Iteration an linearen Funktionen

Reimund Albers

Einleitung

Nehmen wir einmal an, Sie haben mit ihren Schülerinnen und Schülern lineare Funktionen und ihre Graphen behandelt, d.h. diese kennen die Begriffe
- Steigung und y-Achsenabschnitt
- parallele Geraden
- Schnittpunkt zweier Geraden
- Bestimmung der fehlenden x- bzw. y-Koordinate eines Punktes auf einer Geraden

Nehmen wir weiter an, daß Sie diese Grundlagen recht knapp und zielgerichtet eingeführt haben und daß Sie nun dieses Thema üben und festigen möchten. Folgende Aufgaben-bereiche sind dazu bisher (bei mir) üblich gewesen:
- Bewegungsaufgaben, graphischer Fahrplan
- Berechnungen zur Dreiecksgeometrie (Seitenhalbierende, Höhen, Mittelsenkrechte)
- lineares Optimieren

Ich möchte hier nun einige Anregungen geben, an dieser Stelle das Thema „Iteration" einzuführen und als umfangreicheres Übungsfeld für die linearen Funktionen zu verwenden. In einer Einführungsphase an der Erwachsenenschule Bremen (zweiter Bildungsweg) erwies sich dieses Übungsthema als ein wunderbarer Ausgangspunkt für sehr unterschiedliche Fragestellungen aus anderen mathematischen Gebieten.
Bei der nachfolgenden Darstellung möchte ich vor allem ein spezielles Beispiel ausführlicher darstellen, während der davorliegende Unterrichtsgang etwas knapper und zusammen-fassender gehalten ist.

1. Einführung der Iteration

Unter einer Iteration versteht man einen (Rechen-)Vorgang, in dem aus Eingabedaten neue Ergebnisdaten ermittelt werden. Diese Ergebnisdaten werden dann für einen weiteren Schritt als Eingabedaten verwendet.

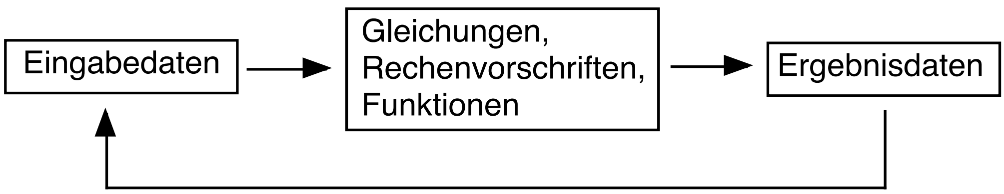


Bild 1: Das allgemeine Schema für eine Iteration

Dieses Vorgehen findet man vor allem dann, wenn es darum geht, zeitliche Abläufe mathematisch zu simulieren. Das Wetter wird so vorherberechnet, physikalische Versuche werden so auf dem Rechner nachgebildet und der Flugsimulator auf dem Computer arbeitet ebenfalls nach diesem Prinzip.
In der Schule kann dieses Prinzip nur stark vereinfacht angewendet werden. Eingabe- und Ergebnisdaten schrumpfen zu je einer Zahl, die Rechenvorschriften sind hier, dem Thema angepaßt, lediglich eine lineare Funktion.

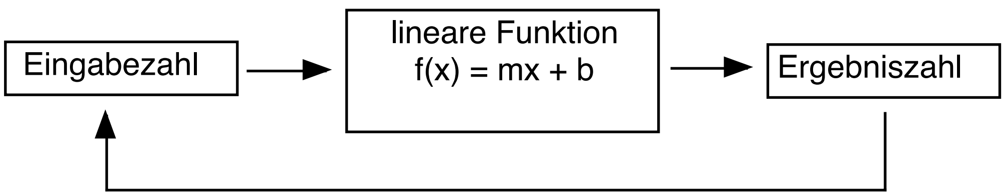


Bild 2: Die Iteration an einer linearen Funktion

2. Graphische Iteration

In der graphischen Darstellung der Funktion entspricht dem Berechnungsvorgang von der Eingabezahl zur Ergebniszahl einem graphischen Aufsuchen des Funktionswertes. Dabei geht man von der x- zur y-Achse.

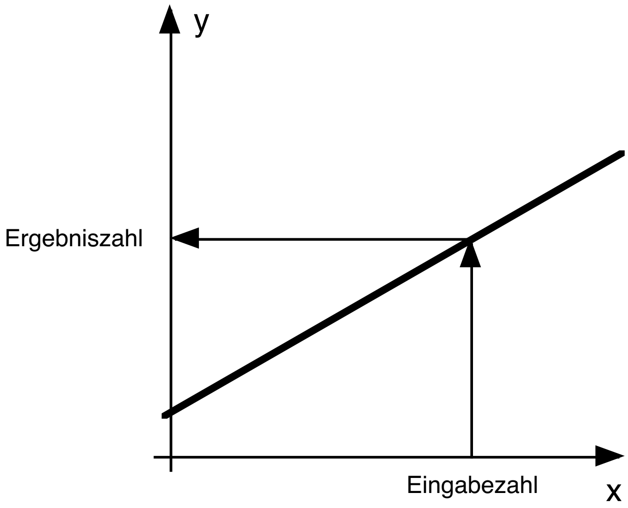


Bild 3:
In einem Iterationsschritt wird der Funktionswert gebildet

Wie kann man nun das Ergebnis von der y-Achse rein zeichnerisch und unverfälscht auf die x-Achse übertragen? Man verwendet die Gerade zu y = x als Hilfslinie, die bei gleichmäßiger Achseneinteilung unter 45° verläuft.

