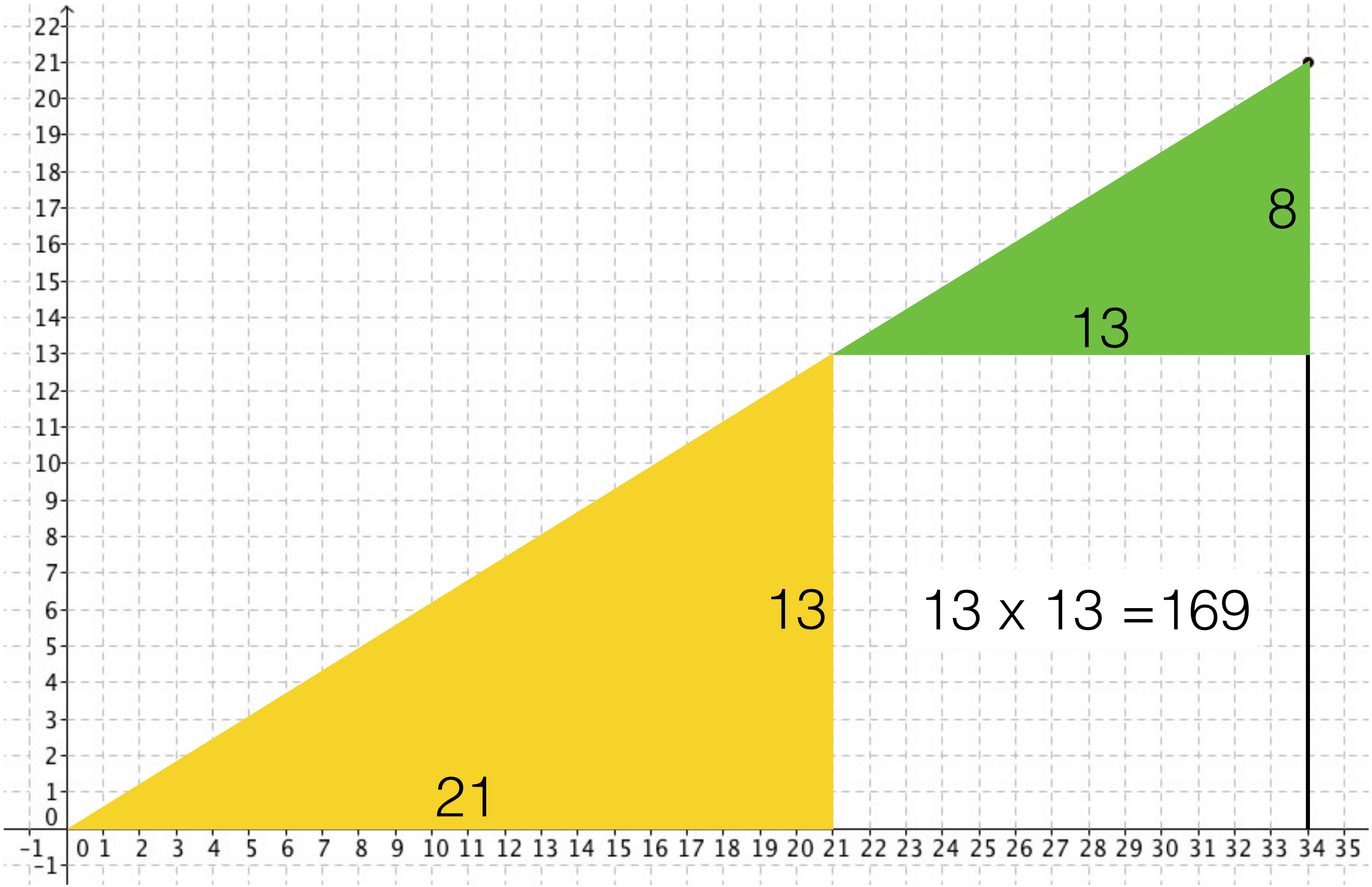
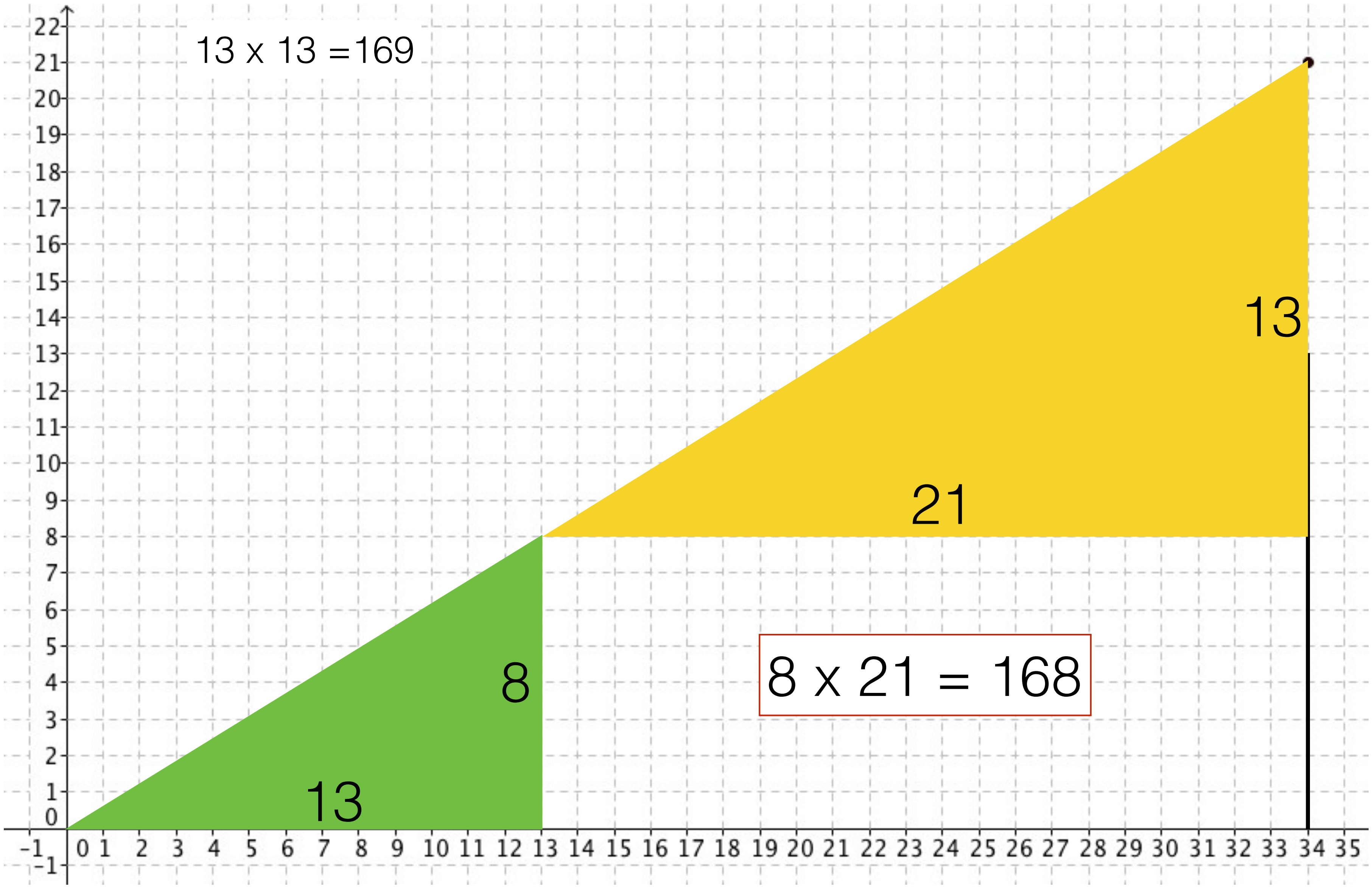
Goldener Schnitt
Fibonacci-Zahlen
Nachträge

4. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

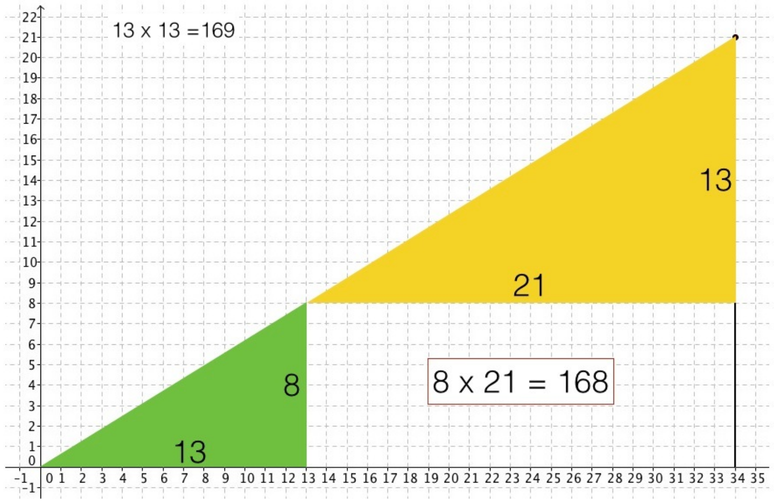
„An der Mathematik irritiert mich, dass der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen sich zueinander so verhalten, als sei der ganze Kosmos schlampig gearbeitet.“

(JaMiRi, Karikatur-Zeichner der Deutschen Mathematiker Vereinigung)


