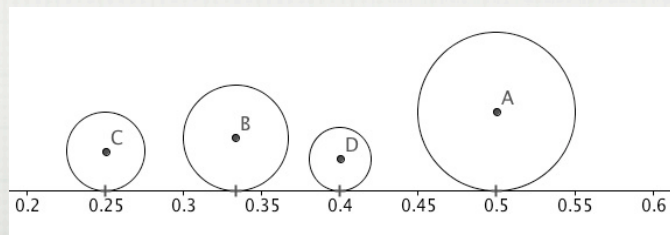


VON BRÜCHEN UND KREISEN

FORD-KREISE, FAREY-REIHEN, MEDIANTEN
UND NACHBARBRÜCHE

FORDKREISE

EIN BRUCH $\frac{z}{n}$ SOLL DURCH EINEN KREIS
AUF DER ZAHLENGERADE MARKIERT
WERDEN.



Fordkreis_exper.ggb

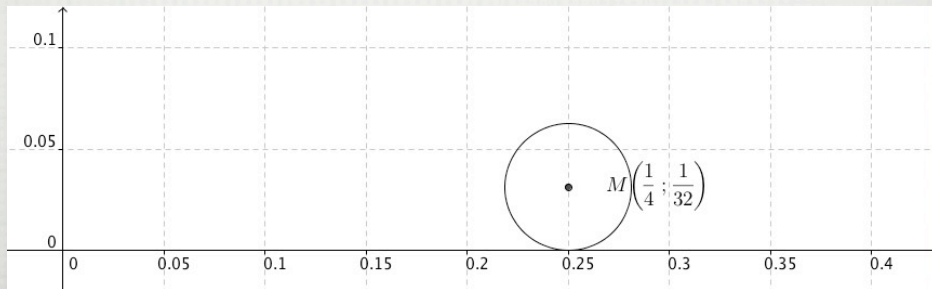
FORDKREISE

DEFINITION: GEGEBEN IST EIN BRUCH $\frac{z}{n}$.

DER KREIS MIT DEM RADIUS $r = \frac{1}{2n^2}$ UND DEM

MITTELPUNKT $M\left(\frac{z}{n}; \frac{1}{2n^2}\right)$ HEIßT

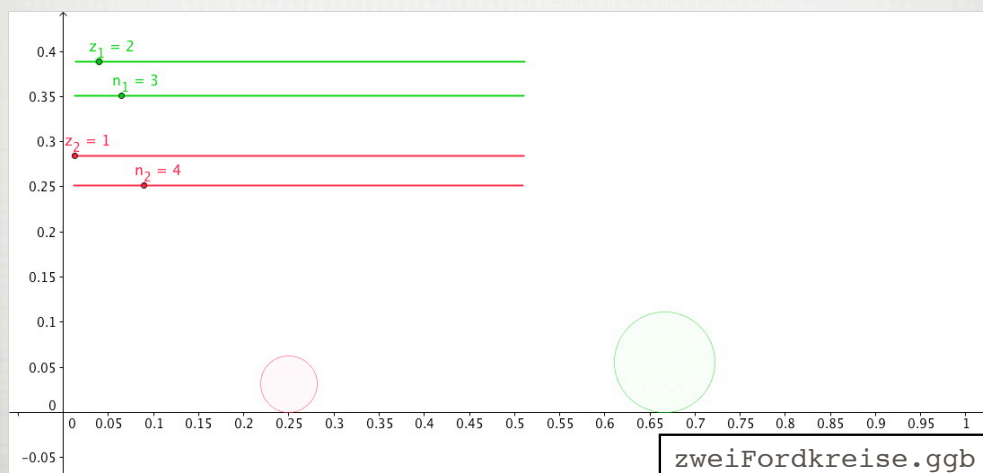
FORDKREIS ZU $\frac{z}{n}$.



FORDKREISE

SPIEL MIT ZWEI FORDKREISEN

WIE NAHE KOMMEN SICH ZWEI FORDKREISE?