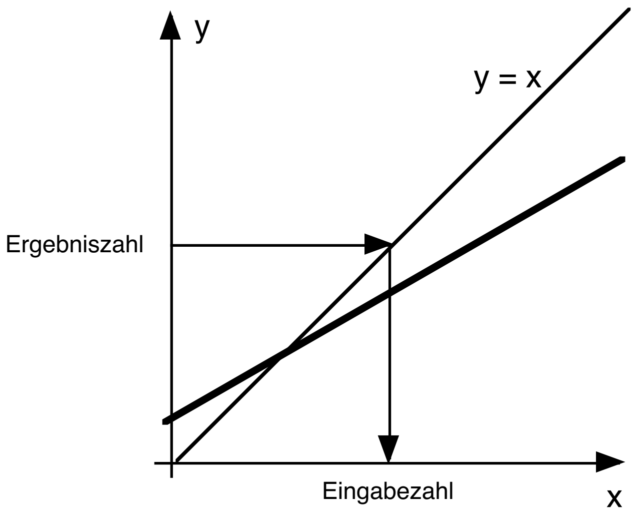


Bild 4:
Das Ergebnis wird von der y-Achse auf die x-Achse übertragen

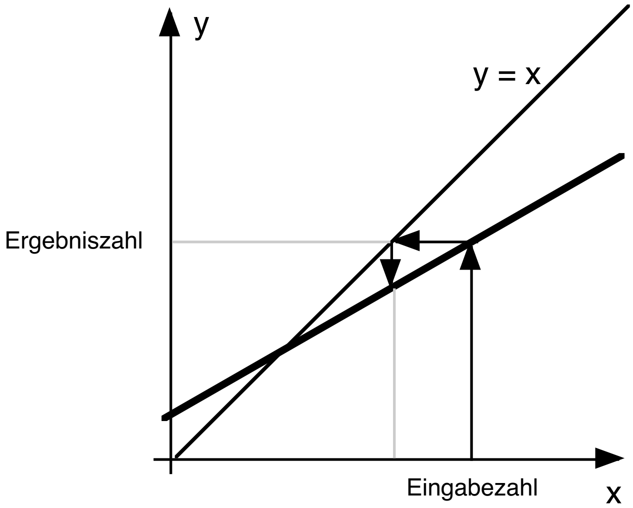
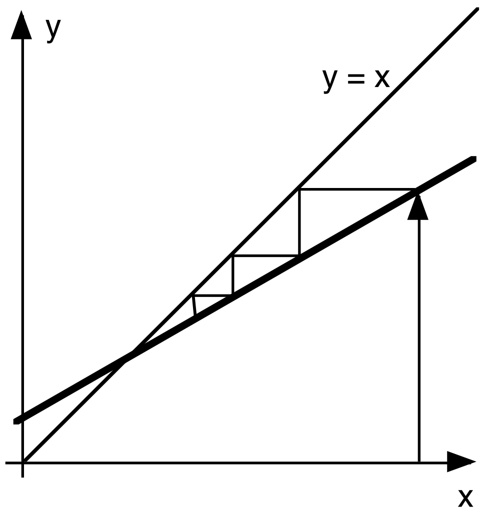


Bild 5:
Beschränkt man sich auf die notwendigen Linienstücke, erhält man einen übersichtlichen Pfad

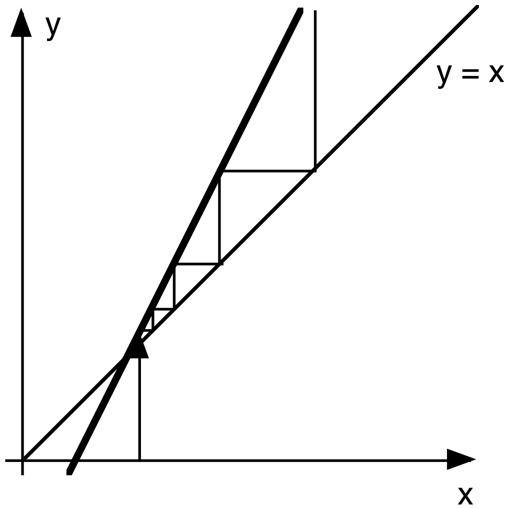
Beschränkt man sich bei diesem Prozeß auf die notwendigen Linienstücke, kann man mehrere Schritte der Iteration durchführen, ohne in einem Wust von Linien unterzugehen. Man erhält ganz im Gegenteil einen übersichtlichen Pfad.

3. Die vier allgemeinen Fälle

Das Iterieren sollte nun an vielen Beispielen, ggf. auch verteilt in der Klasse, geübt werden. Beim Aussuchen der Beispiele sollte die Lehrerin/der Lehrer die folgenden vier allgemeinen Fälle im Hinterkopf haben:

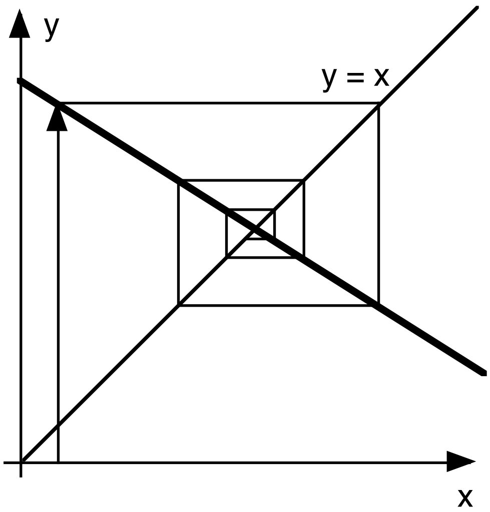


einwärtslaufende Treppe
$0 < m < 1$



auswärtslaufende Treppe
$m > 1$

Bild 6a:
positive Steigungen erzeugen treppenförmige Iterationspfade



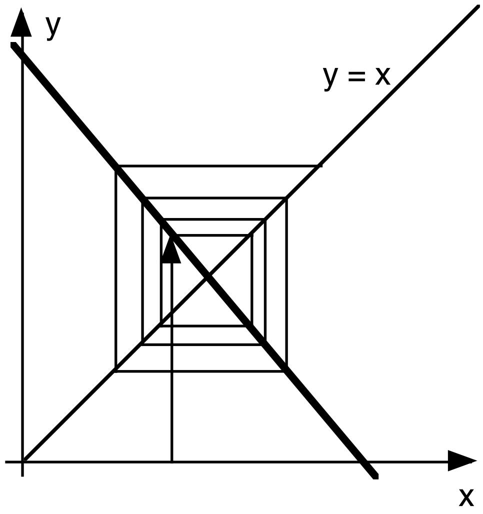


Bild 6b:
negative Steigungen erzeugen spiralförmige Iterationspfade

Ziel dieser Übungsphase ist, diese vier allgemeinen Fälle zu unterscheiden und zu wissen, daß die Steigung die maßgebliche Rolle spielt. Die beiden Sonderfälle $m = 1$ und $m = -1$ kann man kurz erwähnen, spielen aber für die folgenden Betrachtungen keine wesentliche Rolle.
Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Hilfsgeraden $y = x$ sind die Fixpunkte der Iteration. Für $-1 < m < 1$ sind diese Fixpunkte attraktiv, eine Iteration „in der Nähe“ wird in den Fixpunkt hineingezogen. Für $|m| > 1$ sind die Fixpunkte repulsiv, die Iteration wird abgestoßen.

4. Anwendung auf abschnittsweise, lineare Funktionen

Die Einführung von abschnittsweise definierten Funktionen festigt den Funktionsbegriff (eindeutige Zuordnung). Die verschiedenen Kombinationen von Attraktor und Repeller üben die erkannten Fixpunkteigenschaften.

a) 2 Attraktoren

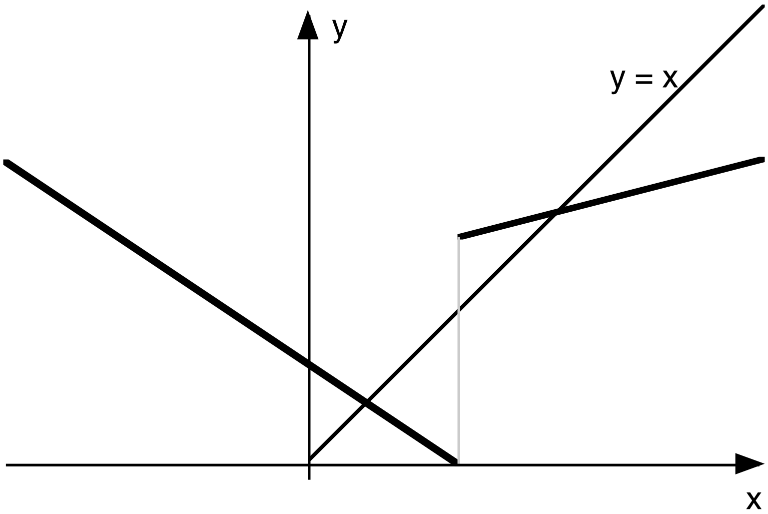


Bild 7: 2 Attraktoren

Als neue Fragestellung ergibt sich hier, welche Einzugsgebiete die beiden Attraktoren haben. Die Grenze zwischen beiden Gebieten ist ganz einfach die Stelle, an der die beiden Abschnitte zusammenstoßen.