8
13
13
13 x 13 =169
21


13 x 13 =169
13
21
8
8 x 21 = 168
13

Auflösung



Gelbes Dreieck

$A_e = 0{,}5 \cdot 21 \cdot 13 = 136{,}5$

Grünes Dreieck

$A_r = 0{,}5 \cdot 13 \cdot 8 = 52$

Gesamtes Dreieck

$A_s = 0{,}5 \cdot 34 \cdot 21 = 357$

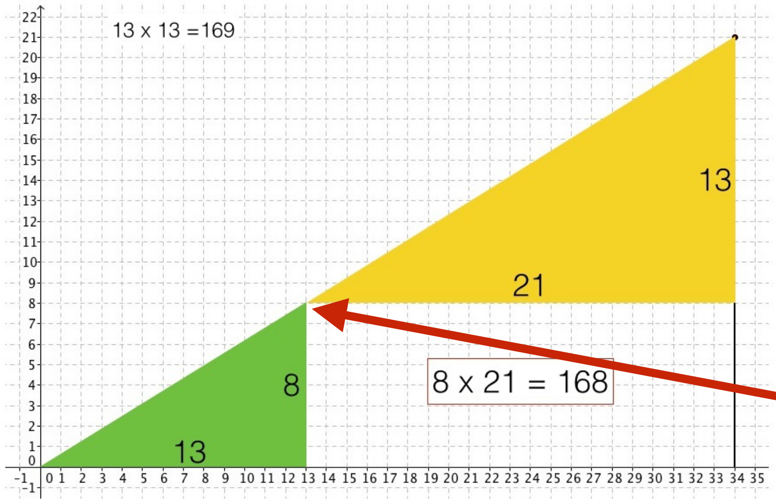
Differenz

$A_R = A_s - (A_e + A_r) = 357 - (136{,}5 + 52) = 168{,}5$

Folgerung

Keiner der beiden Werte, 169 noch 168, ist richtig oder die durchgeführte Rechnung passt nicht zum Problem.

Auflösung



Der wirkliche Grund
Die schrägen Kanten der beiden Teildreiecke bilden keine gerade Linie.

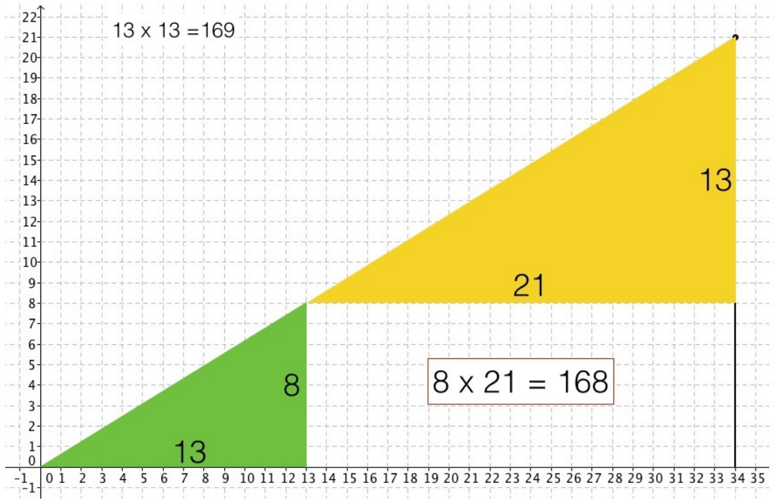
Hier ist ein Knick!

Steigung beim grünen Dreieck: $\dfrac{8}{13} \approx 0,6154$

Steigung beim gelben Dreieck: $\dfrac{13}{21} \approx 0,6190$ steiler als im grünen Dreieck

In der dargestellten Anordnung ist der Knick nach innen (unten flacher als oben). Vertauscht man die Dreiecke ist die Steigung unten steiler als oben, der Knick also nach außen.

Auflösung



Dieser Trick funktioniert auch mit anderen, geschickt gewählten Zahlen.

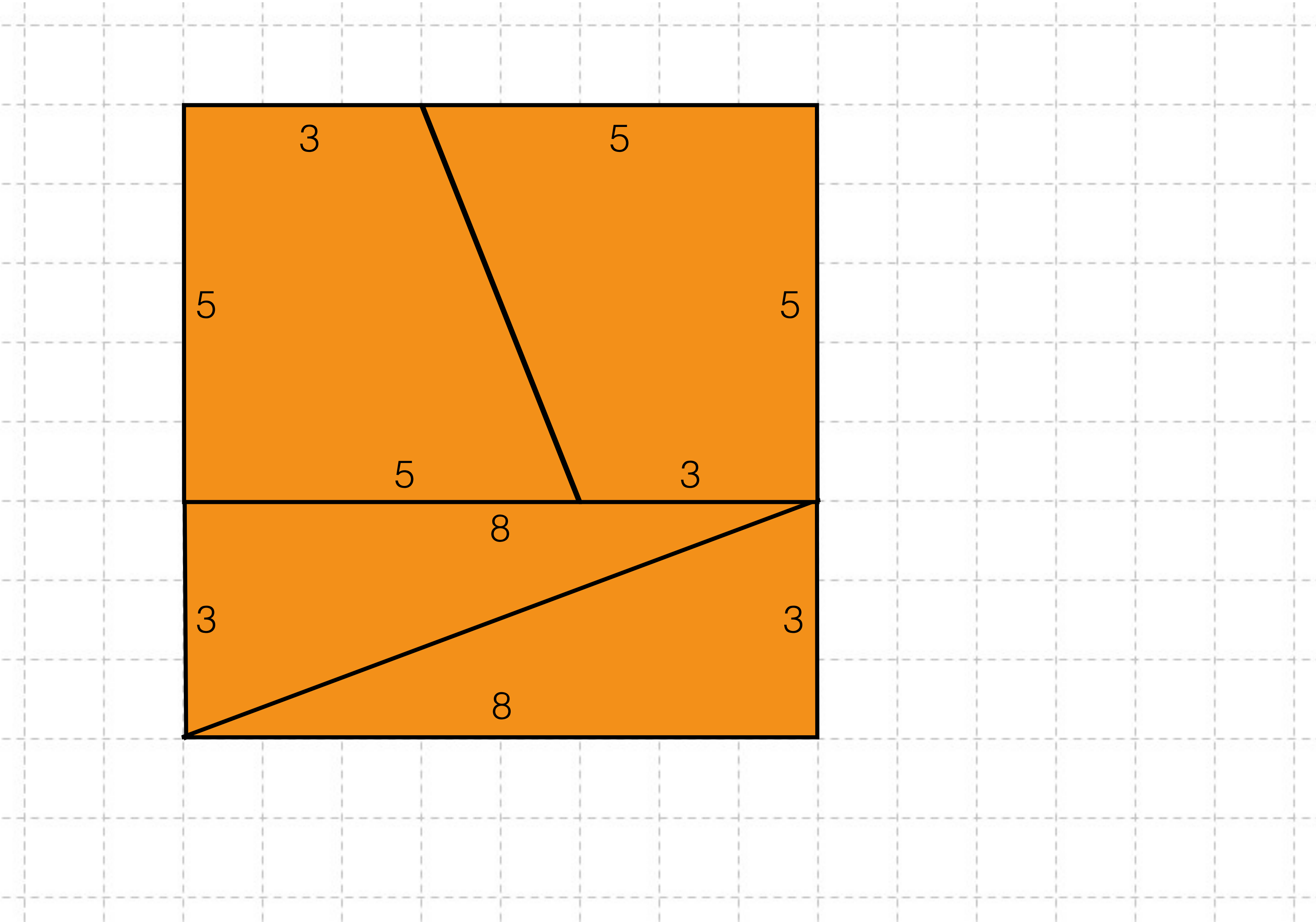
Mit den Fibonacci-Zahlen (hier 8, 13, 21) funktioniert das immer, da

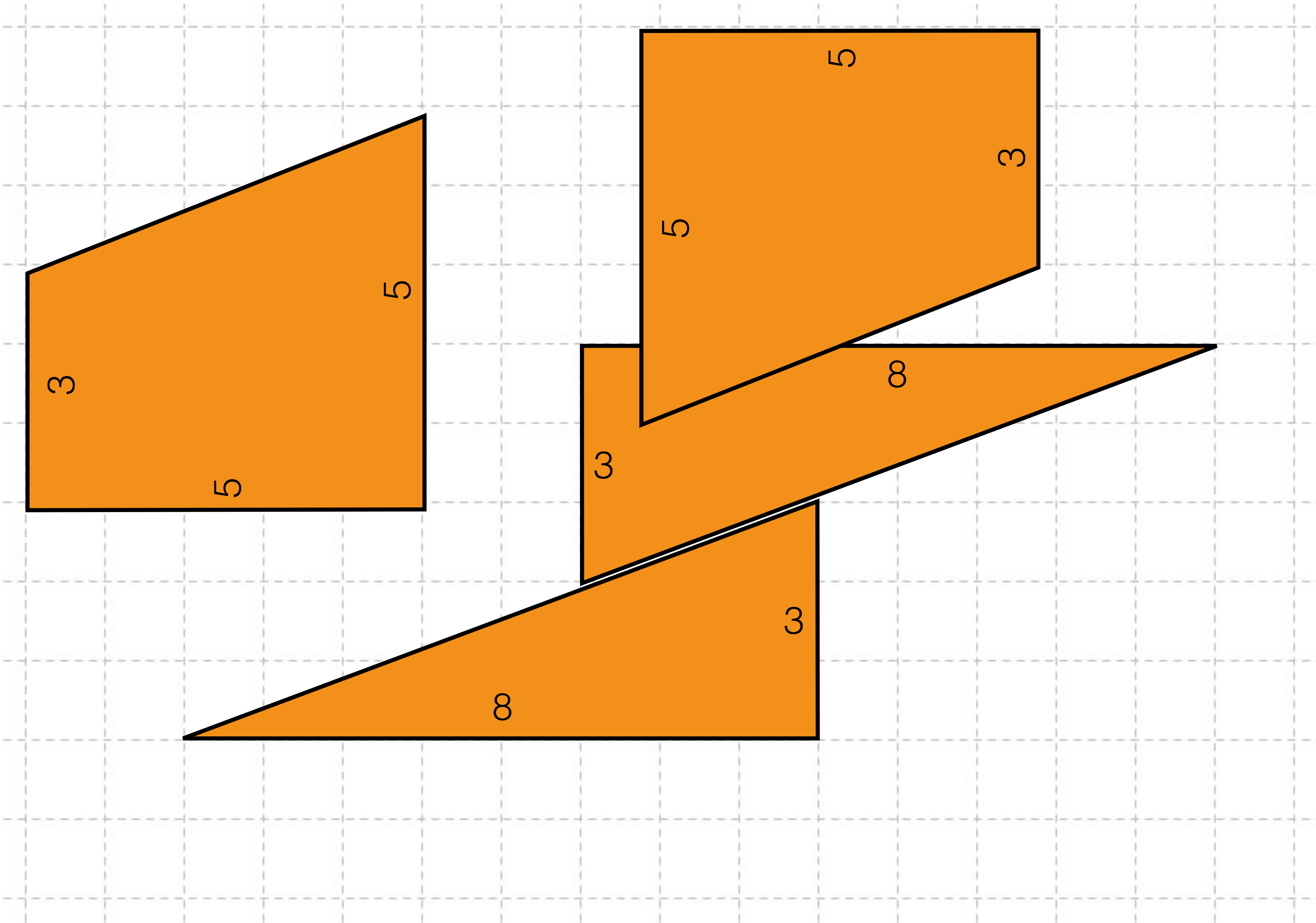
- der Quotient aufeinander folgender Zahlen ungefähr gleich ist.
- das Produkt von einer Zahl und der übernächsten sich vom Quadrat der mittleren immer um 1 unterscheidet.

