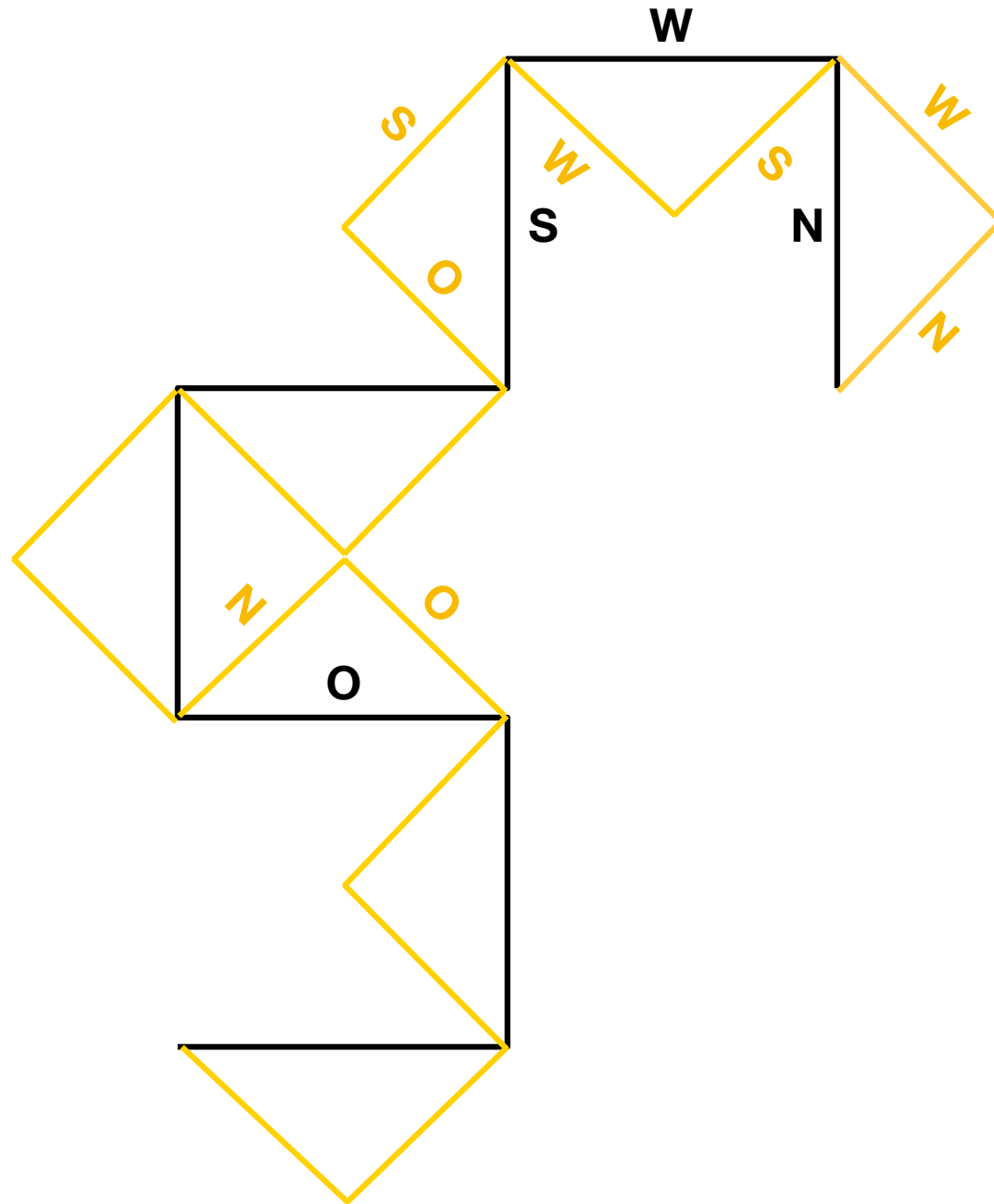
Das Reflexionsgesetz

Beispiel: vom 3. Wort zum 4.



NWSWSOSW|SONOSOSW
NWSWSOSW|SONOSOSW

Das Inflationsgesetz

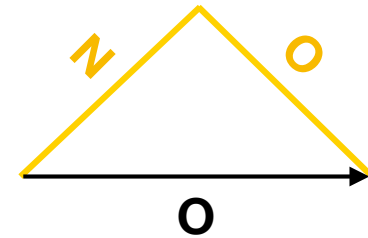
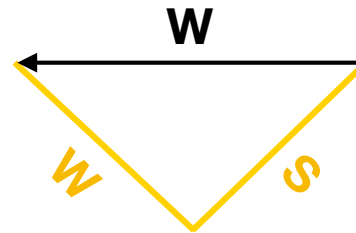
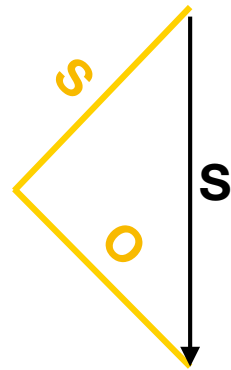
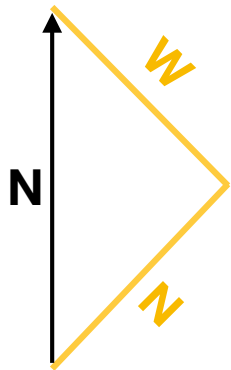
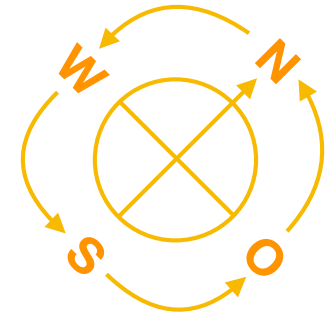
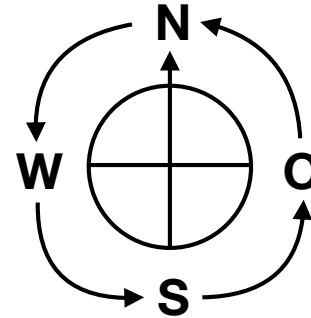


Das Inflationsgesetz

Es gelten folgende Ersetzungsregeln:

$N \rightarrow NW = NN^D$ $S \rightarrow SO = SS^D$

$W \rightarrow SW = W^D W$ $O \rightarrow NO = O^D O$



Bei N und S wird dahinter angefügt,
bei O und W wird davor eingefügt.