FORDKREISE

SATZ:

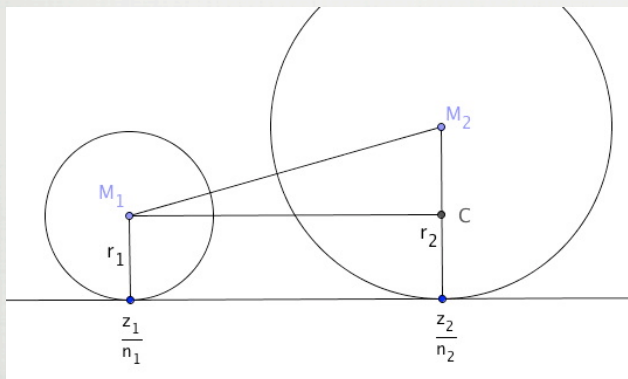
GEGEBEN SIND ZWEI BRÜCHE $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$. BEIDE BRÜCHE SEIN GEKÜRZT UND $\frac{z_1}{n_1} < \frac{z_2}{n_2}$.

A) ZWEI FORDKREISE HABEN NIE ZWEI SCHNITTPUNKTE.

B) DIE FORDKREISE ZU $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$ BERÜHREN SICH $\Leftrightarrow z_2 n_1 - z_1 n_2 = 1$

DAS HEIßT ABER, DASS $\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 n_2}$

FORDKREISE

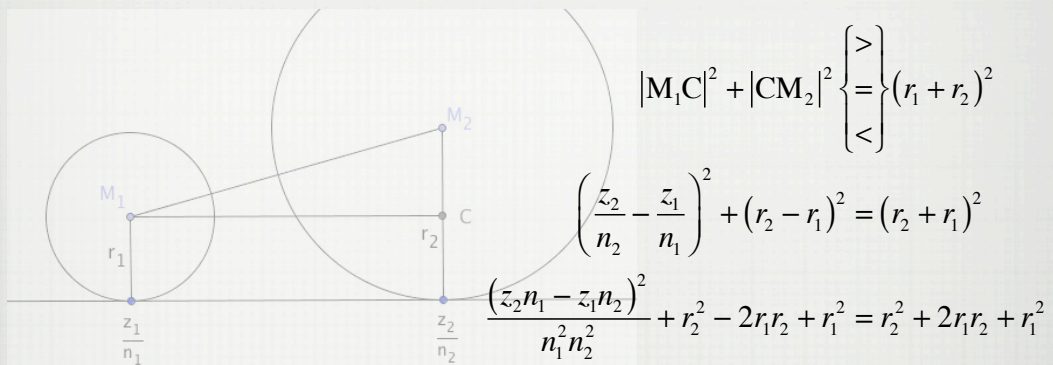


BEWEISSKIZZE

ANSATZ: $|M_1 M_2| \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} r_1 + r_2$ bedeutet $\begin{cases} \text{keine gemeinsamen Punkte} \\ \text{ein Berührungspunkt} \\ \text{zwei Schnittpunkte} \end{cases}$

$$|M_1 M_2|^2 = |M_1 C|^2 + |C M_2|^2$$

FORDKREISE



$$|M_1 C|^2 + |C M_2|^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} (r_1 + r_2)^2$$

$$\left(\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} \right)^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$$

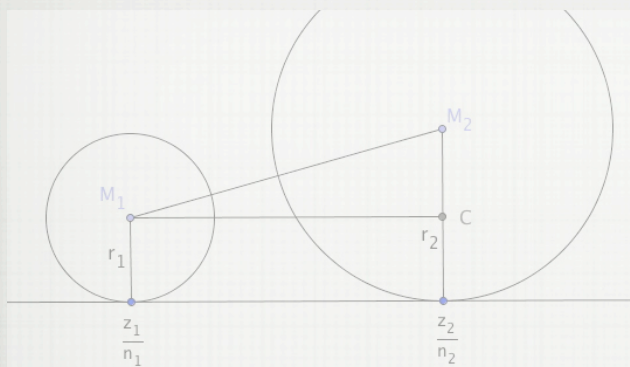
$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2}{n_1^2 n_2^2} + r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 = r_2^2 + 2r_1 r_2 + r_1^2$$