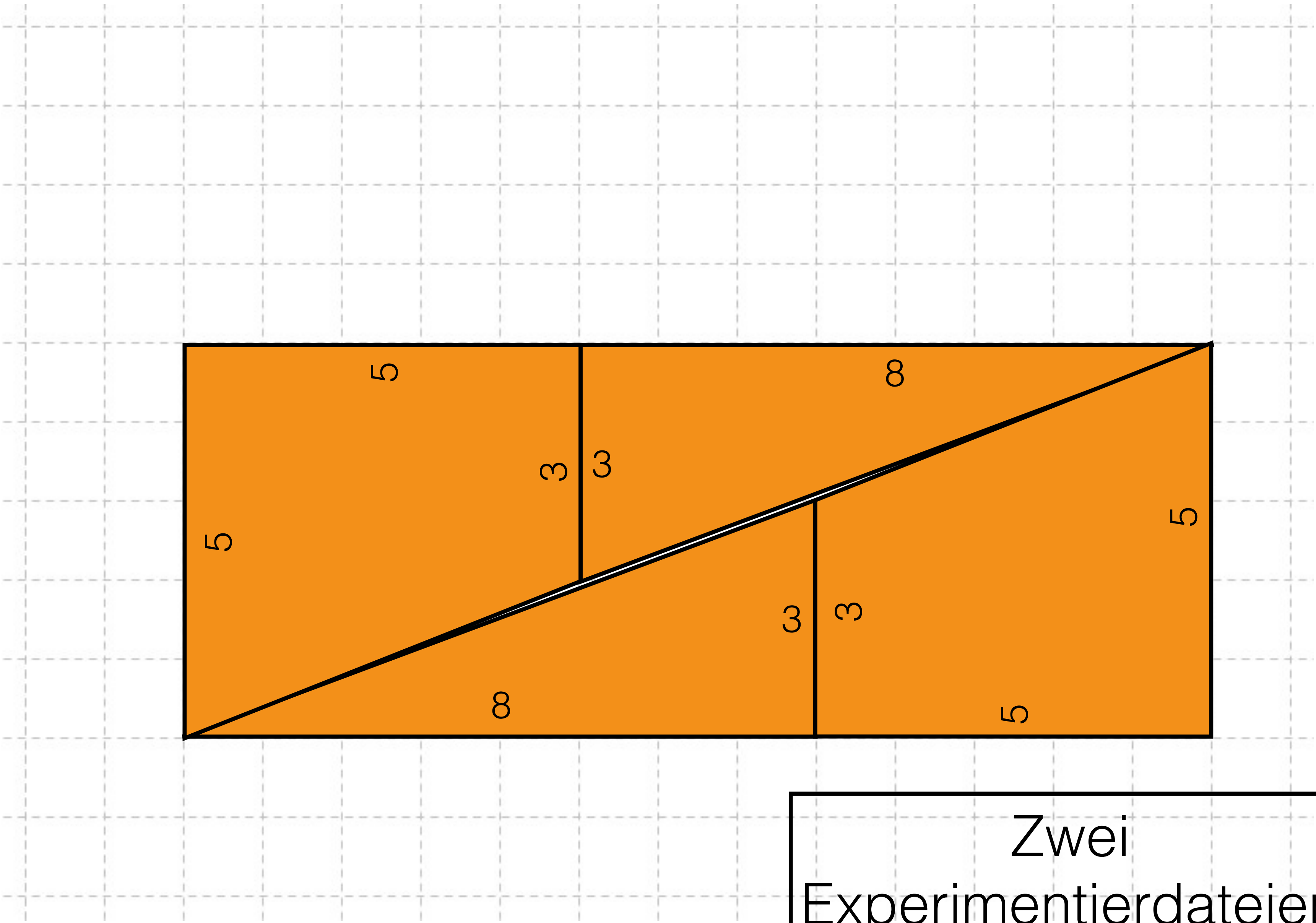
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Produkt

Quadrat


3
5
5
5
5
3
8
3
3
8


5
3
5
5
3
5
8
3
3
8



Zwei
Experimentierdateien

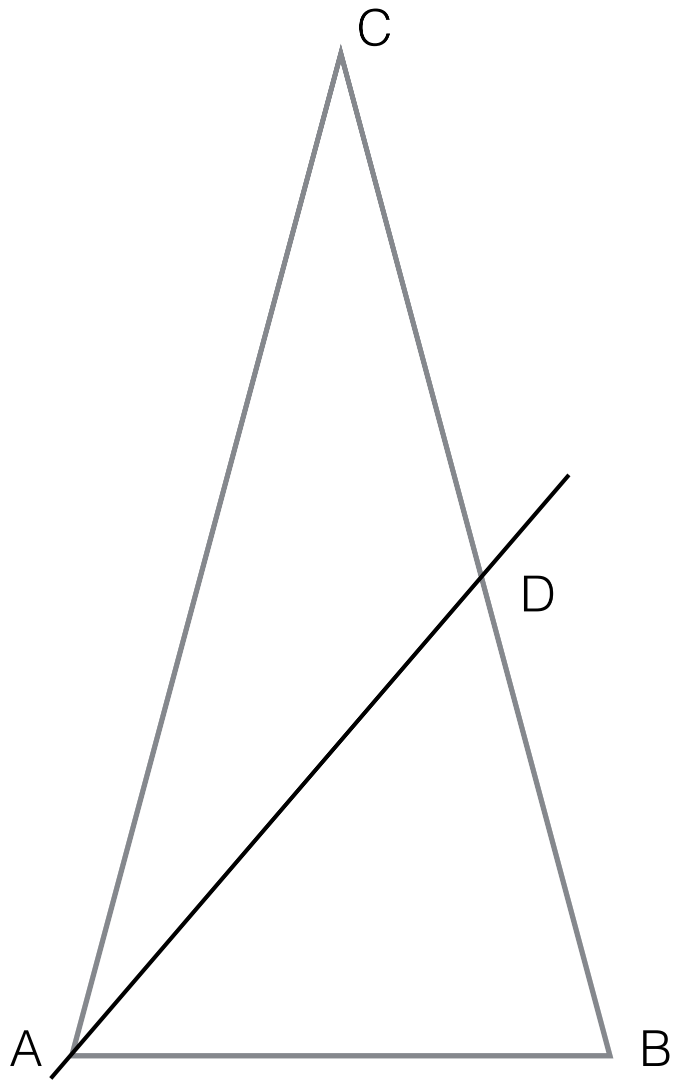
Das Goldene Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch eine Gerade durch einen Eckpunkt in zwei gleichschenklige Dreiecke zu zerteilen.