Das Inflationsgesetz

Praktische Durchführung des Inflationsgesetzes

erstes Symbol abschreiben

zwei Lücken

die nächsten beiden Symbole abschreiben

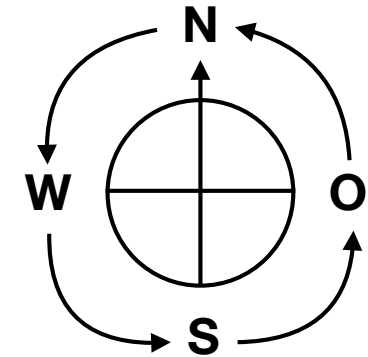
zwei Lücken

...

die nächsten beiden Symbole abschreiben

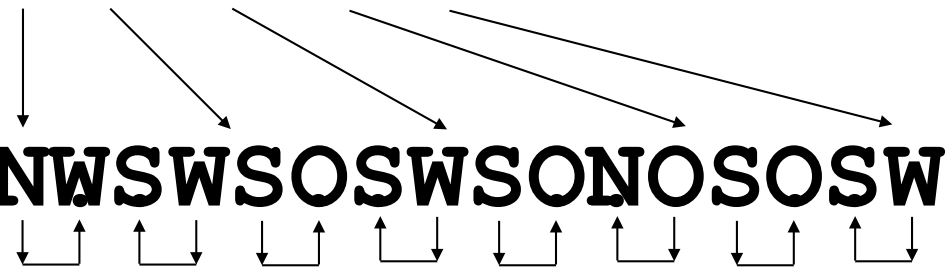
zwei Lücken

letztes Symbol abschreiben



NWSWSOSW

NWSWSOSWSONOSOSW



Dann die Lücken von links und rechts durch die jeweils „gedrehten“ Symbole füllen.

Berechnung des Symbols

Man kann auch für diese Codierung der Papierfaltungsfolge/
Drachenkurve berechnen, welches Symbol an einer vorgegebenen
Platznummer steht.

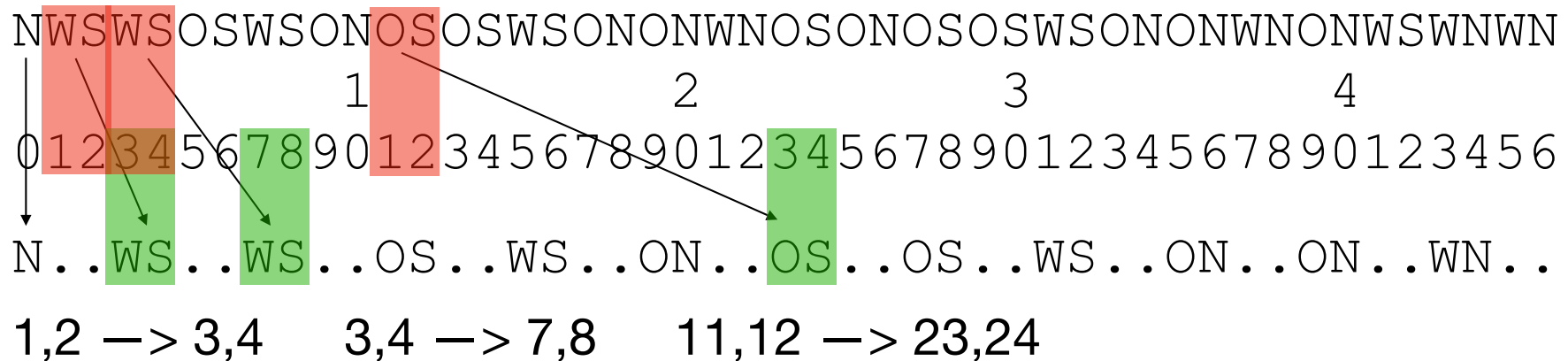
Allerdings ist die Berechnung nicht ganz so einfach.

Nummerierung
beginnt mit Null!

```
NWSWSOSWSONOSOSWSONONWNOSONOSOSWSONONWNONWSWNWNOSONONWNOSONOSOSW
      1           2           3           4           5           6
0123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123
```

Berechnung des Symbols

nach dem Inflationsgesetz



Allgemein:

Das Paar u, g wird bei einem Schritt mit dem Inflationsgesetz verschoben auf $2u+1, 2g$

Die Lücken werden folgendermaßen gefüllt (z.B. um 7,8)

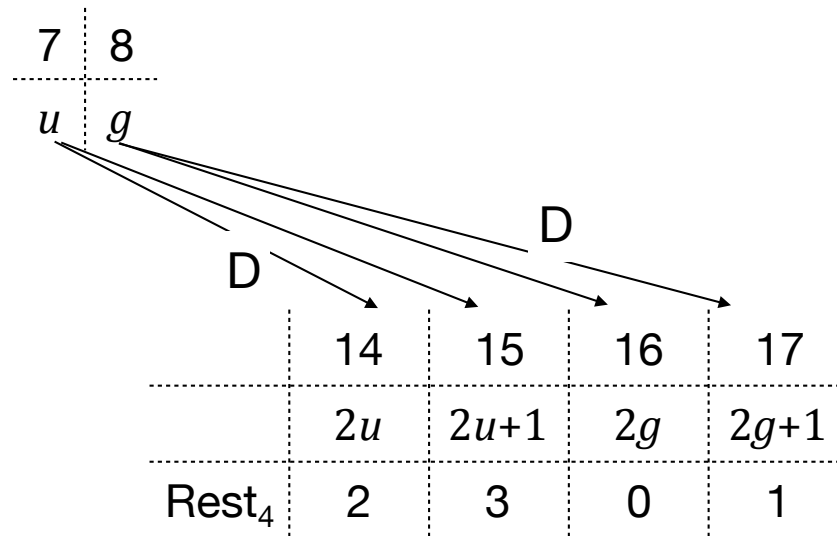
Platz 9 durch das „gedrehte“ Zeichen von Platz 8, das ist gleich dem Zeichen von Platz 4.

$$2g+1 \text{ durch } (2g)^D = g^D$$

Platz 6 durch das „gedrehte“ Zeichen von Platz 7, das ist gleich dem Zeichen von Platz 3.