$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2}{n_1^2 n_2^2} - 4r_1 r_2 = 0$$

$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2}{n_1^2 n_2^2} - 4 \frac{1}{2n_1^2} \frac{1}{2n_2^2} = 0$$

$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2 - 1}{n_1^2 n_2^2} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

FORDKREISE

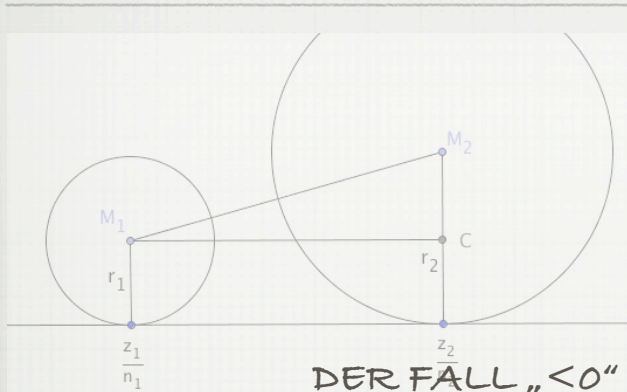


$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2 - 1}{n_1^2 n_2^2} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

DER FALL „=0“ TRITT EIN, WENN

$$z_2 n_1 - z_1 n_2 = 1$$

FORDKREISE



$$\frac{(z_2 n_1 - z_1 n_2)^2 - 1}{n_1^2 n_2^2} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

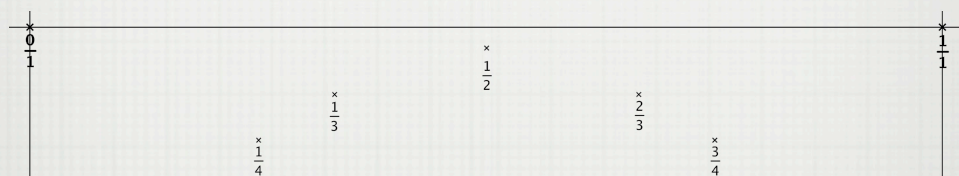
DER FALL „<0“ TRITT EIN, WENN

$$z_2 n_1 - z_1 n_2 = 0$$

DAS HEIßT ABER, DASS $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$
DIE GLEICHE ZAHL DARSTELLEN.

ORDEN VON BRÜCHEN

WIR ORDNET DIE „KLEINEN“ BRÜCHE DER GRÖßE NACH.
DAS SOLLEN ALLE BRÜCHE MIT HALBEN, DRITTELN, U.S.W.
BIS ACHTELN SEIN, DIE ZWISCHEN 0 UND 1 LIEGEN.



AUFGABEN:

1. NUN DIE FÜNFTEL UND SECHSTEL EINZEICHNEN.
2. ANSCHLIEßEND DIE SIEBTTEL UND ACHTEL.

FareyReihen.ggb

ORDEN VON BRÜCHEN

DIE GEORDNETE MENGE DER BRÜCHE MIT DEM HÖCHSTEN NENNER n HEIßT FAREY-REIHE UND WIRD MIT F_n BEZEICHNET.