Das Dreieck ADC ist gleichschenklig mit |AD| = |DC|

Das Dreieck ABD ist gleichschenklig mit

a) |AB| = |AD| oder
b) |AB| = |BD|



2 Experimentier-dateien

Das Goldene Dreieck

Fall a)
Das Dreieck ABD ist
gleichschenklig mit |AB| = |AD|

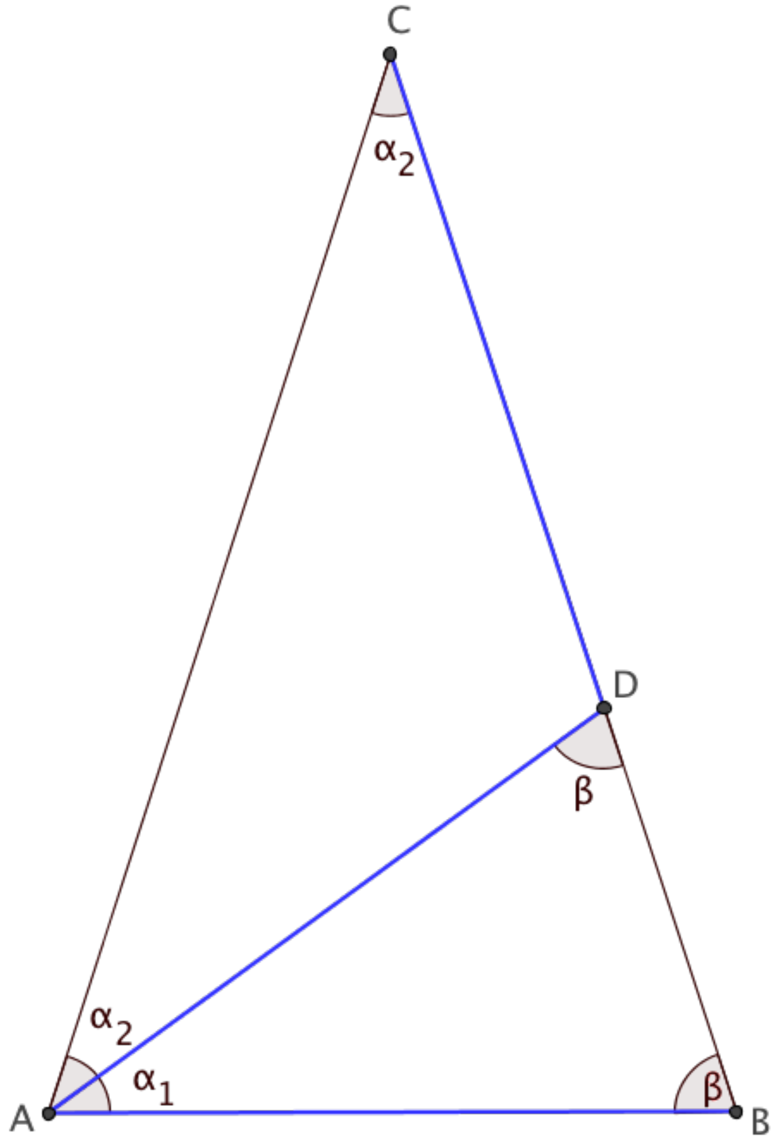
$$2\alpha_2 + 180° - \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_2 = \beta$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha_1 + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad 2\frac{1}{2}\beta = 180°$$

$$\beta = 72° \ , \ \alpha_1 = \alpha_2 = 36°$$



Das Goldene Dreieck

Der Punkt D teilt die Kante BC im Goldenen Schnitt mit dem Major CD.

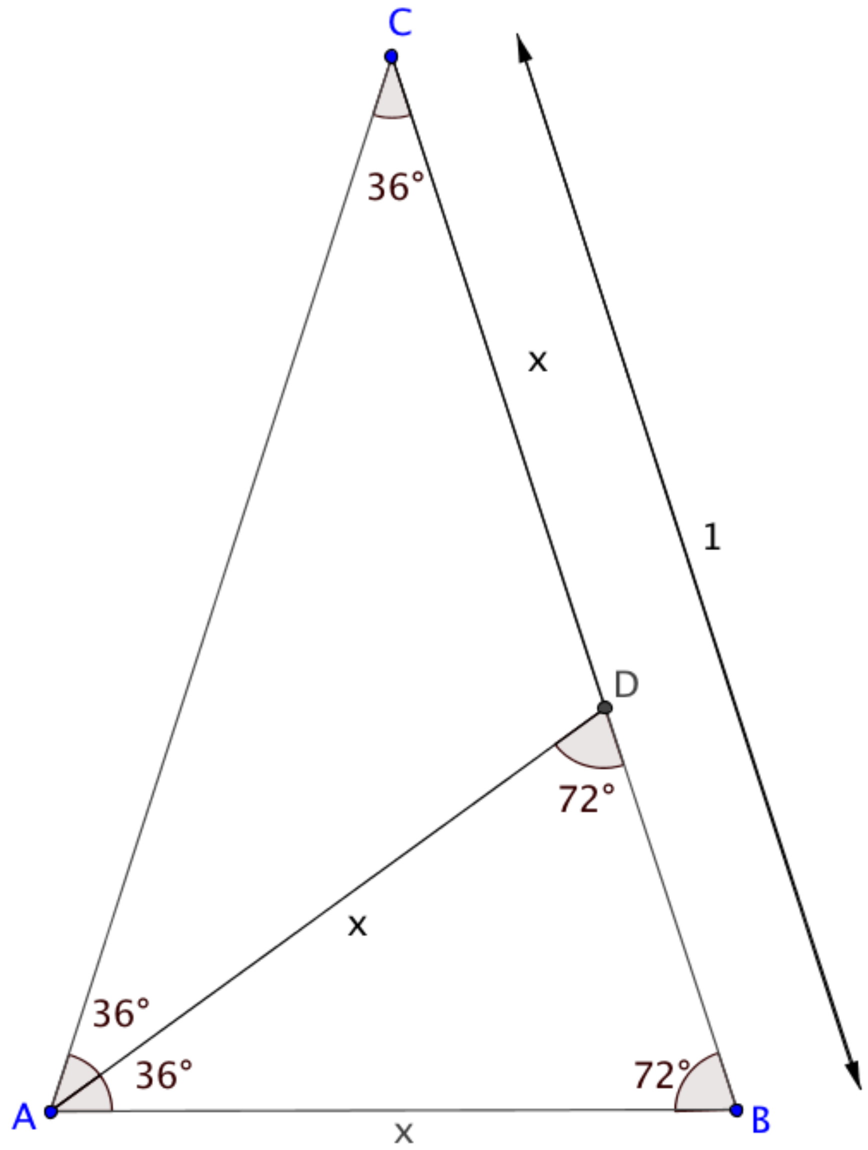
Die Dreiecke ABC und ABD sind ähnlich.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1-x = x^2$$

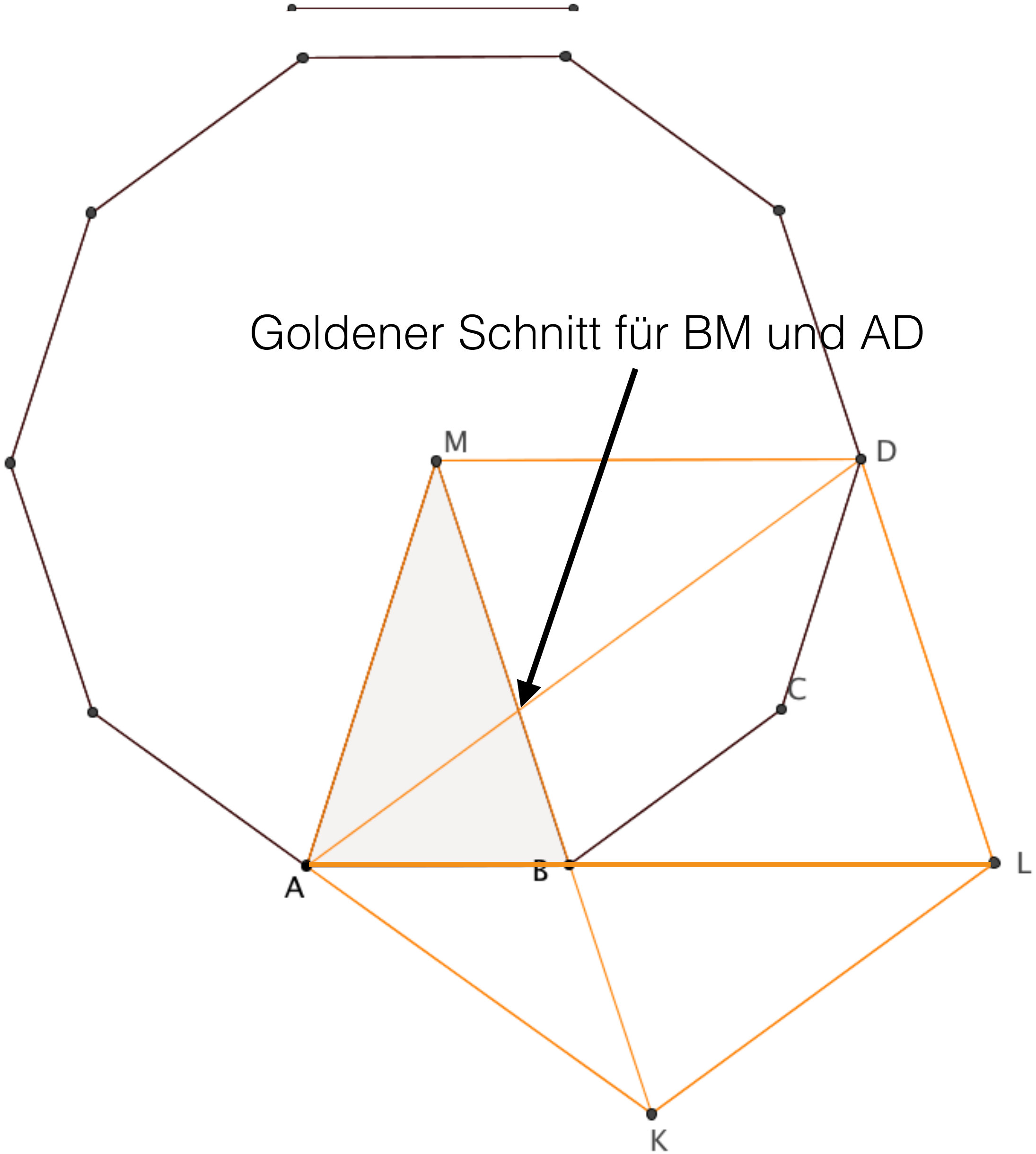
Das ist die Euklid-Bedingung für den Goldenen Schnitt.