$$2u \text{ durch } (2u+1)^D = u^D$$

Berechnung des Symbols nach dem Inflationsgesetz



Umgekehrt

Rest beim Teilen durch 4	rechne	Symbol	formal
0	:2	behalten	$n \rightarrow \frac{n}{2}$
1	-1, :2	drehen	$n \rightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right)^D$
2	:2	drehen	$n \rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^D$
3	-1, :2	behalten	$n \rightarrow \frac{n-1}{2}$

Berechnung des Symbols

nach dem Inflationsgesetz

Rest ₄	0	1	2	3
zurück- rechnen	$n \rightarrow \frac{n}{2}$	$n \rightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right)^D$	$n \rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^D$	$n \rightarrow \frac{n-1}{2}$

Beispielanwendung: Platz 58

Platz- nummer	58 →	29 ^D →	14 ^{DD} →	7 ^{DDD} →	3 ^{DDD} →	1 ^{DDD} →	0 ^{DDDD}
Rest ₄	2	1	2	3	3	1	

Auf Platz 0 steht N, das vier Mal weitergedreht ergibt wieder N.
Also: Auf Platz 58 steht ein N.

NWSWSOSWSONOSOSWSONONWNOSONOSOSWSONONWNONWSWNWNOSONONWNOSONOSOSW
 1 2 3 4 5 6
 0123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123

Berechnung des Symbols

nach dem Inflationsgesetz

Die Berechnung ist jedoch sehr einfach, wenn man die Platznummer wieder binär darstellt.

Rest ₄	0	1	2	3
zurück-rechnen	$n \rightarrow \frac{n}{2}$	$n \rightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right)^D$	$n \rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^D$	$n \rightarrow \frac{n-1}{2}$
Rest ₄ binär	00	01	10	11

Jede der vier Zurückrechnungen bedeutet binär einfach „streiche die letzte Ziffer“.

Interessant ist also nur, ob das Zeichen weitergedreht wird oder nicht.

Es kommt ein Drehen hinzu, wenn die Ziffern am Ende verschieden sind.

Die Anzahl der Ziffernwechsel ist also gleich der Anzahl der Drehungen.

Berechnung des Symbols

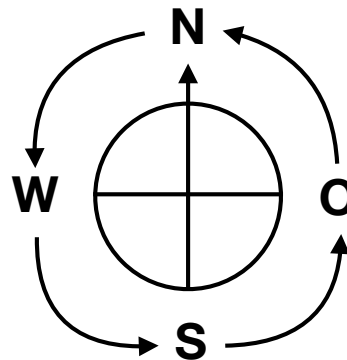
nach dem Inflationsgesetz

Beispiel 58

$$58 = 32 + 26 = 32 + 16 + 10 = 32 + 16 + 8 + 2$$

$$58 = 0 \downarrow 1 \downarrow 1 \downarrow 1 \downarrow 0 \downarrow 1 \downarrow 0$$

Vier Ziffernwechsel, also Vier „Drehungen“
von N wieder auf N.

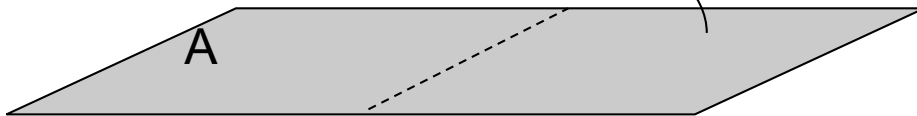


0	00000000	0	N
1	00000001	1	W
2	00000010	2	S
3	00000011	1	W
4	00000100	2	S
5	00000101	3	O
6	00000110	2	S
7	00000111	1	W
8	00001000	2	S
9	00001001	3	O
10	00001010	4	N
11	00001011	3	O
12	00001100	2	S
13	00001101	3	O
14	00001110	2	S
15	00001111	1	W
16	00010000	2	S
17	00010001	3	O
18	00010010	4	N
19	00010011	3	O
20	00010100	4	N
21	00010101	5	W
22	00010110	4	N
23	00010111	3	O
24	00011000	2	S

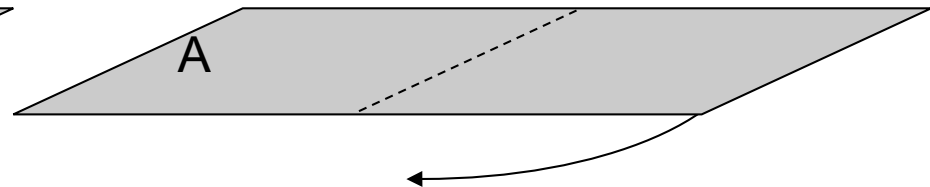
Eine Variation des Faltens

Das Falten geschieht nicht nur mit „rechts über links“ (+), sondern auch mit „rechts unter links“ (-). Die Knickfolge muss natürlich protokolliert werden oder vorgegeben sein.

+ Faltung



- Faltung



Die +-Faltung

Falten Sie nacheinander (fünf) Streifen mit

+

+-

+--+

+--+--

+--+--+

und protokollieren Sie die sich ergebenden Knickfolgen

Die +-Faltung

Falten Sie nacheinander (fünf) Streifen mit

+ **L**

+− **RLL**

+−+ **LRLLLLR**

+−+− **RLLRRLLRLLLRRL**

+−+−+ **LRLLLLRRLRRLLRLLRLLLRLLRRLLR**

und protokollieren Sie die sich ergebenden Knickfolgen

Man bemerkt sofort:

Es ergibt sich **nicht mehr** eine einheitliche Symbolfolge, die von Stufe zu Stufe länger wird.