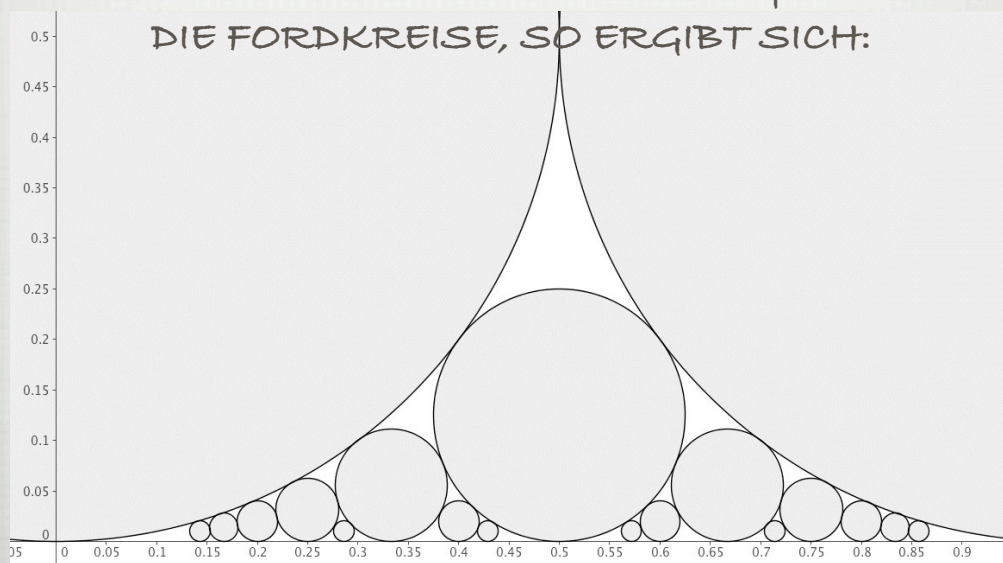
ALSO:

$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right)$$

BENANNT NACH DEM ENGLISCHEN GEOLOGEN JOHN FAREY (1766 - 1826). ER WOLLTE FÜR PRAKTISCHE BERECHNUNGEN BRÜCHE MIT GROßEM NENNER DURCH NÄHERUNGSBRÜCHE MIT KLEINEREM NENNER ERSETZEN.

DIE FORDKREISE ZU EINER FAREYREIHE

ZEICHNET MAN ZU EINER FAREY-REIHE DIE FORDKREISE, SO ERGIBT SICH:



ORDEN VON BRÜCHEN

$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right)$$

IHM FIEL AUF, DASS EIN BRUCH, DER ZWEI NACHBARBRÜCHE HAT, AUS DIESEN ERMITTELT WERDEN KANN DURCH DIE RECHNUNG

$$\frac{a}{b} \quad \swarrow \quad \frac{a+c}{b+d} \quad \nwarrow \quad \frac{c}{d}$$

DIE FALSCHER ADDITION

- NACH DER MULTIPLIKATION MIT DER REGEL $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ RECHNEN SCHÜLER SCHON MAL

FÜR $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ DAS ERGEBNIS $\frac{a+c}{b+d}$.

- GANZ ANALOG ZUR RECHNUNG DES MATHEMATIK-LEHRERS IN DER ARBEIT: 8 VON 12 PUNKTEN IN AUFGABE 1 UND 5 VON 9 PUNKTEN IN AUFGABE 2 ERGIBT INSGESAMT 13 VON 21 PUNKTEN FÜR DIE ARBEIT.

DIE FALSCHER ADDITION

WIR TUN DIESE RECHNUNG NICHT ALS AUSZUMERZENDEN FEHLER AB, SONDERN UNTERSUCHEN DIESE RECHNUNG, GANZ IM SINN VON JOHN FAREY.

ALLGEMEIN: GEGEBEN SIND $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

DEFINITION: DANN HEIßT DER BRUCH $\frac{a+c}{b+d}$

DIE MEDIANTE VON $\frac{a}{b}$ UND $\frac{c}{d}$.

WIR SCHREIBEN DAFÜR $M\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$

DIE FALSCHER ADDITION

BEISPIEL: $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$ DANN IST $M\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$

DER VERGLEICH LIEFERT: $\frac{2}{3} = \frac{14}{21} < \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{28} < \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

DIE „FALSCHER SUMME“ LIEFERT ALSO EINEN BRUCH, DER ZWISCHEN DEN BEIDEN AUSGANGSBRÜCHEN LIEGT.