$$x = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$



Das Goldene Dreieck

… als Teildreieck im
regelmäßigen Zehneck



Die zweite Lösung

Fall b)
Das Dreieck ABD ist
gleichschenklig mit |AB| = |BD|

Nebenwinkel zu α_1 bei D

$$180° - 2\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_2 = \alpha_1$$

Winkelsumme im Dreieck ABC

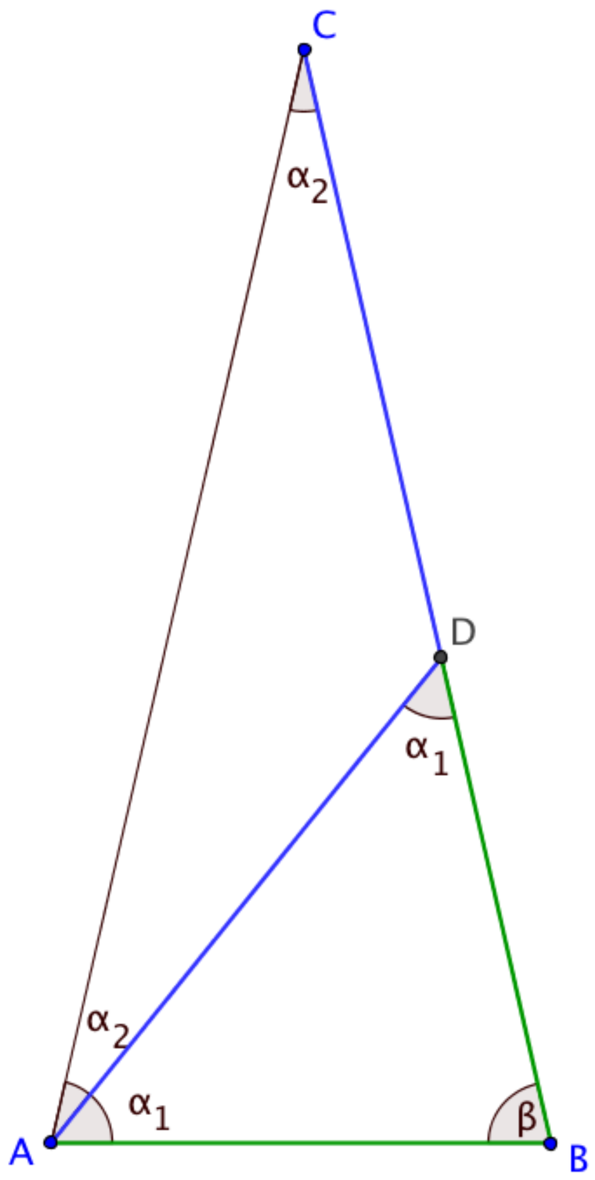
$$\alpha_2 + 2(\alpha_2 + \alpha_1) = 180°$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 180°$$

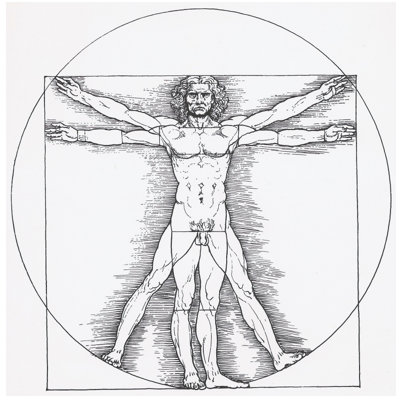
$$7\alpha_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{180°}{7} \approx 25,7°$$

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 = \frac{360°}{7} \approx 51,4°$$

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 77,1°$$



Der Vitruvianische Mann



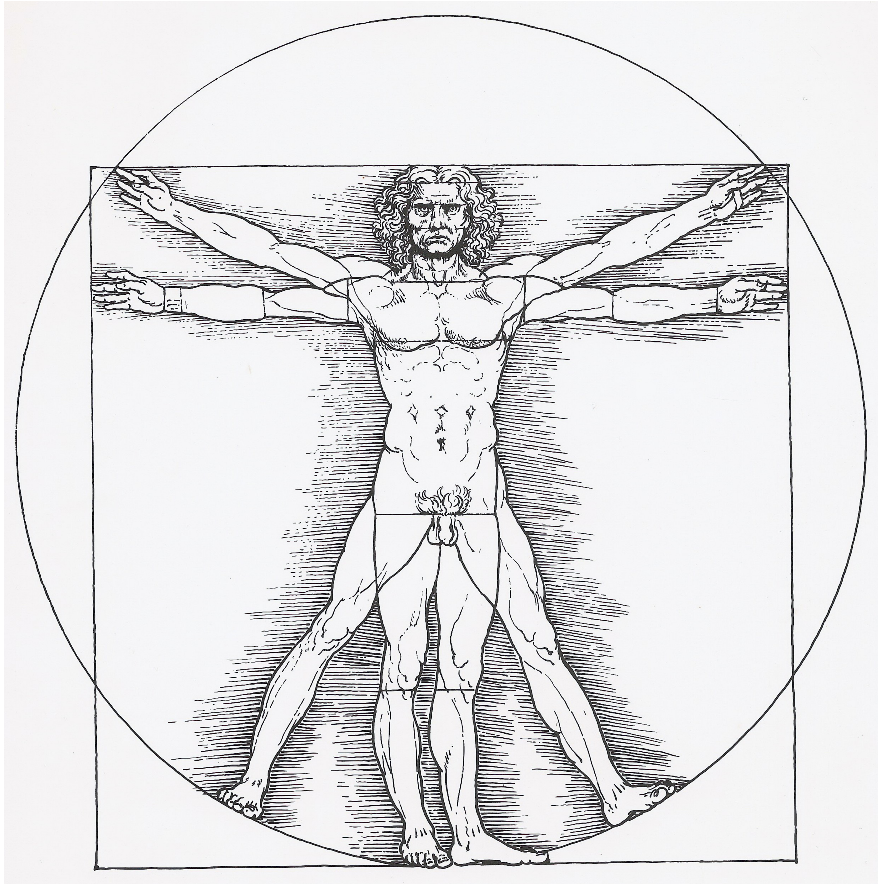
Vitruv
Marcus(?) Vitruvius Pollio(?)
Architekt und Bauingenieur
80-70 v.Chr. bis ca. 15 v.Chr.

Hat ein zehnbändiges Werk zur Baukunst heraus-gegeben. Das Werk ist im Mittelalter überraschend oft kopiert worden, obwohl es auf die romanischen und gotischen Bauten keinen Einfluss hatte. Es wurde zur Renaissance wiederentdeckt und beachtet.

Er behandelt sowohl die Technik als auch die Ästhetik von Bauten.

Der Vitruvianische Mann

Am Anfang des Bands 3 beschreibt er die Proportionen eines Menschen als Vorbild dafür, dass auch bei Gebäuden gewisse Proportionen eingehalten werden müssen.



ſuos habent commenſus proportionis, quibus etiam antiqui pictores & ſtatuarii nobiles uſi magnas & infinitas laudes ſunt aſſecuti. Similiter vero ſacrarum aedium membra ad univerſam totius magnitudinis ſummam ex partibus ſingulis convenientiſſimum debent habere commenſuum reſponſum. Item corporis centrum medium naturaliter eſt umbilicus. Namque ſi homo collocatus fuerit ſupinus, manibus & pedibus panſis, circinique collocatum centrum in umbilico eius, circumagendo rotundationem utrarumque manuum & pedum digiti linea tangentur. Non minus, quemadmodum ſchema rotundationis in corpore efficitur, item quadrata deſignatio in eo invenitur. Nam ſi a pedibus imis ad ſummum caput menſum erit, eaque menſura relata fuerit ad manus panſas, invenietur eadem latitudo, uti altitudo, quemadmodum areae, quae ad normam ſunt quadratae. Ergo ſi ita natura compoſuit corpus hominis, uti proportionibus membra ad ſummam figurationem eius reſpondeant; cum cauſa conſtituiſſe videntur antiqui, ut etiam in operum perfectionibus ſingulorum membrorum ad univerſam figurae ſpeciem habeant commenſus exactionem. Igitur cum in omnibus operibus ordines traderent, id maxime in aedibus Deorum, in quibus operum laudes & culpae aeternae ſolent permanere. Nec minus menſurarum rationes, quae in omnibus operibus videntur neceſſariae eſſe, ex corporis membris collegerunt, tion in seiner Anlage gerechtfertigt werden, wenn er nicht, einem wohlgebildeten Menschen ähnlich, ein genau durchgeführtes Gliederungsgesetz in sich trägt.

2. Denn die Natur hat den Körper des Menschen so gebildet, daß das Angesicht von dem Kinn bis zu dem oberen Ende der Stirn und den untersten Haarwurzeln den zehnten Theil (der ganzen Körperlänge) ausmacht; das gleiche ebensoviel die Fläche der Hand vom Handgelenk bis zum Ende des Mittelfingers, der Kopf vom Kinn bis zum höchsten Punkte des Scheitels den achten Theil, ebensoviel vom unteren Ende des Nackens aus, vom oberen Ende der Brust bis zu den untersten Haarwurzeln den sechsten, bis zum höchsten Scheitelpunkte um den vierten Theil der Gesichtslänge mehr [1]). Von der Höhe des Gesichtes selbst aber ist vom Kinnende bis zum unteren Ende der Nase ein Dritttheil, ebensoviel beträgt die Nase von ihrem unteren Ende bis zu dem in der Mitte der Augenbrauen; von diesem Endpunkte bis zu den untersten Haarwurzeln, wo die Stirne gebildet wird, ist gleichfalls ein Dritttheil. Der Fuß aber mißt den sechsten Theil der Körperhöhe, der Vorderarm den vierten, die Brust gleichfalls den vierten Theil [2]). Auch die übrigen Glieder haben ihre Maßverhältnisse, deren sich auch die alten angesehensten Maler und Bildhauer bedient und dadurch großen und endlosen Ruhm erlangt haben.