Die +-Faltung

+ L
+- RLL
+-+ LRRLLLR
+-+- RLLRRRLRLLLRRL
+-+-+ LRRLLLRRRLRRLLRLLRRLLLRRRLLR

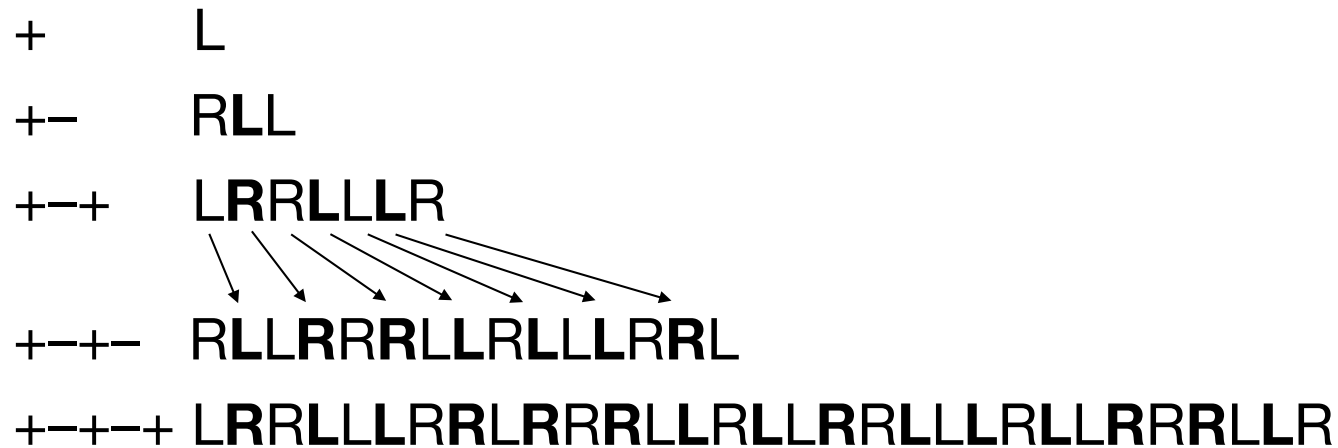
Das Reflexionsgesetz

Kopiere die vorhergehende Stufe mit entgegengesetztem Zeichen $L \leftrightarrow R$.

Hänge ein L an.

Reflektiere (im bisherigen Sinn) den ersten Teil an diesem L.

Die +-Faltung



Das Inflationsgesetz

Kopiere die vorhergehende Stufe mit Lücken.

Fülle vor, in die Lücken und danach abwechselnd L und R ein, wobei

mit $\begin{Bmatrix} L \\ R \end{Bmatrix}$ begonnen wird, wenn die letzte Faltung eine $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ Faltung war.

Die ++-Faltung

Falten Sie nacheinander (fünf) Streifen mit

+

++

++-

++-+

++-++

und protokollieren Sie die sich ergebenden Knickfolgen

Die ++-Faltung

Falten Sie nacheinander (fünf) Streifen mit

+ L

++ LLR

++- RLLRRL

++-+ LRRLLLRLLRRLLR

++-++ LLRRLRRLLLRLLRLLRRLRRLLRLLRR

und protokollieren Sie die sich ergebenden Knickfolgen

Man bemerkt sofort:

Es ergibt sich **nicht mehr** eine einheitliche Symbolfolge, die von Stufe zu Stufe länger wird.

Die ++-Faltung

+ L
++ LLR
++- RLLRRL
++-+ LRRLLRLRRRLLR
++-++ LLRRLRRLLLRRLRRLRRLLRRLRR

Das Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz ist nicht mehr anwendbar, da der erste Teil nicht aus der vorhergehenden Symbolfolge abgeleitet werden kann.

Es gilt aber weiterhin, dass das mittlere Symbol ein L ist und die hintere Hälfte die reflektierte vordere Hälfte ist.

Die ++-Faltung

+ L
++ LLR
++- RLLRRL
++-+ LRRLLRLLRRLLR
++-++ LLRRLRRLLLRLLRRLRRLLRLLRR

Das Inflationsgesetz

Kopiere die vorhergehende Stufe mit Lücken.

Fülle vor, in die Lücken und danach abwechselnd L und R ein, wobei

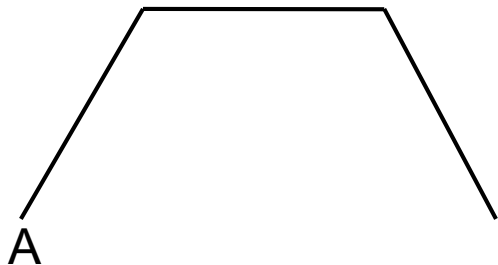
mit $\begin{Bmatrix} L \\ R \end{Bmatrix}$ begonnen wird, wenn die letzte Faltung eine $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ Faltung war.

Eine neue Faltvorschrift

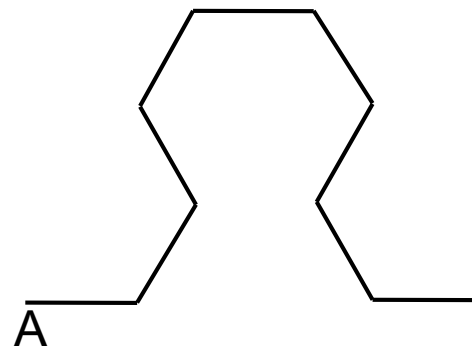
Der Streifen wird in Drittel geknickt.
linkes Drittel über das mittlere,
rechtes Drittel über das mittlere.