DIE FALSCH E ADDITION

GEGEBEN SIND $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

BEHAUPTUNG: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

BEWEIS:

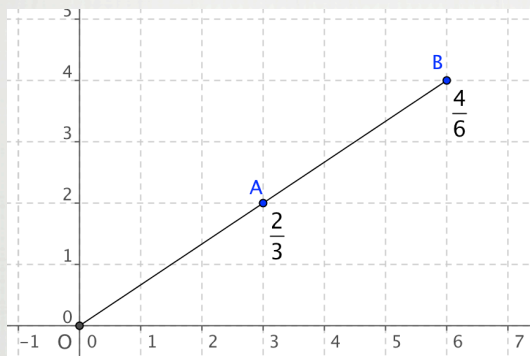
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$
$$\Leftrightarrow ab + ad < ab + bc$$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$
$$\Leftrightarrow ad + cd < bc + cd$$

$$\Leftrightarrow ad < bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

VERANSCHAULICHUNG

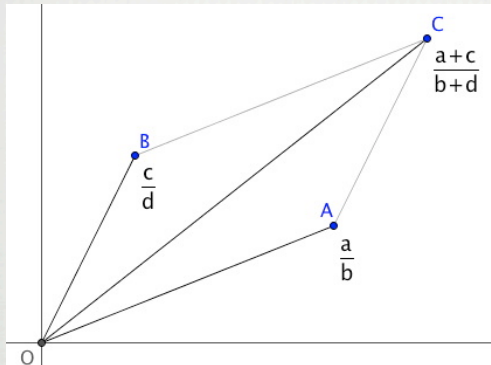


EIN BRUCH WIRD
DURCH EIN PUNKT IM
KOORDINATENSYSTEM
DARGESTELLT

DIE STEIGUNG DER VERBINDUNG ZUM URSPRUNG
REPRÄSENTIERT DEN WERT.

ERWEITERTE/GEKÜRZTE BRÜCHE LIEGEN AUF EINER
LINIE.

VERANSCHAULICHUNG



DIE MEDIANTE ERGIBT SICH DURCH DIE BEKANNTE PARALLELOGRAMM-KONSTRUKTION.

MEDIANTE . GGB

DIE STEIGUNG DER DIAGONALEN REPRÄSENTIERT DEN WERT DER MEDIANTE. DIESE STEIGUNG IST IMMER ZWISCHEN DEN WERTEN FÜR DIE BEIDEN PARALLELOGRAMMSEITEN, DIE AM URSPRUNG BEGINNEN.

PROBLEM

DIE MEDIANTE IST NICHT WOHLDEFINIERT

BEISPIEL: $M\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{7}$

$$\updownarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

ABER: $M\left(\frac{2}{6}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

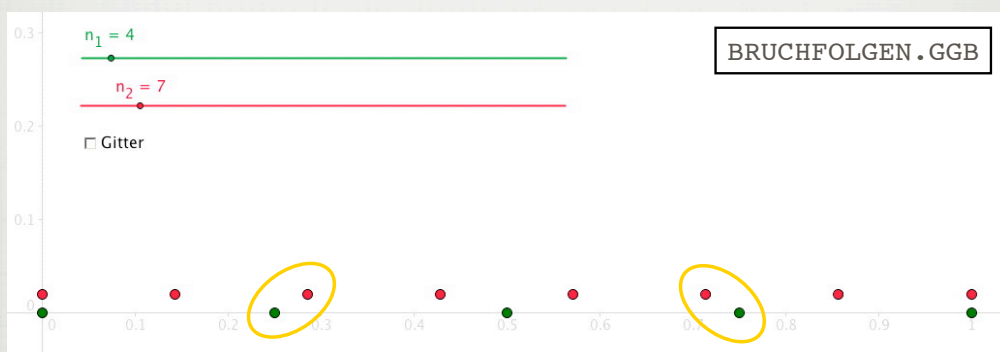
ES BLEIBT DAS PROBLEM, WANN MAN KÜRZEN DARF UND WANN NICHT, DA IN MANCHEN BETRACHTUNGEN DIE MEDIANTE NICHT GEKÜRZT WERDEN DARF.