b) Ein Attraktor, ein Repeller

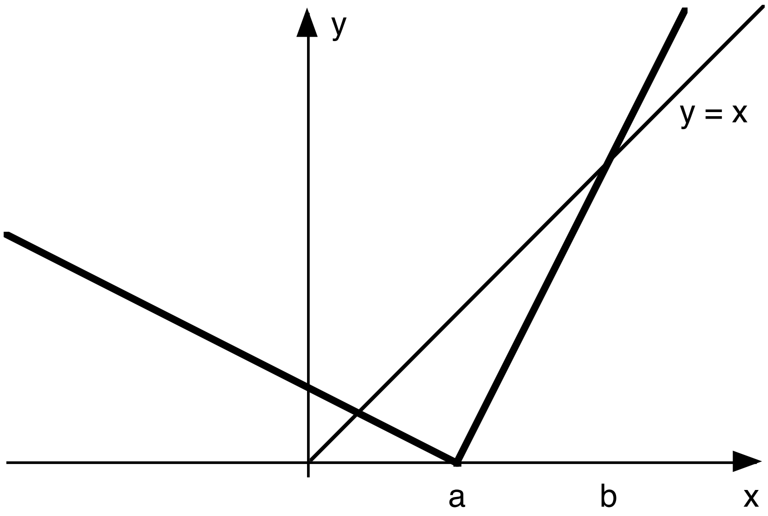


Bild 8:
1 Attraktor, 1 Repeller

Auch hier stellt sich die Frage nach dem Einzugsgebiet des Attraktors. Nach rechts ist das Intervall nicht durch a, sondern durch b (x-Koordinate des Repellers) bestimmt und auch nach links gibt es eine endliche Grenze. Beginnt man nämlich eine Iteration mit einem genügend negativen Wert (hier außerhalb der Zeichnung), trifft man nach der ersten Iteration rechts oberhalb des repulsiven Fixpunktes auf die Hilfslinie zu y = x . Damit läuft die weitere Iteration unter dem Einfluß des Repellers nach rechts oben weg. Die linke Grenze des Einzugsgebietes des Attraktors erhält man, indem man zur y-Koordinate des Repellers den entsprechenden Punkt auf dem linken Zweig sucht.

c) zwei Repeller

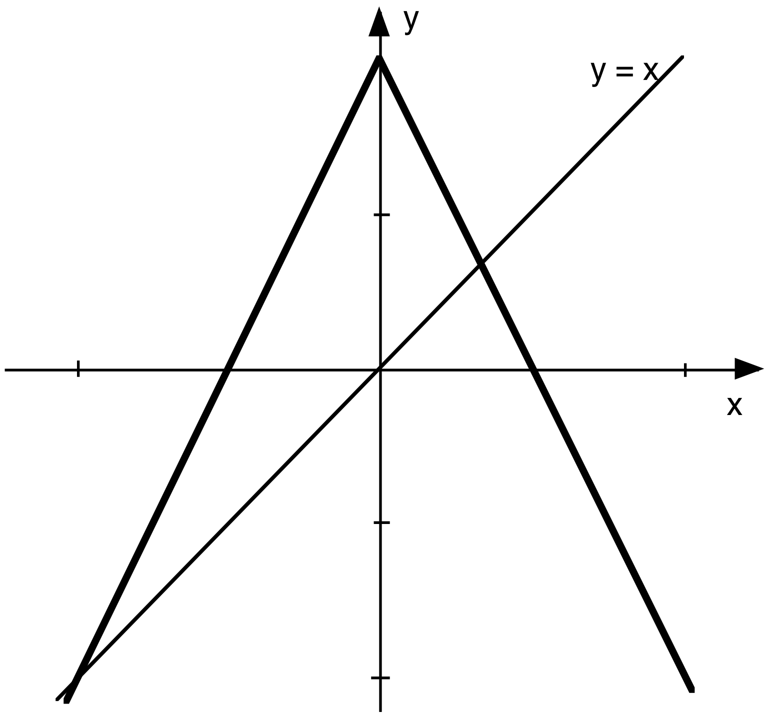


Bild 9: 2 Repeller

Als Beispiel hatte ich im Unterricht gewählt:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{für } x<0\\ -2x+4 & \text{für } x\geq 0\end{cases}$$

Der Graph zu dieser Funktion ist im Bild 9 dargestellt. Dieses Beispiel erwies sich als eine „mathematische Wundertüte“ und ich möchte den weiteren Unterrichtsgang nun näher ausführen.

I. Einstieg

Für einen ersten Einstieg in eine genauere Untersuchung dieses Beispiels startet man Iterationen mit verschiedenen, ganzzahligen Startwerten (in der Klasse verteilen) von -6 bis +6. Für -6, -5, +5 und +6 ergibt sich, daß die Iteration nach -∞ läuft (graphisch: Treppe nach links unten) . Als Ursache kann man den Repeller (-4/-4) erkennen und es ergibt sich, daß Iterationen, die außerhalb des Intervalls [-4 ; +4] starten, diesen „langweiligen“ Verlauf nehmen. Für alle weiteren Betrachtungen sei daher das Intervall [-4 ; +4] zugrunde gelegt als „interessantes“ Intervall, und alles soll nun darauf eingeschränkt sein.
Alle Iterationen, die mit ganzen Zahlen innerhalb des interessanten Intervalls starten, kann man zu folgendem Baum zusammenfassen:

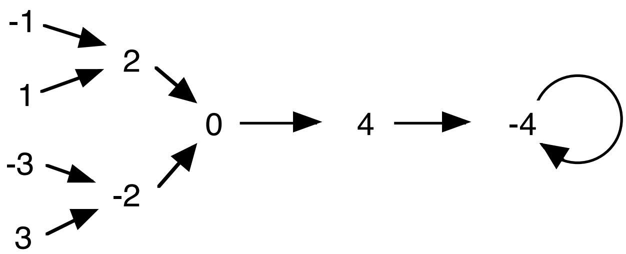


Bild 10:
Der Iterationsbaum für ganze Zahlen

Alle diese Iterationen bleiben im Fixpunkt (-4/-4) „stecken“. (Das war für die Schülerinnen und Schüler zunächst ein Widerspruch dazu, daß (-4/-4) ein Repeller ist. Hier konnten und mußten beide Begriffe „Fixpunkt“ und „Repeller “noch einmal wiederholt und vertieft werden.)

Es folgt nun eine für die nächsten Betrachtungen ganz zentrale Frage: Gibt es außer den ganzen Zahlen im interessanten Intervall weitere Startzahlen für Iterationen, die letztlich bei -4 enden? Es sind, in einem ersten Schritt, alle Halben (im interessanten Intervall). Denn jede Zahl wird beim Bilden des Funktionswertes mit 2 multipliziert und so werden aus Halben nach einem Schritt Ganze. Dann ist es aber auch klar, daß ebenfalls alle Viertel, Achtel, Sechzehntel u.s.w. letztlich durch die Iteration nach -4 gelangen. Die Menge aller Startzahlen für solch eine Iteration liegt dicht im interessanten Intervall, was an dieser Stelle angesprochen oder aber auf einen späteren Zeitpunkt vertagt werden kann.