3. In ähnlicher Weise aber müssen die Glieder der Tempel in Hinsicht auf die Gesammtmasse der ganzen Größe in den einzelnen Theilen Maßverhältnisse haben, die sich einander in vollkommenster Uebereinstimmung entsprechen. Der Mittelpunkt des Körpers ferner ist von Natur der Nabel. Denn wenn ein Mensch mit ausgespannten

[1]) Die Handschriften und meisten Ausgaben geben quartae (den vierten Theil). Da dieß unmöglich ist, indem nach Vitruv selbst die Höhe von den Haarwurzeln an der Stirne bis zum Scheitel ein Vierzigstel und nicht ein Zwanzigstel der Körperlänge beträgt, so ist eine Aenderung unerläßlich. Macht man aus dem Viertheil ein Fünftheil, so wird auch hier die Differenz zu groß und beträgt ein Dreißigstel. Marini nimmt daher an, es seien einige Worte ausgefallen und gibt statt ad summum verticem quartae — ad summum verticem tantumdem et oris quartae.

[2]) Von einer Achsel zur andern.

Händen und Füßen auf den Rücken gelegt wird und man den Zirkelmittelpunkt in seinen Nabel einsetzt, so werden, wenn man die Kreislinie beschreibt, von den beiden Händen und Füßen Finger und Zehen von der Linie berührt. Eben so, wie die Figur eines Kreises an dem Körper dargestellt wird, so wird auch die eines Quadrates an ihm gefunden. Denn wenn man vom unteren Ende der Füße bis zur Scheitelhöhe mißt und dieses Maß auf die ausgespannten Hände überträgt, so wird man dieselbe Breite wie Höhe finden, wie dieß bei Flächen ist, die nach dem Winkelmaß quadratisch gemacht sind.

4. Wenn daher die Natur den Körper des Menschen so gebildet hat, daß die Glieder seiner ganzen Gestalt in bestimmten Verhältnissen entsprechen, so scheinen die Alten mit Grund es so festgesetzt zu haben, daß sie auch bei der Ausführung von Bauwerken ein genaues Maßverhältniß der einzelnen Glieder zu der ganzen äußeren Gestalt beobachten. Wie sie daher bei allen Bauwerken Ordnungsvorschriften überlieferten, so thaten sie es besonders bei den Tempeln der Götter, bei welchen Werken Vorzüge und Mängel ewig zu sein pflegen.

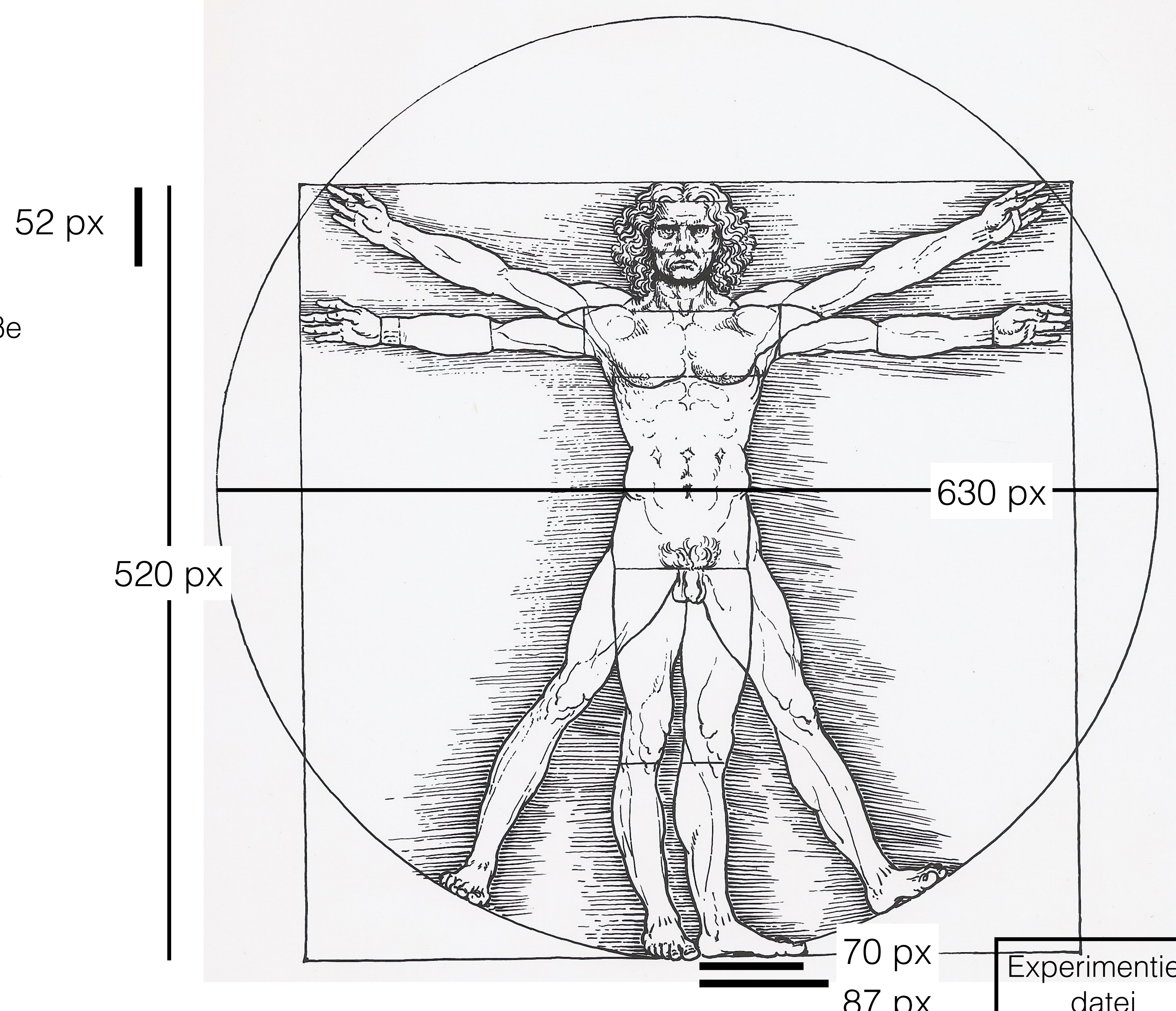
5. Ebenso haben sie die Grundmaße, welche bei allen Bauwerken nothwendig zu sein scheinen, von den Gliedern des Körpers hergenommen, wie den Zoll (Finger), Palm (Handfläche), Fuß, die Elle (Ellenbogen, Vorderarm), und haben sie, eine vollkommene Zahl, welche die Griechen Teleion nennen, zu Grunde legend, eingetheilt. Als vollkommene Zahl aber haben die Griechen festgesetzt, was man zehn nennt, denn von den Händen ist die Zehn-Zahl der Zolle (Finger) und von den Zollen der Palm und von dem Palm der Fuß erfunden. Wie aber nach den Gliedern der beiden Handflächen zehn die vollendete Zahl ist, so billigt auch Plato diese Zahl als die vollendete, deshalb, weil die Zehnheit aus den einzelnen Fingern, welche bei den Griechen Monades heißen, entsteht. Sobald ihrer aber elf oder zwölf geworden sind, so können sie, weil sie dieselben überschreiten, keine vollkommene Zahl mehr sein, bis sie zu einem anderen Zehner gelangen, denn die einzelnen Dinge sind Theile jener Zahl.

6. Die Mathematiker aber, damit nicht einverstanden, haben gesagt, daß die Zahl, welche sechs genannt wird, die vollkommene sei, deshalb, weil diese Zahl eine Gliederung hat, die ihrem auf der

Übersetzung Dr. Franz Reber, 1865

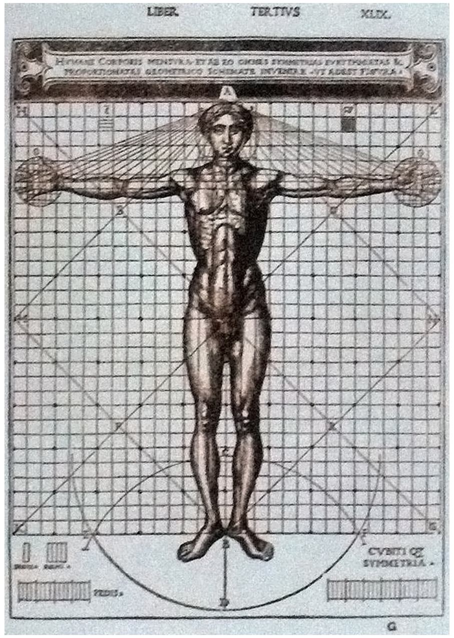
Bauchnabel - Füße
315 px

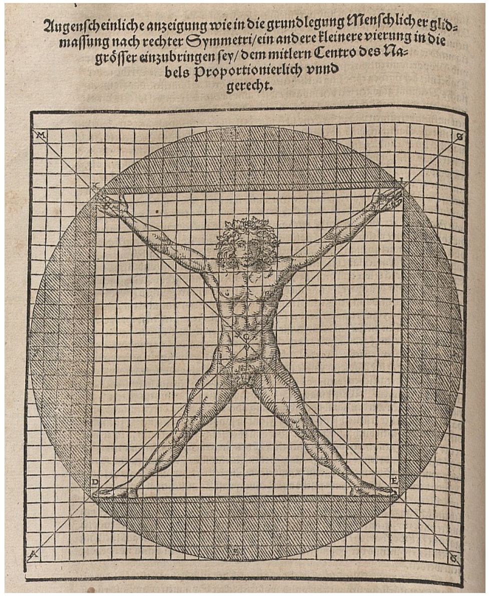
$$\frac{315}{520} \approx 0{,}60577$$



Experimentier-
datei

Vitruv hat seine Bücher nicht illustriert.
Verschiedene Maler haben die Beschreibung in ein Bild umgesetzt.