NACHBARBRÜCHE

DER BEGRIFF „NACHBARBRÜCHE“ IST ZUNÄCHST UNSINN. INNERHALB DER RATIONALEN ZAHLEN GIBT ES KEINEN NACHFOLGER ODER VORGÄNGER.

GIBT MAN EINE GEWISSE „KÖRNICKEIT“ VOR, INDEM MAN SICH AUF BESTIMMTE NENNER BESCHRÄNKT, WIRD DER BEGRIFF „NACHBARBRÜCHE“ SINNVOLL.

NACHBARBRÜCHE



VORGEGEBEN WERDEN VIERTEL UND SIEBTTEL
WO LIEGEN BRÜCHE MIT DIESEN NENNERN
BESONDERS DICHT BEIEINANDER IM
INTERVALL (0,1) (OHNE DIE RÄNDER)?

NACHBARBRÜCHE

DEFINITION: ZWEI BRÜCHE $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$ HEIßEN NACHBARBRÜCHE, WENN GILT:

$$\left| \frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} \right| = \frac{|z_1 n_2 - z_2 n_1|}{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1 n_2}$$

ALSO GILT INSBESONDERE: $|z_1 n_2 - z_2 n_1| = 1$

BEISPIEL $\frac{2}{5}$ UND $\frac{5}{13}$ SIND NACHBARBRÜCHE.

NACHBARBRÜCHE

SATZ: DAMIT ZWEI BRÜCHE $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$ NACHBARBRÜCHE SEIN KÖNNEN, GILT ALS NOTWENDIGE VORAUSSETZUNG:

$\text{ggT}(z_1, n_1) = 1$ D.H. DER BRUCH MUSS GEKÜRZT SEIN
und
 $\text{ggT}(z_2, n_2) = 1$ D.H. DER BRUCH MUSS GEKÜRZT SEIN
und
 $\text{ggT}(n_1, n_2) = 1$ D.H. DIE NENNER MÜSSEN TEILERFREMDE SEIN

NACHBARBRÜCHE

BEWEIS: ANGENOMMEN

$$ggT(z_1, n_1) = g > 1 \quad \text{ODER} \quad ggT(z_2, n_2) = g > 1 \quad \text{ODER} \quad ggT(n_1, n_2) = g > 1$$

$$\left| \frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} \right| = \frac{|z_1 n_2 - z_2 n_1|}{n_1 n_2}$$

DANN ENTHÄLT SOWOHL $z_1 n_2$ ALS AUCH $z_2 n_1$
DEN FAKTOR g . ALSO:

$$\frac{|z_1 n_2 - z_2 n_1|}{n_1 n_2} = \frac{|g k_1 - g k_2|}{n_1 n_2} = \frac{g |k_1 - k_2|}{n_1 n_2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$$

DA $g > 1$, KANN DER ZÄHLER NICHT 1 WERDEN.

NACHBARBRÜCHE

SATZ: GEGEBEN SIND ZWEI NACHBAR-

BRÜCHE $\frac{z_1}{n_1} < \frac{z_2}{n_2}$. DANN GILT:

$\frac{a}{b}$ IST NACHBARBRUCH ZU $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}$ IST MEDIANTE ZU $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$

BEISPIEL: $\frac{1}{3}$ UND $\frac{2}{5}$ SIND NACHBARBRÜCHE

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\text{MEDIANTE: } \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{9-8}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{16-15}{40} = \frac{1}{40}$$

NACHBARBRÜCHE

BEWEIS: „ \Rightarrow “

VORAUSSETZUNG: $\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 n_2}$ UND

$\frac{a}{b}$ IST NACHBARBRUCH ZU $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$