Auffalten mit 120° Winkeln



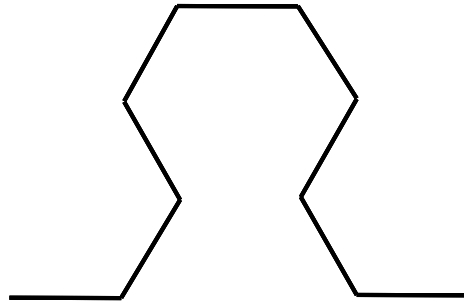
1. Stufe



2. Stufe

Drittelfalten

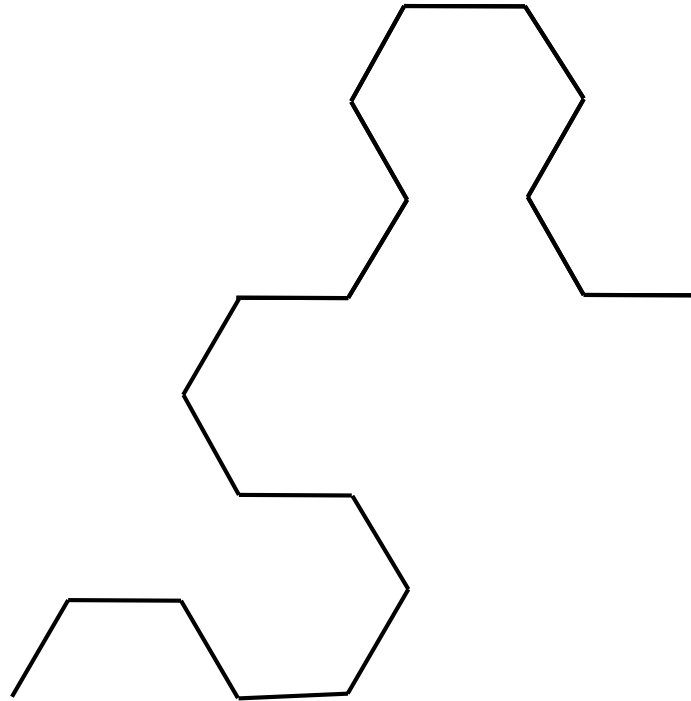
Auffalten



3. Stufe

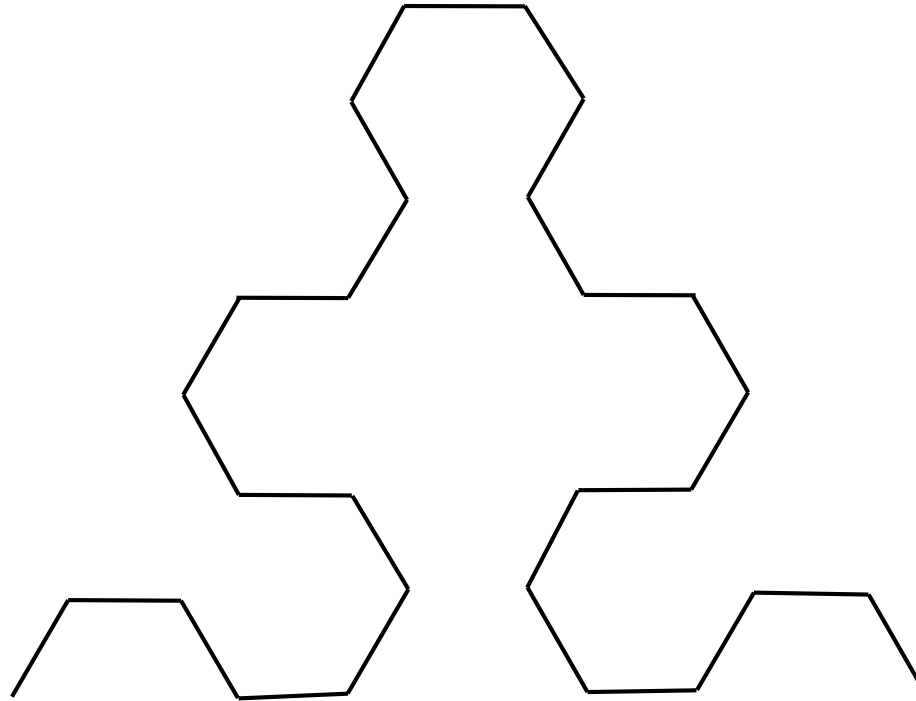
Drittelfalten

Auffalten



Drittelfalten

Auffalten

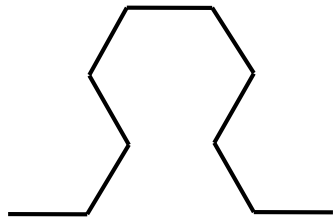


3. Stufe

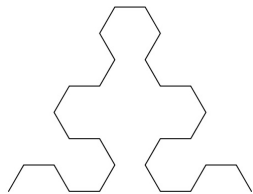
Drittelfalten



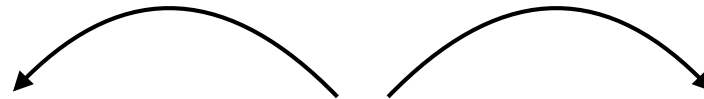
1. Stufe: RR



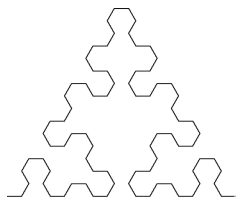
2. Stufe: LLRRRLL



3. Stufe: RRLLLLRRRLLRRRLLRRRLLRR



4. Stufe: LLRRRLLLRLLLRLLLRLLLRLLLR
 RRLLLLRRRLLRRRLLRRRLLLRLLLR
 LLRRRLLLRLLLRLLLRLLLRLLLR



Es gilt ein Reflexionsgesetz:

Der mittlere Teil wird an zwei R herausgeklappt

Drittelfalten

1. Stufe: RR
2. Stufe: LL**RRR**LL
3. Stufe: RR**LLL**RR**RL**LL**RRR**RL**RR**RL**LLL**RR
4. Stufe: LL**RRR**RL**LL**RR**LLL**RR**LLL**RR**RL**LL**RRR**RL**RR**RL**LLL**RR**RL**LL...

Inflationsgesetz

Die vorhergehende Stufe wird mit Lücken abgeschrieben. Vor, in die Lücken und dahinter wird abwechselnd LL und RR geschrieben. Bei geraden Stufen beginnt man mit LL, bei ungeraden Stufen mit RR.

Berechnung des Symbols

4. Stufe: LL**RRR**RL**LL**LR**RL**LL**LL**LR**RL**LL**LL**RR**RR**RL**LL**RR**RL**LL**LL**LR**RR**RL**LL**...

1
2
3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

n ist durch 3 teilbar $\xrightarrow{:3}$ neue Stufe $s-1$, neuer Platz $\frac{n}{3}$ \rightarrow weiter machen

n ist nicht durch 3 teilbar $\xrightarrow{\text{Rest } 6}$	Rest 1 oder 2,	s ungerade \rightarrow R
		s gerade \rightarrow L
	Rest 4 oder 5,	s ungerade \rightarrow L
		s gerade \rightarrow R

Beispiel

4. Stufe, Platz 30 $\xrightarrow{:3}$ 3. Stufe, Platz 10 $\xrightarrow{\text{Rest } 6}$

$s = 3$ ungerade, Rest = 4 \rightarrow L

Drittelfalten

Dieser Prozess führt im Grenzwert auf ein berühmtes Fraktal.