II. Der zweite Fixpunkt

Nachdem man, eher zufällig, den einen repulsiven Fixpunkt auf diese Weise behandelt hat, liegt es nahe, nach Iterationen zu fragen, die im anderen Fixpunkt „steckenbleiben“. Dieser Ansatz führt auf das Rückwärtsiterieren, was erst einmal vorsichtig erprobt sein will. Man erfährt dabei sehr schnell, daß es zu jedem Punkt zwei Urbilder gibt.

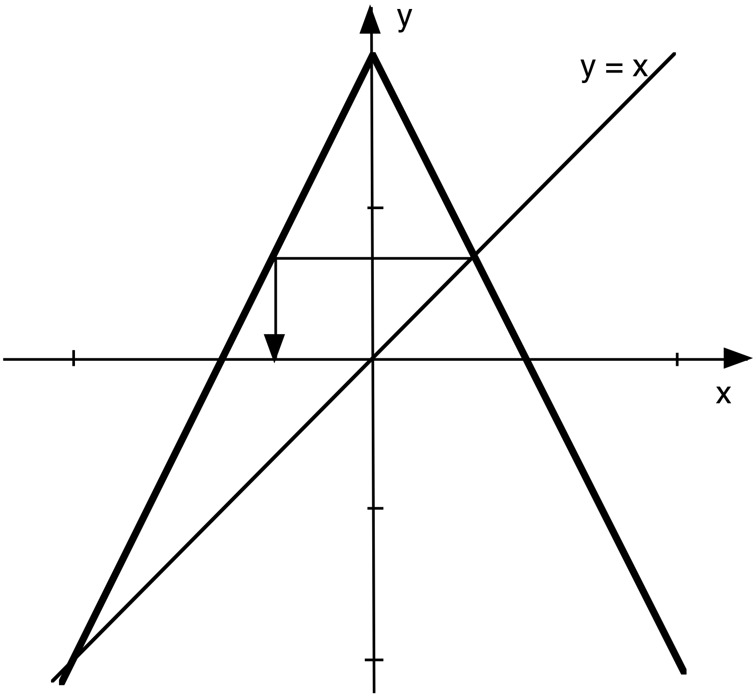


Bild 11:
Der erste Schritt der Rückwärtsiteration vom 2. Fixpunkt

Für die rechnerische Lösung muß man zunächst $\left(\frac{4}{3}/\frac{4}{3}\right)$ als Fixpunkt berechnen und dann die Gleichung

$$2x + 4 = \frac{4}{3}$$

lösen.

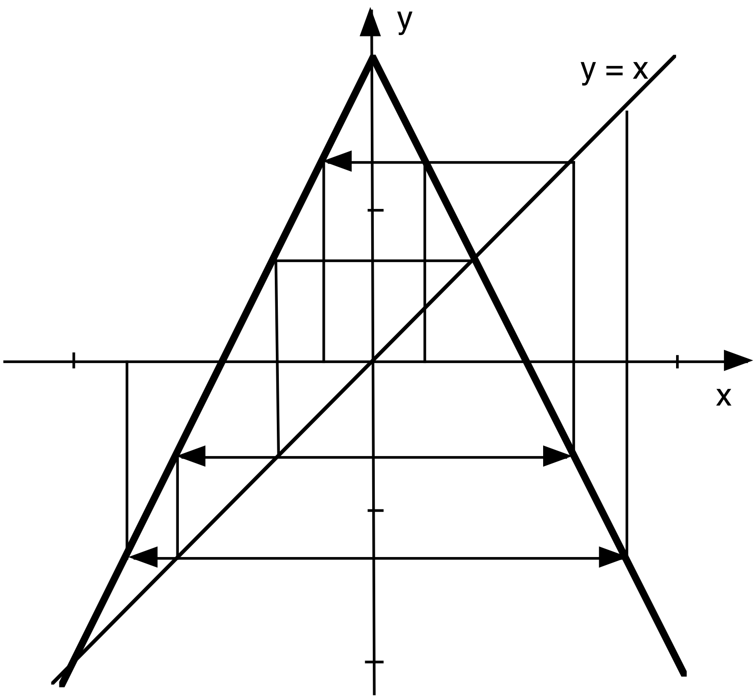


Bild 12:
Der weitere Verlauf der Rückwärtsiteration ist unübersichtlich

Die weitere Rückwärtsiteration wird dann sowohl graphisch als auch rechnerisch aufwendig, durch Verteilen von Aufgaben in der Klasse kommt man jedoch ein Stück weit.
Die rechnerischen Ergebnisse kann man wieder in einem Iterationsbaum aufzeichnen, der hier

natürlich entgegengesetzt zur Iterationsrichtung erforscht wird.

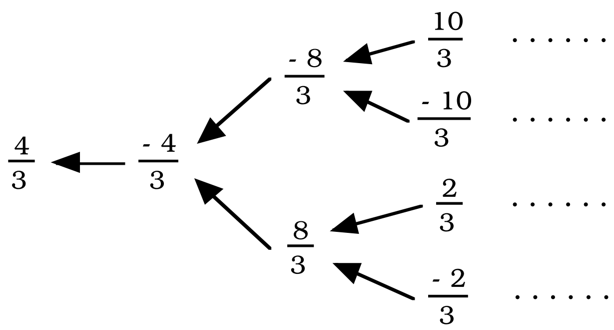


Bild 13:
Der Baum zur Rückwärtsiteration

In diesem Baum sind alle Drittel beteiligt, das kann man (als Extraaufgabe) hinterfragen oder als intuitiv klar stehen lassen. Mit der oben bereits einmal durchgeführten Überlegung werden aber auch alle Sechstel, Zwölftel, Vierundzwanzigstel, ... Iterationen starten, die auf $\frac{4}{3}$ führen. So erhält man wieder eine Menge, die dicht liegt im interessanten Intervall. Nun ist der Punkt gekommen, an dem man diese Eigenschaft einführen und besprechen sollte, denn damit wird die Sensitivität der Iteration deutlich und näher erläutert: In jedem noch so kleinen Intervall findet man (mindestens) zwei Startzahlen, für die die eine Iteration nach - 4 läuft und die andere nach $\frac{4}{3}$.

III. Zyklen

Mit allen Zahlen, deren Iteration nach -4 bzw. $\frac{4}{3}$ läuft, hat man zwei unendliche Zahlmengen aus dem interessanten Intervall betrachtet, die zudem dort dicht sind. Doch damit sind noch nicht alle Zahlen des Intervalls ausgeschöpft, denn es kam z.B. noch nicht die Zahl $\frac{1}{5}$ vor. Startet man mit dieser Zahl eine Iteration, so erhält man:

$$\frac{1}{5} \to \frac{18}{5} \to -\frac{16}{5} \to -\frac{12}{5} \to -\frac{4}{5} \to \frac{12}{5}$$

Die Iteration endet also nicht in einem der beiden Fixpunkte, die sind sozusagen schon vergeben, sondern in einem Zyklus, hier ein Zweierzyklus. Wie schon oben erkannt, bleibt man auch hier bei der Iteration in derselben Nennerklasse, nämlich Fünftel und offenbar ist der Nenner das wesentliche Merkmal für das „Schicksal" einer Iteration.
Das hatten meine Schülerinnen und Schüler schnell begriffen und sie rechneten hier selbständig (d.h. ohne daß ich sie dazu auffordern mußte) mit Brüchen und verwandelten sie nicht in Dezimalzahlen, um mit dem Taschenrechner direkt rechnen zu können. Ihnen wurde hier und in den späteren Rechnungen schnell klar, daß man die gesamte Systematik nur erfassen kann, wenn man bei Brüchen bleibt.
Der oben berechnete Zweierzyklus hat in der graphischen Darstellung ein charakteristisches Aussehen.