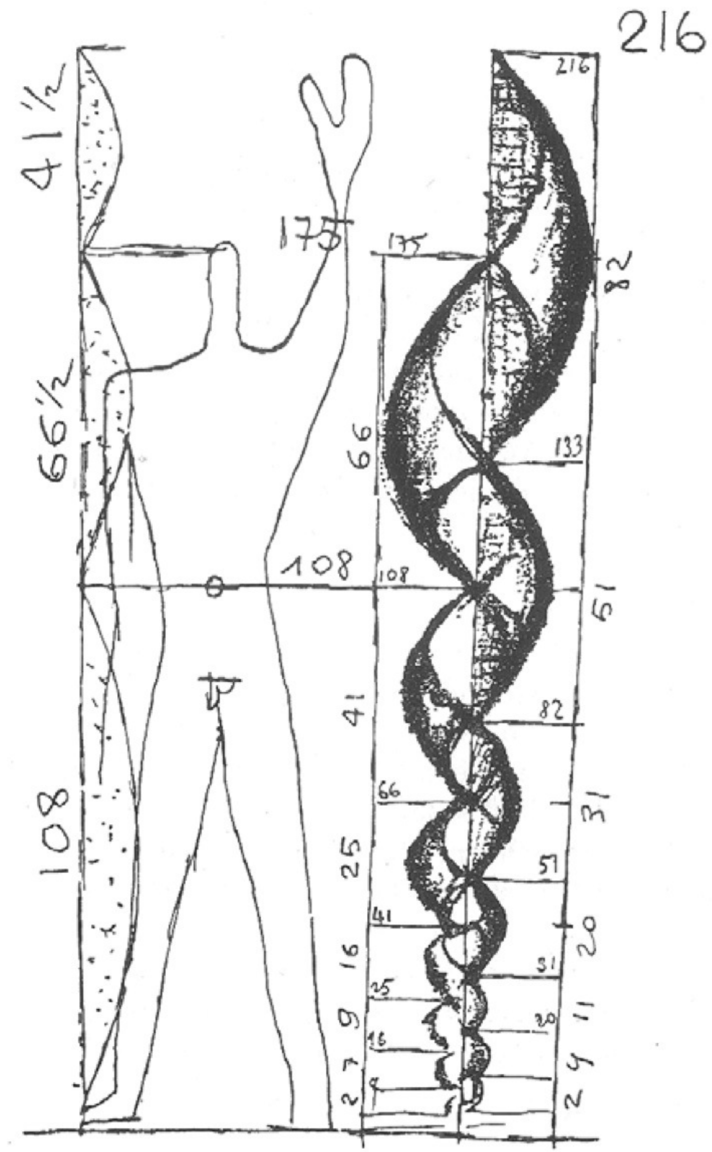
Kritik: (Auch Leonardo) Menschen haben nicht die gleichen Proportionen, lassen sich nicht in den gleichen Maßstab pressen. (eigene Erfahrung beim Kleiderkauf)

Der Modulor (Le Corbusier)

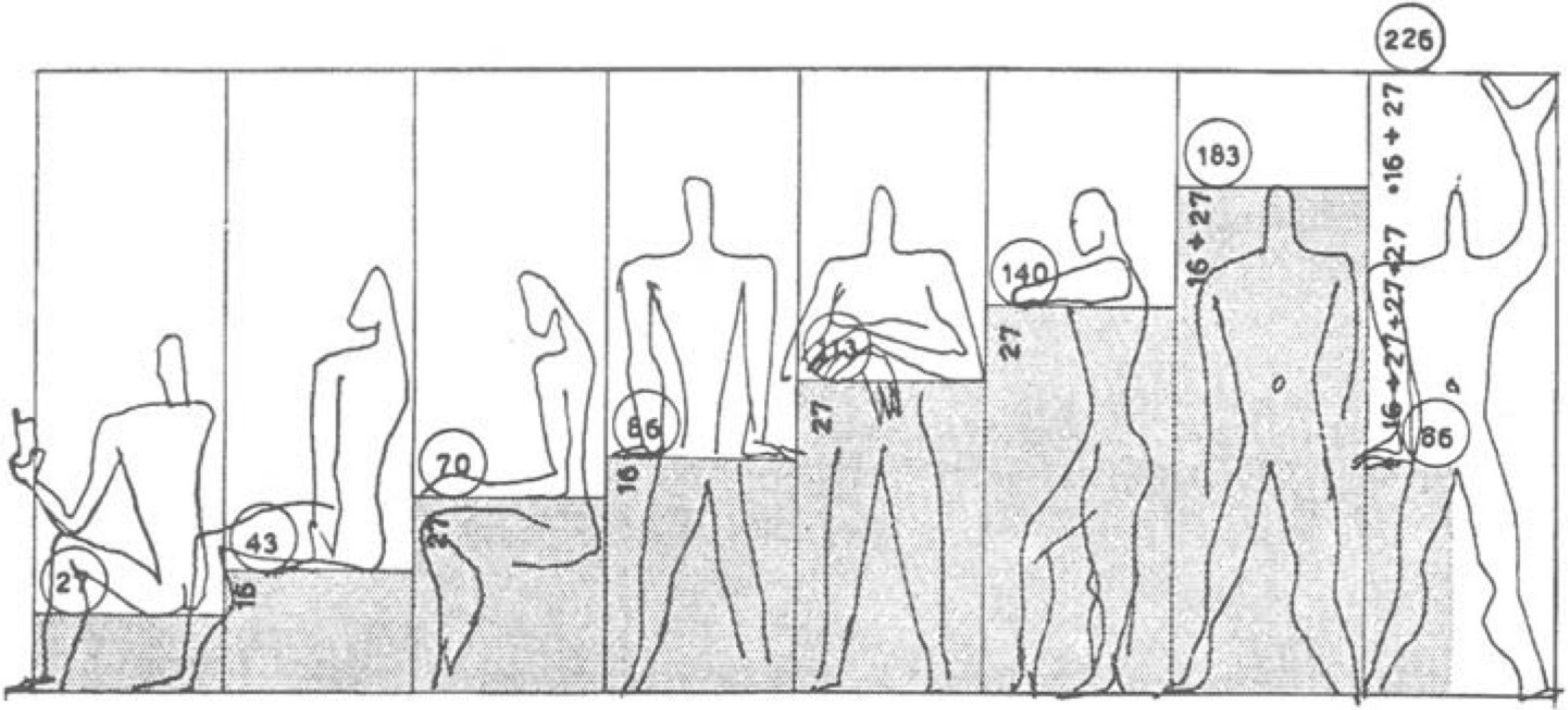
Seit 1940 arbeitete Corbusier an einem Maßsystem für Gebäude und Möbel, das sich am menschlichen Körper orientierte. Dieses System wurde im Buch „Le Modulor“ 1948 veröffentlicht, 1955 erschien „Le Modulor 2“ mit einem leicht veränderten System.

175		216	
108	0,6171	133	0,6157
66	0,6111	82	0,6165
41	0,6212	51	0,6220
25	0,6098	31	0,6078
16	0,6400	20	0,6452
9	0,5625	16	0,8000
7	0,7778	14	0,8750

Bei beiden Größenfolgen erkennt man das Fibonacci-System $m_{n+1} = m_n + m_{n-1}$.