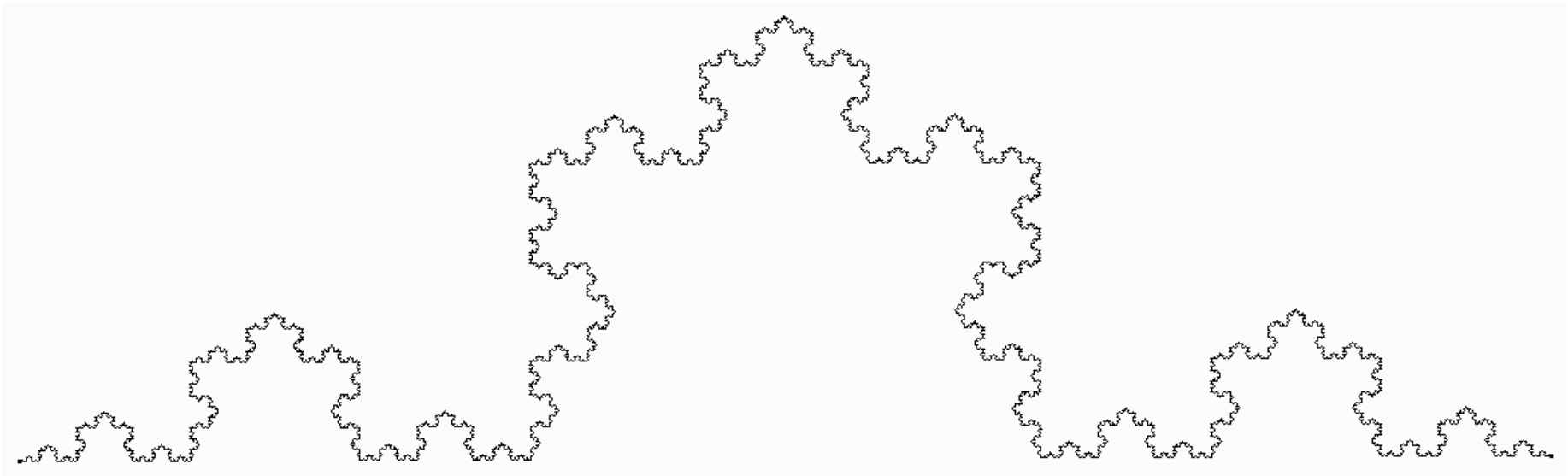


Das Sierpinski - Dreieck

Die Kochkurve

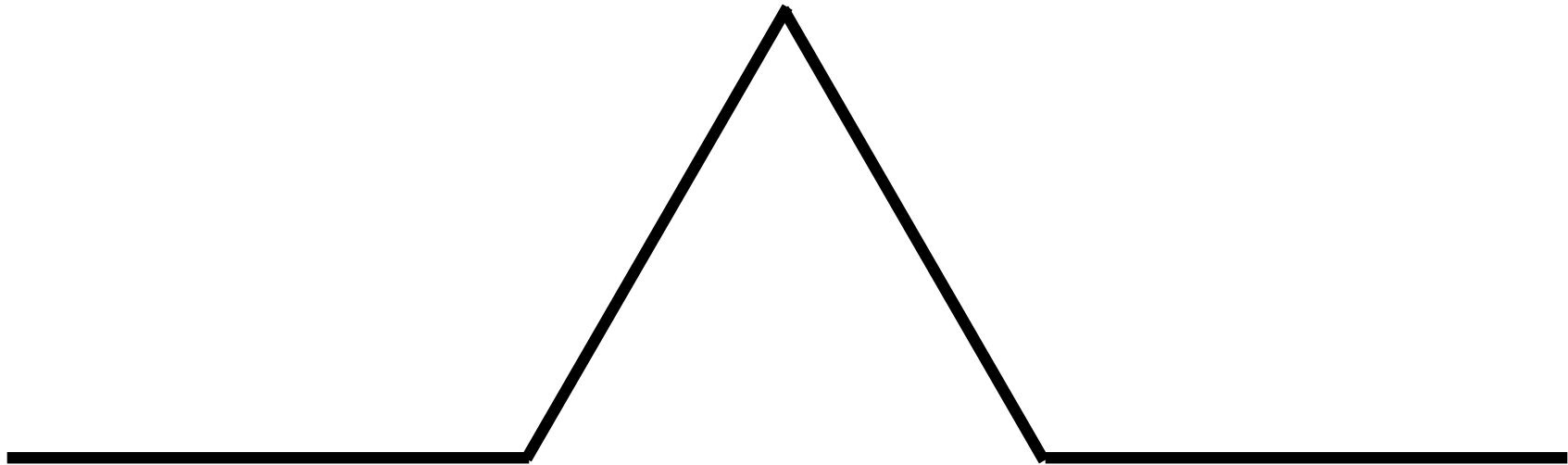


Die Kochkurve



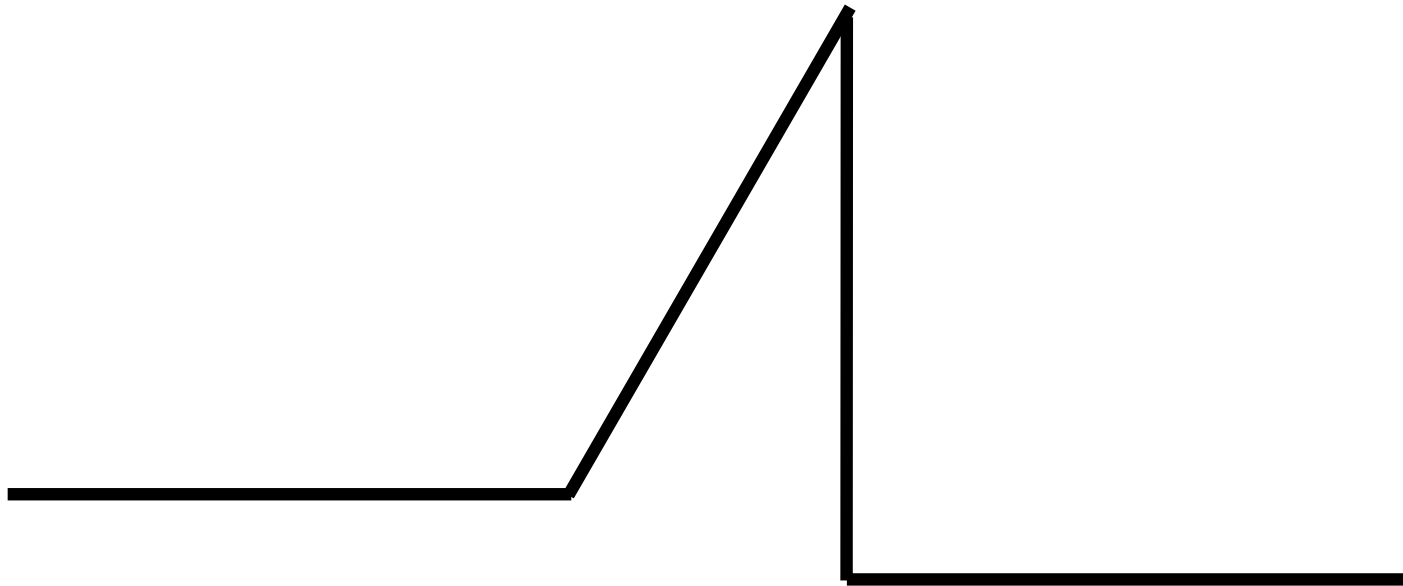
Kann man die Kochkurve durch Papierfalten erzeugen?