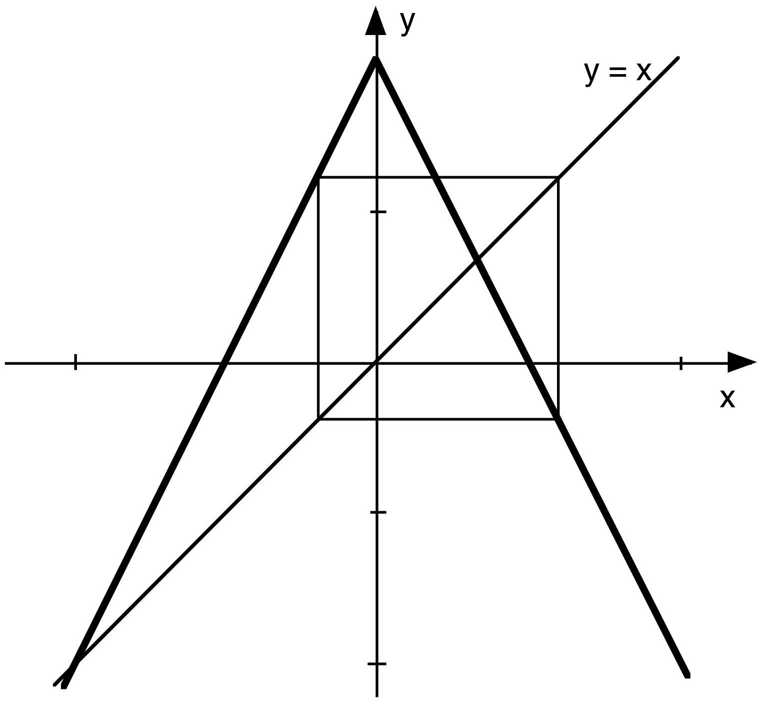


Bild 14:
Ein Zweierzyklus ergibt ein Quadrat

Der Wechsel zwischen $-\frac{4}{5}$ und $\frac{12}{5}$ ergibt, bei gleicher Achseneinteilung, ein Quadrat als Iterationsweg. Konstruiert man diesen Weg tatsächlich rein zeichnerisch nach dem Schema „senkrecht zum Funktionsgraph, waagerecht zur Hilfslinie“, so macht sich dabei die Sensitivität bemerkbar, man kommt kaum exakt zum Ausgangspunkt zurück. Dieses Problem sollte man an dieser Stelle besprechen.

IV Zyklen erforschen

Man kann nun den Iterationsbaum für die Fünftel vollständig aufschreiben und natürlich gilt auch hier, daß alle Zehntel, Zwanzigstel u.s.w. letztlich auch in dem Zweierzyklus enden müssen. Aber diese Detail- und Fleißaufgaben sind abgehandelt und üben keinen Reiz mehr aus, sondern mit Macht drängt sich die Frage in den Vordergrund: Welche Nennerklassen führen zu welchen Zyklen? Und auch: Wie sehen die Zyklen graphisch aus? Hier kann man dem Forschungsdrang, der zumindest bei mancher Schülerin oder manchem Schüler aufgekommen ist, freien Lauf lassen und auch gut wieder Aufgaben in der Klasse verteilen.

Überblick über die Zyklen, geordnet nach Nennern

Nenner	Verlauf der Iteration (nur Zähler) bis zum Zyklus
5	$1 \to 18 \to -16 \to -12 \to -4 \to 12$
7	$1 \to 26 \to -24 \to -20 \to -12 \to 4 \to 20$
9	$1 \to 34 \to -32 \to -28 \to -20 \to -4 \to 28$
11	$1 \to 42 \to -40 \to -36 \to -28 \to -12 \to 20 \to 4 \to 36$
13	$1 \to 50 \to -48 \to -44 \to -36 \to -20 \to 12 \to 28 \to -4 \to 44$

15 1 → 58 → -56 → -52 → -44 → -28 → 4 → 52
↑______________↓

17 1 → 66 → -64 → -60 → -52 → -36 → -4 → 60
↑______________↓

3 → 62 → -56 → -44 → -20 → 28 → 12 → 44
↑______________↓

19 1 → 74 → -72 → -68 → -60 → -44 → -12 → 52 → -28 → 20 → 36 → 4 → 68
↑____↓

21 1 → 82 → -80 → -76 → -68 → -52 → -20 → 44 → -4 → 76
↑__________________________↓

23 1 → 90 → -88 → -84 → -76 → -60 → -28 → 36 → 20 → 52 → -12 → 68 → -44 → 4 → 84
↑____↓

25 1 → 98 → -96 → -92 → -84 → -68 → -36 → 28 → 44 → 12 → 76 → -52 → -4 → 92
↑____↓

27 1 → 106 → -104 → -100 → -92 → -76 → -44 → 20 → 68 → -28 → 52 → 4 → 100
↑____↓

Diese Liste macht, eher unbeabsichtigt, neue Regelmäßigkeiten sichtbar:
Startet man, wie in der Liste, immer mit dem Zähler 1, so kehrt der Zyklus zur 5. Zahl der Iteration zurück. In jedem Zyklus taucht +4 oder -4 auf, und zwar regelmäßig abwechselnd. Die Zykluslänge entwickelt sich unregelmäßig und ohne offensichtlichen Zusammenhang zum Nenner. Bei den Siebzehntel erhält man für verschiedene Startzahlen zwei verschiedene Zyklen, während man bei den anderen Nennerklassen aus der Liste immer zu demselben Zyklus kommt, egal mit welcher Zahl man startet. Ich vermute aber, daß es weitere Nenner-klassen gibt, bei denen es ebenfalls mehrere Zyklen gibt. Für all diese Auffälligkeiten kenne ich keine näheren Begründungen, man sollte es darauf ankommen lassen, ob Schülerinnen oder Schüler von sich aus die eine oder andere Frage aufgreifen. Oder aber Sie selbst reizt es, der einen oder anderen Frage nachzugehen.
Ein anderes Problem habe ich allerdings in meinem Unterricht aufgegriffen: Warum muß jede Iteration mit Bruchzahlen auf einen Zyklus führen? Die Begründung ist reizvoll, denn sie enthält viel Logik und wenig Rechnerei:
Jede Nennerklasse hat im interessanten Intervall von -4 bis +4 nur endlich viele Vertreter. Startet man eine Iteration mit einer dieser Zahlen, so bleibt man im interessanten Intervall. Bei jedem Iterationsschritt kann man eine Weile auf neue Zahlen kommen, also auf Zahlen, die bisher durch die Iteration noch nicht getroffen wurden. Irgendwann muß man aber auf eine Zahl zurückkommen, die bereits schon „dran war“, und an dieser Stelle schließt sich der Kreis, denn das Berechnen der Zahlen ist ja eindeutig (Bilden eines Funktionswertes), so daß nach der Wiederholung einer Zahl die Iteration jede weitere Zahl in dem vorgegebenen Ablauf wiederholen muß.
Beispiel: Bei den Neunteln hat man wegen der Intervallänge 8 zunächst 72 Brüche mit dem Nenner 9 plus der letzten Zahl des Intervalls (4 = 36/9), also insgesamt 73. Nun muß man alle Zahlen abziehen, die keine echten Neuntel sind (durch Kürzen). Das sind alle ganzen Zahlen von -4 bis +4, also 9 Stück. Weiterhin alle Drittel, das sind zwischen zwei ganzen Zahlen jeweils 2, also muß man noch einmal 16 Zahlen abziehen. Es bleiben 73 - 9 - 16 = 48 echte Neuntel. Also kann man maximal 47 Mal iterieren und könnte jedes Mal auf eine neue Zahl treffen (die Startzahl „verbraucht“ ja schon eine Zahl), spätestens nach der 48. Iteration muß man eine Zahl nehmen, die schon einmal vorkam. Die tatsächliche Iteration schließt den Kreis allerdings sehr viel früher.
Bei dem schon untersuchten Zweierzyklus hatte sich ein sehr einprägsames Bild ergeben, so daß man auch einmal sehen sollte, wie längere Zyklen in der graphischen Darstellung aussehen. Ergeben sich ähnlich einprägsame Bilder und wie sieht denn z.B. ein Dreierzyklus im Prinzip aus? Die konsequente, geometrische Konstruktion der beiden Dreierzyklen (Siebtel und Neuntel) zeigt noch sehr viel deutlicher als der Zweierzyklus die Sensitivität. Selbst bei größter Genauigkeit wird es den Schülerinnen und Schülern kaum gelingen, einen wirklich geschlossenen Weg zu zeichnen.