SEI $\frac{z_1}{n_1} < \frac{a}{b} < \frac{z_2}{n_2}$

DANN IST $\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2 n_1 - z_1 n_2}{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1 n_2} \Rightarrow z_2 n_1 - z_1 n_2 = 1$

$$\frac{a}{b} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{a n_1 - z_1 b}{n_1 b} = \frac{1}{n_1 b} \Rightarrow a n_1 - z_1 b = 1$$

$$\frac{z_2}{n_2} - \frac{a}{b} = \frac{z_2 b - a n_2}{b n_2} = \frac{1}{b n_2} \Rightarrow z_2 b - a n_2 = 1$$

GLEICHUNGSSYSTEM
FÜR a UND b

NACHBARBRÜCHE

DAS GLEICHUNGSSYSTEM

$$\begin{cases} a n_1 - z_1 b = 1 \\ z_2 b - a n_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 a - z_1 b = 1 \\ -n_2 a + z_2 b = 1 \end{cases} \quad \text{HAT DIE LÖSUNG}$$

$$a = \frac{z_1 + z_2}{z_2 n_1 - z_1 n_2} \quad b = \frac{n_1 + n_2}{z_2 n_1 - z_1 n_2}$$

WEGEN $z_2 n_1 - z_1 n_2 = 1$

GILT: $a = z_1 + z_2 \quad b = n_1 + n_2$

ALSO IST DER BRUCH $\frac{a}{b}$ MEDIANTE ZU $\frac{z_1}{n_1}$ UND $\frac{z_2}{n_2}$

NACHBARBRÜCHE

BEWEIS: „ \Leftarrow “

VORAUSSETZUNG:

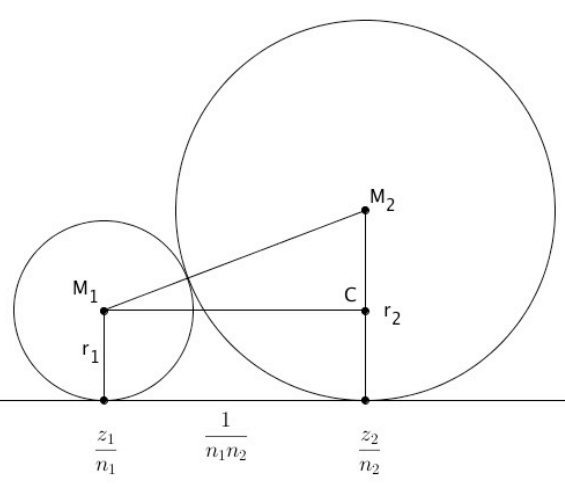
$$\frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 n_2} \quad \text{ALSO} \quad z_2 n_1 - z_1 n_2 = 1 \quad \text{UND}$$

$$\frac{a}{b} \text{ IST MEDIANTE ZU } \frac{z_1}{n_1} \text{ UND } \frac{z_2}{n_2} \quad \text{ALSO} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1 + z_2}{n_1 + n_2}$$

DANN IST

$$\frac{a}{b} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{an_1 - z_1 b}{bn_1} = \frac{(z_1 + z_2)n_1 - z_1(n_1 + n_2)}{bn_1} = \frac{z_2 n_1 - z_1 n_2}{bn_1} = \frac{1}{bn_1}$$

$$\frac{z_2}{n_2} - \frac{a}{b} = \frac{z_2 b - an_2}{bn_2} = \frac{z_2(n_1 + n_2) - (z_1 + z_2)n_2}{bn_2} = \frac{z_2 n_1 - z_1 n_2}{bn_2} = \frac{1}{bn_2}$$



DIE BEIDEN
FORDKREISE ZU
ZWEI NACHBAR-
BRÜCHEN $\frac{z_1}{n_1} < \frac{z_2}{n_2}$
BERÜHREN
EINANDER.