Die Kochkurve



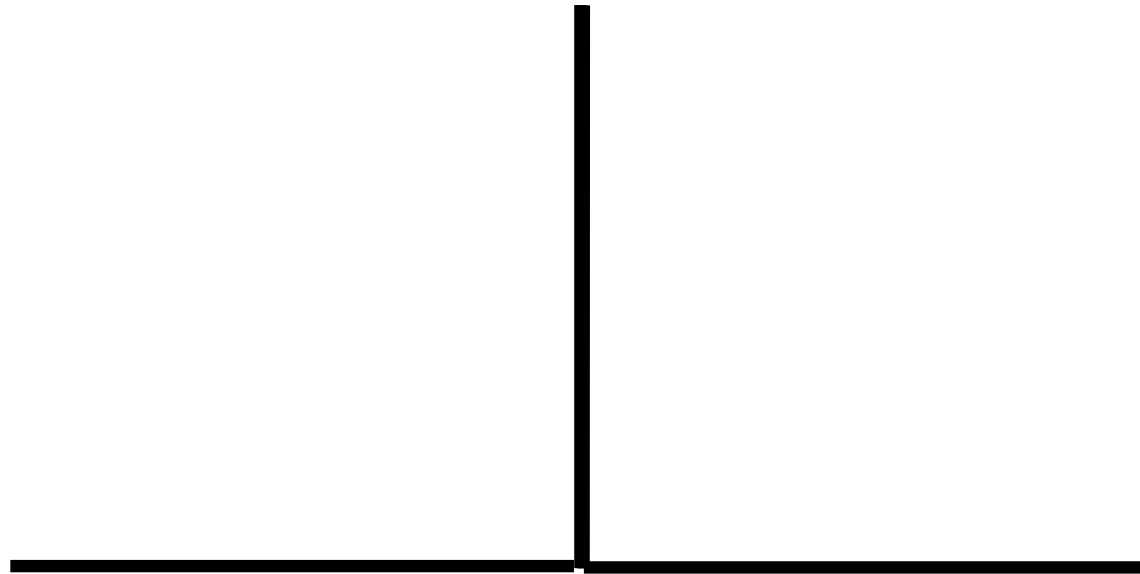
Der Faltvorgang

Die Kochkurve



Der Faltvorgang

Die Kochkurve



Der Faltvorgang

Die Kochkurve



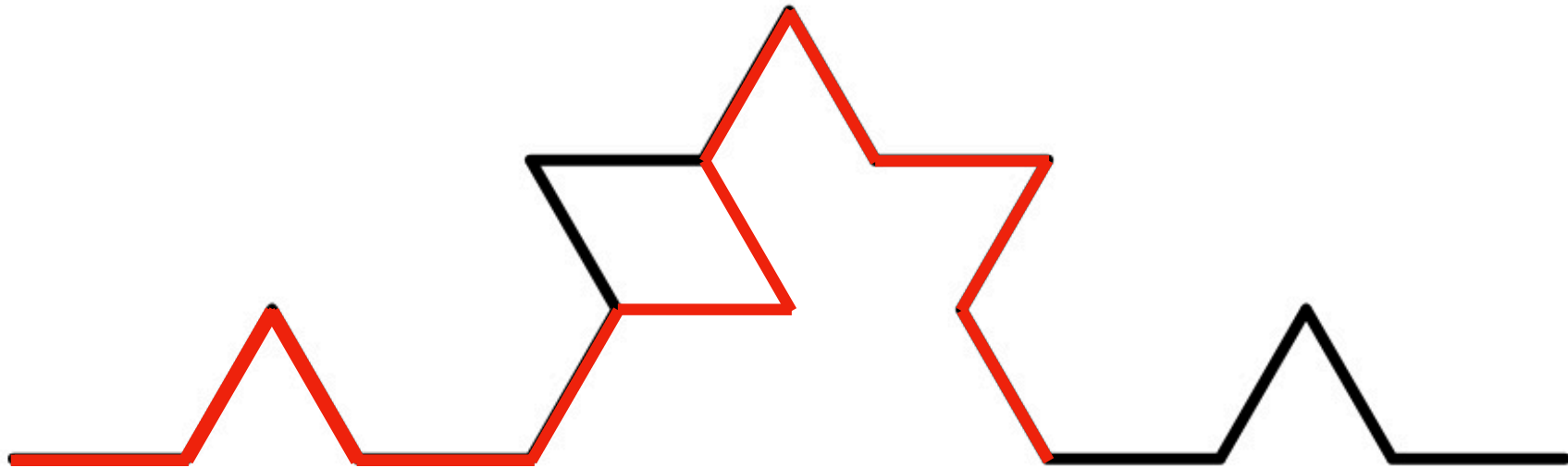
Der Faltvorgang

Die Kochkurve



Der Faltvorgang

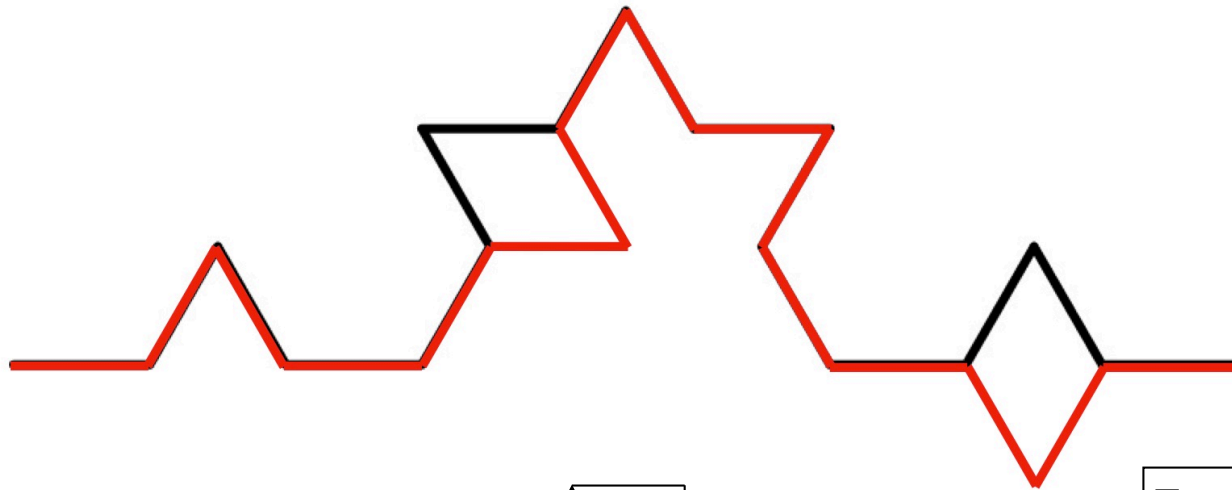
Die Kochkurve



Die Kochkurve lässt sich nicht falten.

Aber man kann eine **Alternative** falten, bei der die neuen Spitzen abwechselnd nach links und nach rechts aufgesetzt werden.