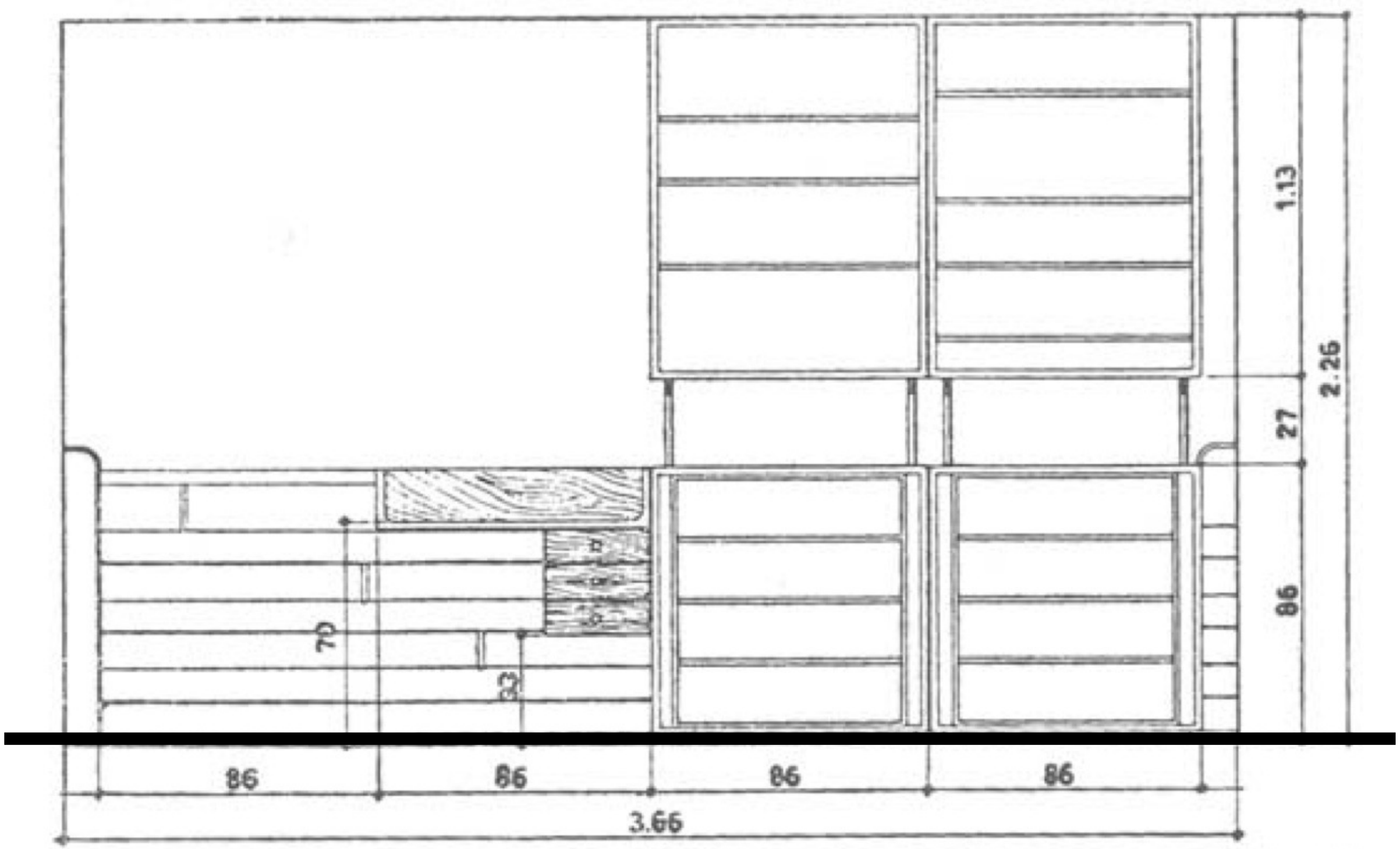
Der Modulor (Le Corbusier)



27	43	70		113		183	
			86		140		226
0.628	0.614	0.6195		0.6175			
			0.6143		0.6195		

Das Maßsystem aus Modulor 2

Ein Möbelstück nach den Maßen des Modulors 2



heutige Küchenplanung

Die ideale Arbeitshöhe

Bei der Küchenplanung in Zusammenarbeit mit einem Küchenplaner ist die richtig bestimmte Arbeitshöhe (Korpushöhe) das Wesentliche bei der Küchenplanung. Die Arbeitshöhe wird meist auf die „Hauptarbeitsperson“ abgestimmt. Mit Hilfe folgender Tabelle können Sie Sich schon im Vorfeld einen eigenen Überblick verschaffen über die empfohlenen und rückenschonenden Arbeitshöhen. Die Empfehlungen:

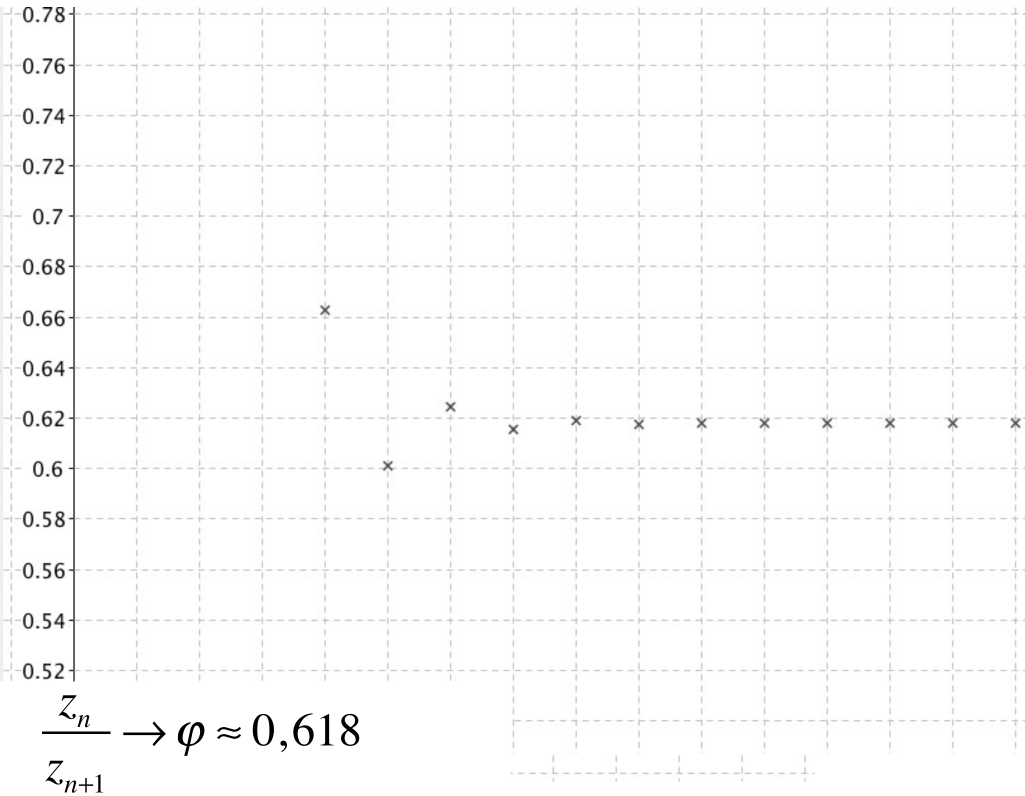
Körpergröße in cm	Arbeitshöhe in cm
155	85
160	90
165	93
170	95
175	97
180	100
185	103
190	106
195	108
200	110

„form follows function“

Rückblick Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen (Corbusier)

1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181

1	1
2	30
3	31
4	61
5	92
6	153
7	245
8	398
9	643
10	1041
11	1684
12	2725
13	4409
14	7134
15	11543
16	18677
17	30220
18	48897
19	79117



Der Grenzwert $\frac{z_n}{z_{n+1}} \to \varphi \approx 0{,}618$

hängt nur vom Bildungsgesetz ab $z_{n+1} = z_n + z_{n-1}$

nicht von den Startwerten.

Experimentier-
datei

Fibonacci-Wörter

n	
1	b
2	A
3	Ab
4	AbA
5	AbAAb
6	AbAAbAbA
7	AbAAbAbAAbAAb
8	AbAAbAbAAbAAbAbAAbAbA

1. Bildungsgesetz A ⟶ A b

b ⟶ A

2. Bildungsgesetz $w_1 = b \qquad w_2 = A$

$$w_{n+1} = w_n \,\&\, w_{n-1}$$

Die Länge des *n*-ten Wortes ist gerade die *n*-te Fibonacci-Zahl

Fibonacci-Wörter

n	f_n	w_n
1	1	b
2	1	A
3	2	Ab
4	3	AbA
5	5	AbAAb
6	8	AbAAbAbA
7	13	AbAAbAbAAbAAb
8	21	AbAAbAbAAbAAbAbAAbAbA

Beobachtung:
Am Ende steht immer abwechselnd A und b.
Das ist immer so wegen

1\. Bildungsgesetz $A \longrightarrow Ab$
$b \longrightarrow A$

Folgerung:
Ist die Platznummer für ein Symbol eine Fibonacci-Zahl, so finde heraus, die wievielte (Index n).
Ist n gerade, so ist das Symbol A
ist n ungerade, ist es ein b.

Beispiel Position 144:
144 ist f_{12}. Da $n = 12$ gerade ist, steht an Position 144 ein A.

Fibonacci-Wörter

n	f_n	w_n
1	1	b
2	1	A
3	2	Ab
4	3	AbA
5	5	AbA$\boxed{\text{Ab}}$
6	8	AbAAbAbA
7	13	AbAAbAbAAbAAb
8	21	AbAAbAbAAbAAb$\boxed{\text{AbAAbAbA}}$

↑ 1 ↑ 4 ↑ 17

Problem: Die Platznummer ist keine Fibonacci-Zahl
Beispiel: Platz 17

Der Übergang von 17 auf 4 geschieht aber gerade durch
17 - 13 = 4,
wobei 13 die größte Fibonacci-Zahl ist, die man von 17 abziehen kann.

Weiter mit 4 - 3 = 1, wobei wiederum 3 die größte Fibonacci-Zahl ist, die man von 4 abziehen kann.

Fibonacci-Wörter

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Allgemeines Vorgehen bei nicht-Fibonacci-Zahlen
(✻) Ziehe von der Platznummer die größtmögliche Fibonacci-Zahl ab.
Ist das Ergebnis
- keine Fibonacci-Zahl, so wiederhole (✻)
- eine Fibonacci-Zahl, so höre auf.

Die letzte Fibonacci-Zahl entscheidet über ihren Index n das Symbol.
Ist der Index n
- ungerade, so ist das Zeichen ein b.
- gerade, so ist das Symbol ein A.

Beispiel: Platz 100
100 - 89 = 11 keine F-Zahl → 11 - 8 = 3 F-Zahl, Index ist 4, 4 ist gerade.
Also steht an Platz 100 ein A.

Platz 191
191 - 144 = 47 keine F-Zahl → 47 - 34 = 13 F-Zahl, Index ist 7, 7 ist ungerade.
Also steht an Platz 191 ein b.

Fibonacci-Wörter

A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	b	A	A	b	A	A	b	A	b	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		42		44		46		48		50		52		54		56		58		60		62	
			1		1	2		1	2	3	4		1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		1	2	3	4	5	6	7	8
											1					1		1	2					1		1	2		1	2	3	4					1		1	2		1	2	3	4		1	2	3	4	5	6	7					1		1	2	
																																1													1					1		1	2									