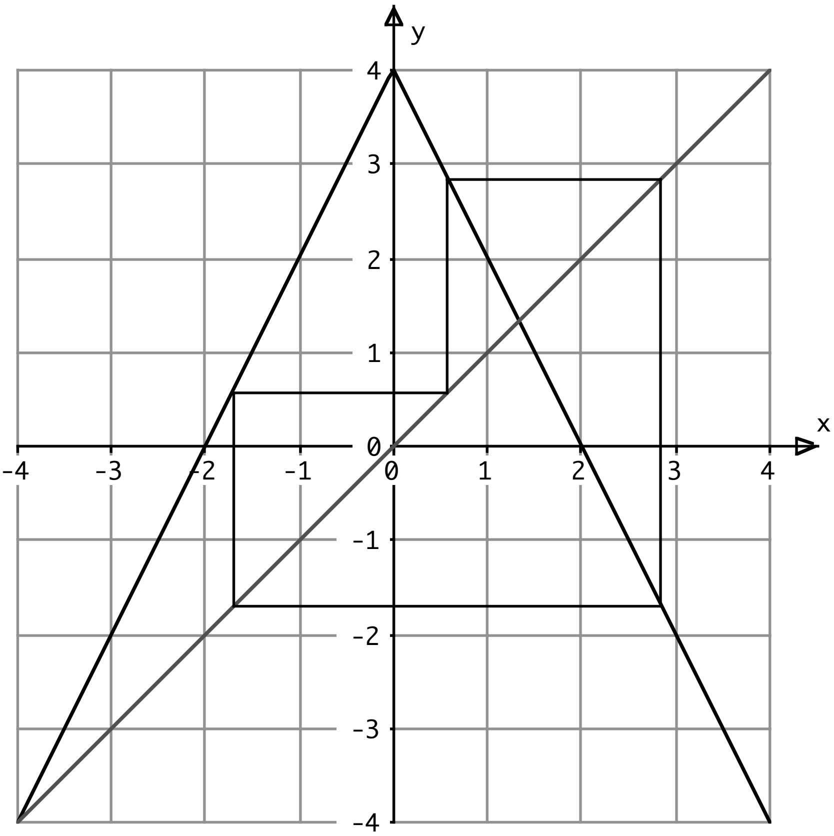


Bild 15:
Der Dreierzyklus zu den Siebteln

Eine Zeichnung per Hand für den geschlossenen Weg muß daher ein wenig „mogeln“. Man zeichnet nach den rechnerischen Ergebnissen zunächst die drei senkrechten Linien und verbindet sie dann mit (hoffentlich) waagerechten.

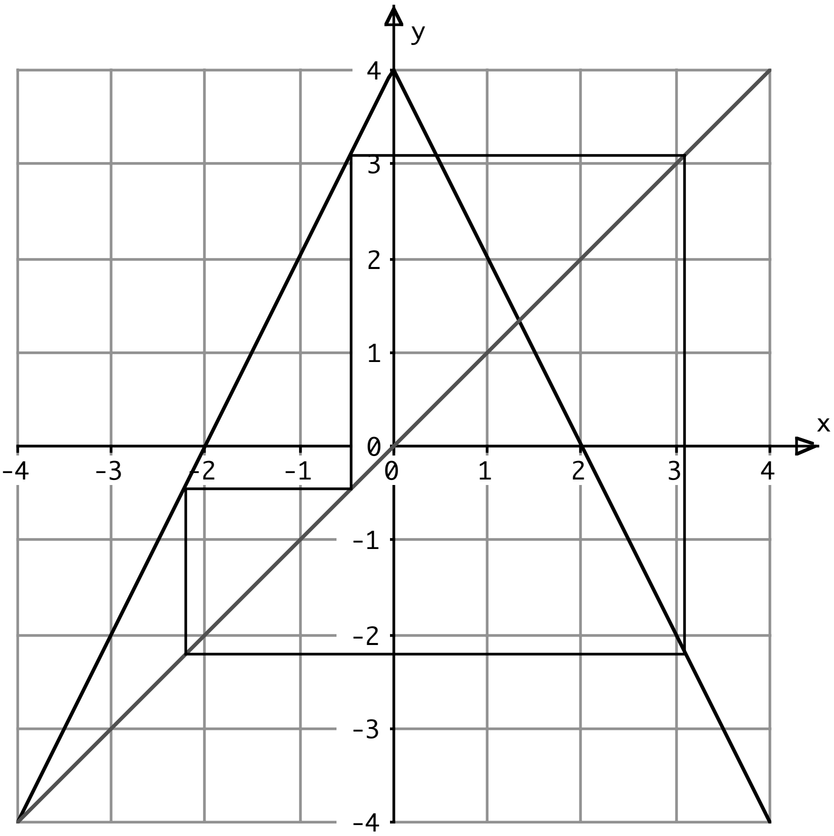


Bild 16:
Der Dreierzyklus zu den Neunteln

Es erhebt sich schnell die Frage, warum es zwei verschiedene Dreierzyklen gibt aber nur einen Zweierzyklus. Was ist der prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Dreierzyklen? Und weiter: Wieviele verschiedene Viererzyklen wird es wohl geben? Und wie findet man sie?