Die Kochkurve



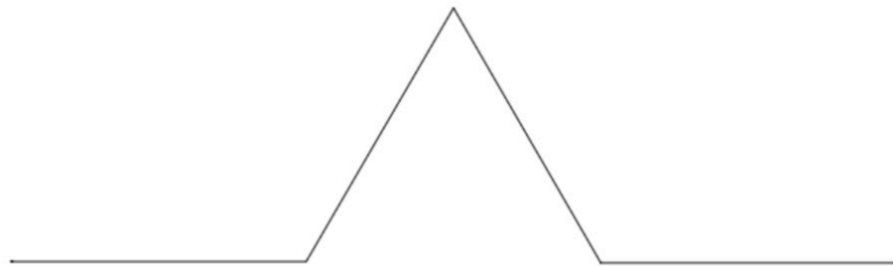
Kochkurve: LRL L LRL R LRL L LRL

Alternative: LRL L RLR R LRL L RLR

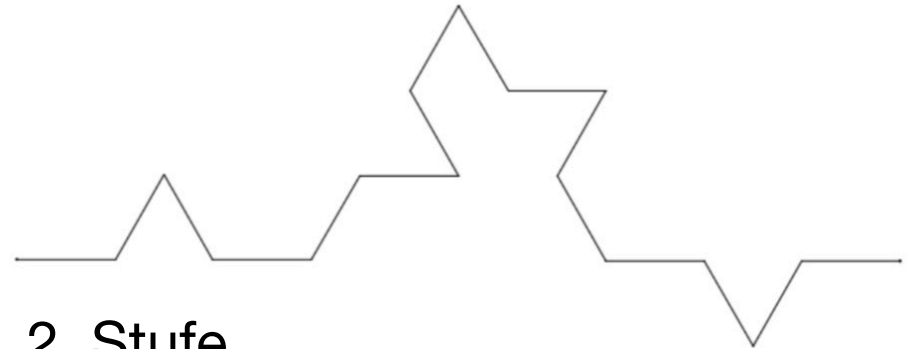


Für die Kochkurve gilt
das Reflexionsgesetz
nicht.

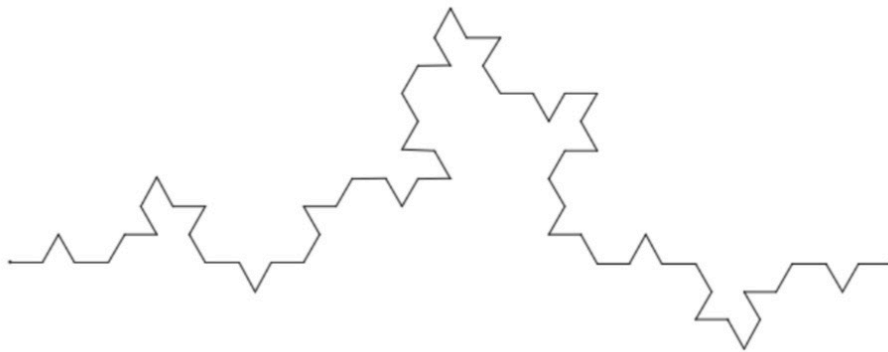
Die alternierende Kochkurve



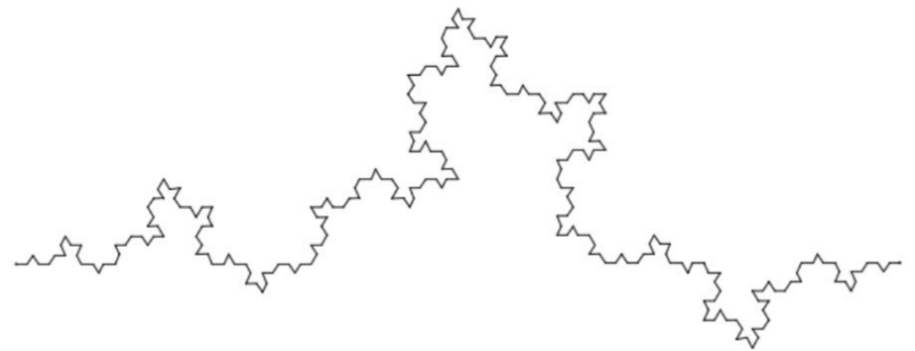
1. Stufe



2. Stufe



3. Stufe



4. Stufe