V lr-Kombinationen

Der prinzipielle Unterschied zwischen beiden Dreierzyklen ist recht gut aus den beiden Bildern abzulesen: Im Zyklus zu den Siebteln wird zweimal mit dem linken Abschnitt der Funktionswert gebildet und einmal mit dem rechten, während es bei den Neunteln gerade umgekehrt ist: einmal links, zweimal rechts. Um diese Eigenschaft genauer zu beschreiben und für weitere Untersuchungen anwendbar zu machen, bezeichnen wir zunächst die zugrundeliegende Funktion neu:

$$f(x) = \begin{cases} f_l(x) & \text{für } x < 0 \quad \text{mit } f_l(x) = 2x + 4 \\ f_r(x) & \text{für } x \ge 0 \quad \text{mit } f_r(x) = -2x + 4 \end{cases}$$

Damit lautet dann der eine Ansatz für einen Dreierzyklus:
Start mit x_1 $x_2 = f_r(x_1)$ $x_3 = f_l(x_2)$ $x_4 = f_l(x_3)$ und $x_4 = x_1$
Einsetzen ergibt: $x_4 = x_1 = f_l(x_3) = f_l(f_l(x_2)) = f_l(f_l(f_r(x_1)))$
also kurz und x ohne Index: $f_l(f_l(f_r(x))) = x$
Dementsprechend führt der Ansatz „zweimal rechts und einmal links“ auf $f_l(f_r(f_r(x))) = x$. Beide Ansätze sollen hier einmal beispielhaft durchgerechnet werden:

$$\begin{aligned} f_l(f_l(f_r(x))) &= x \\ 2(2(-2x+4)+4)+4 &= x \\ 2(-4x+8+4)+4 &= x \\ -8x+16+8+4 &= x \\ -9x &= -28 \\ x &= \frac{28}{9} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_l(f_r(f_r(x))) &= x \\ 2(-2(-2x+4)+4)+4 &= x \\ 2(4x-8+4)+4 &= x \\ 8x-16+8+4 &= x \\ 7x &= 4 \\ x &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Beide Ansätze liefern jeweils eine Zahl aus dem Zyklus, die weiteren erhält man durch Iterieren, wobei man tatsächlich in der richtigen Reihenfolge mit der richtigen, d.h. entsprechend dem Ansatz, Teilfunktion rechnet:

$f_r(\frac{28}{9}) = -\frac{20}{9}$, $f_l(-\frac{20}{9}) = -\frac{4}{9}$, $f_l(-\frac{4}{9}) = \frac{28}{9}$ $\quad$ $f_r(\frac{4}{7}) = \frac{20}{7}$, $f_r(\frac{20}{7}) = -\frac{12}{7}$, $f_l(-\frac{12}{7}) = \frac{4}{7}$

Nach diesen Ansätzen ergibt sich die Frage, ob man nicht durch weitere Veränderungen im Ansatz neue Dreierzyklen finden kann. Schließlich haben wir bisher erst zwei Kombinationen von f_l und f_r betrachtet und es gibt schließlich noch weitere. Unsere beiden Kombinationen waren: Bilde den Funktionswert zunächst mit f_r und dann zweimal mit f_l oder aber erst zweimal mit f_r und dann einmal mit f_l . Für die erste Kombination schreiben wir kurz und markant „rll“ , für die zweite dementsprechend „rrl“, und man kann sich in dieser einfachen Schreibweise überlegen, welche weiteren lr-Kombinationen insgesamt für einen Dreierzyklus denkbar sind:

rrr , rrl , rlr , lrr , rll , lrl , llr , lll

Bei dem Problem, wirklich alle Möglichkeiten zu berücksichtigen, ist man schnell bei einfachen, kombinatorischen Fragestellungen angelangt: Wieviele Kombinationen kann es geben? Wie schreibt man diese systematisch auf?
Das Problem, daß von den 8 denkbaren Dreierzyklen dann letztlich nur 2 wirklich verschiedene übrigbleiben, löst man am besten wieder durch in der Klasse verteiltes Untersuchen aller Fälle.

Dabei kommt man auf folgende Ergebnisse:

rrr	also $f_r(f_r(f_r(x))) = x$	liefert x = 4/3
rrl	also $f_l(f_r(f_r(x))) = x$	liefert x = 4/7
rlr	also $f_r(f_l(f_r(x))) = x$	liefert x = 20/7
lrr	also $f_r(f_r(f_l(x))) = x$	liefert x = -12/7
rll	also $f_l(f_l(f_r(x))) = x$	liefert x = 28/9
lrl	also $f_l(f_r(f_l(x))) = x$	liefert x = -4/9
llr	also $f_r(f_l(f_l(x))) = x$	liefert x = -20/9
lll	also $f_l(f_l(f_l(x))) = x$	liefert x = -4

Die zusammenfassende Analyse der Ergebnisse zeigt, daß die drei Kombinationen „rrl“ , „rlr“ und „lrr“ auf den Siebtel-Zyklus führen, wobei man jeweils auf die drei Zahlen des Zyklus trifft. Die lr-Kombinationen gehen durch zyklisches Vertauschen auseinander hervor und führen daher letztlich auf denselben Zyklus. Das ist ebenso der Fall bei den drei Kombinationen „rll“ , „lrl“ und „llr“. Den Begriff des zyklischen Vertauschens hier einzuführen ist naheliegend. Die verbleibenden zwei Fälle zeigen eine Eigenschaft, die bei weiteren Untersuchungen immer wieder auftaucht und zu berücksichtigen ist: Manche Ansätze führen nicht wirklich auf die beabsichtigte Zykluslänge, sondern sind wiederholte, kürzere Zyklen. Im Fall „rrr“ handelt es sich um den Fixpunkt $\left(\frac{4}{3}/\frac{4}{3}\right)$, wobei ein Fixpunkt in diesem Zusammenhang als ein Einerzyklus aufzufassen ist, der laut Ansatz dreimal durchlaufen wird. Entsprechend führt der Ansatz „lll“ auf den Fixpunkt bei -4. Diese Eigenschaft kann man aber schon aus dem Ansatz erkennen, nicht erst im Nachhinein nach der Rechnung.

Analog zu diesen Überlegungen wollen wir nun einmal beispielhaft alle lr–Kombinationen der Länge 4 analysieren. Zunächst einmal gibt es $2^4 = 16$ „Rohfassungen“

rrrr	rrrl	rrlr	rlrr	lrrr	rrll	rlrl	lrrl	rllr	lrlr	llrr	rlll	lrll	llrl	lllr	llll
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Nummer 1 ist die vierfache Wiederholung der reinen Iteration an f_r, das liefert den Fixpunkt $\left(\frac{4}{3}/\frac{4}{3}\right)$, ebenso ergibt Nr.16 mit der vierfachen Wiederholung der reinen Iteration an f_l den Fixpunkt bei -4. Weiterhin sind die Ansätze unter Nr. 7 und 10 eine zweifache Wiederholung des Zweierzyklus. Die übrigen 12 Kombinationen liefern wirklich Viererzyklen, wegen der jeweils 4 zyklischen Vertauschungen jedoch nur 3 echt verschiedene. In der obigen Liste führen die Nummern 2, 3, 4 und 5 auf den ersten Zyklus, die Nummern 6, 8, 9 und 11 auf den zweiten und die Nummern 12, 13, 14 und 15 schließlich auf den dritten. Die nachfolgende Liste enthält diese drei Viererzyklen.
Natürlich kann man durch verteilte Aufgaben in der Klasse auch hier vieles ausprobieren, sei es, um Regelmäßigkeiten zu entdecken, oder aber um gefundene Regelmäßigkeiten zu bestätigen.

Überblick über die Zyklen, geordnet nach der Länge

Zykluslänge	lr-Kombination	Nenner	Zähler der Zykluszahlen
2	lr	5	$-4 \to 12$
3	lrr	7	$-12 \to 4 \to 20$
	llr	9	$-20 \to -4 \to 28$
4	lrrr	17	$-20 \to 28 \to 12 \to 44$
	llrr	15	$-44 \to -18 \to 4 \to 52$
	lllr	17	$-52 \to -36 \to -4 \to 60$
5	lrrrr	31	$-44 \to 36 \to 52 \to 20 \to 84$

llrrr	11	$-28 \to -12 \to 20 \to 4 \to 36$
lllrr	31	$-108 \to -92 \to -60 \to 4 \to 116$
llllr	33	$-116 \to -100 \to -68 \to -4 \to 124$
lrlrr	33	$-20 \to 92 \to -52 \to 28 \to 76$
lrllr	31	$-12 \to 100 \to -76 \to -28 \to 68$

Eine weiterführende Fragestellung in Richtung Kombinatorik ist die Untersuchung von Zykluslänge und der zugehörigen Anzahl echt neuer und verschiedener Zyklen (Warum gibt es z.B. zur Länge 5 6 verschiedene Zyklen? Wieviele werden es zur Länge 6 sein?)
Eine weitere Gesetzmäßigkeit erkennt man, wenn man viele Zyklenansätze auch wirklich durchrechnet. Nach dem Ausklammern und Zusammenfassen der linken Seite (siehe dazu auch die Rechnungen auf Seite 13) erhält man eine Gleichung der Form $\pm 2^z x + v = x$, wobei z die Zykluslänge ist und v eine durch 4 teilbare Zahl. Das Auflösen nach x liefert dann einen Bruch, der im Zähler v und im Nenner $2^z \pm 1$ hat. In manchen Fällen läßt sich der Bruch noch kürzen, so daß der ursprüngliche Nenner verloren geht. Diese Gesetzmäßigkeit soll aus der obigen Tabelle einmal herausgestellt werden:

Zykluslänge z	Nenner N der Zykluszahlen	Zusammenhang
2	5	$5 = 2^2 + 1$
3	7	$7 = 2^3 - 1$
	9	$9 = 2^3 + 1$
4	15	$15 = 2^4 - 1$
	17	$17 = 2^4 + 1$
5	11	$11 = (2^5 + 1) / 3$
	31	$31 = 2^5 - 1$
	33	$33 = 2^5 + 1$

Diese Untersuchung ist eine Einstiegsmöglichkeit in die Frage: Wie lang ist der Zyklus zu einem vorgegebenen Nenner N. Diese Umkehrung der Untersuchung von Zykluslänge und Nenner der Zyklenzahlen ist aber an der bisher untersuchten Funktion recht schwierig.
Hier ist eine Untersuchung mit Dualbrüchen an einer anderen, allerdings sehr ähnlichen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{für } 0 \le x < 0{,}5 \\ -2x+1 & \textit{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases}$$

sehr viel angemessener und einfacher.

VI Untersuchungen mit irrationalen Startzahlen

Die Untersuchung der Iteration an der bisher betrachteten Funktion bietet auch einen Übergang zu den irrationalen Zahlen. Wie oben besprochen kann man mit einer sehr schönen Argumentation beweisen, daß jeder Iterationsstart mit einer rationalen Zahl in einem Zyklus enden muß. Das wesentliche Argument bestand darin, daß jede Nennerklasse im interessanten Intervall [-4 ; +4] nur endlich viele Zahlen hat.
Startet man nun die Iteration mit $\sqrt{2}$, so erhält man:

$x_0 = \sqrt{2}$, $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = -4 + 4\sqrt{2}$, $x_3 = 12 - 8\sqrt{2}$, $x_4 = -20 + 16\sqrt{2}$, u.s.w.

Die Zahlen haben alle die Form $4k \pm 2^n\sqrt{2}$, $k \in Z$, $n = 0,1,2,3,4...$, die Menge dieser Zahlen ist bezüglich der Iteration mit „unserer“ Funktion abgeschlossen. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, haben wir die Chance, daß die Iteration ein vollkommen neues Verhalten zeigt. Was tatsächlich passiert, muß allerdings näher untersucht werden. Zunächst einmal entfällt das Kernargument für ein zyklisches Verhalten, da die Zahlmenge $\{4k \pm 2^n\sqrt{2} \mid k \in Z , n = 0,1,2,3,4... \}$ im interessanten

Intervall unendlich viele Elemente hat. Wählt man sich ein n, so bewegt man sich mit veränderlichem k in Viererschritten auf dem Zahlenstrahl. Das interessante Intervall hat aber eine Länge von 8, so daß man mit den Viererschritten zweimal das Intervall trifft. Etwas formaler heißt das: hat für ein festes n zwei Lösungen für k.
Da die Iteration also unendlich viele Zahlen im interessanten Intervall zur Auswahl hat, kann sie also ohne Wiederholung unendlich oft durchgeführt werden. Bleibt zu beweisen, daß sie auch tatsächlich ohne Zyklus verläuft.
Annahme: Zwei Zahlen aus der Iteration sind gleich, also

$$4k_1 + 2^{n_1}\sqrt{2} = 4k_2 + 2^{n_2}\sqrt{2}$$

$$4k_1 - 4k_2 = 2^{n_2}\sqrt{2} - 2^{n_1}\sqrt{2}$$

$$4(k_1 - k_2) = (2^{n_2} - 2^{n_1})\sqrt{2}$$

$$\frac{4(k_1 - k_2)}{(2^{n_2} - 2^{n_1})} = \sqrt{2}$$

Die letzte Zeile zeigt deutlich den Widerspruch zur Irrationalität von √2, womit man diese Eigenschaft auch einmal in einer Argumentation verwendet hat. Damit ist nachgewiesen, daß die Iteration mit dem Startwert √2 nicht in einem Zyklus endet, sondern stets neue Zahlen trifft.

VII Zusammenfassung

Die Darstellung zeigt, wie man mit Iterationen zum Thema „ineare Funktionen“ handfeste Übungen machen kann. Gleichzeitig kann man aber auch, wenn man will, in neue mathematische Gebiete hineinschauen bzw. alte wiederholen.
Diese Gebiete sind:

- Bruchrechnung
- abschnittsweise definierte Funktionen
- Dichtheit von Zahlenmengen
- einfache, nicht rechnerische Beweise
- Kombinatorik
- irrationale Zahlen

Zusätzlich führt man mit der Iteration ein wesentliches Verfahren ein, das in der numerischen Mathematik eine Rolle spielt und für die Chaosmathematik eine wichtige Grundlage ist. Aus der Chaosmathematik behandelt man den Begriff „periodische Punkte“ sehr intensiv und die Sensitivität spielt ansatzweise in den Zeichnungen eine Rolle. Weiterhin hat man die Option, mit den quadratischen Funktionen wieder in die Iterationen einzusteigen und so diese Herangehensweise nicht als eine einmaligen Aktion stehenzulassen.
Ein weiterer, sehr wichtiger Punkt ist, daß man immer wieder zu einem forschenden Unterricht kommen kann, in dem die Schülerinnen und Schüler selbst etwas entdecken oder zumindest überprüfen können.