# Große Zahlen

# Unendlich ist keine große Zahl

Angenommen Ihr Jahreseinkommen ist 10.000.000 €

Bei 33% Steuer müssen Sie 3.300.000 € Steuern zahlen.

Ihnen bleiben 6.700.000 € Nettoeinkommen.

Sie haben dadurch weniger als vor dem Steuerzahlen, aber das Finanzamt hat weniger bekommen als Sie nun noch haben.

# Unendlich ist keine große Zahl

Angenommen das Jahreseinkommen ist ∞ €

Bei 33% Steuer müssen Sie ∞ € Steuern zahlen.

Ihnen bleiben ∞ € Nettoeinkommen.

Sie haben dadurch genau so viel wie vor dem Steuerzahlen, und das Finanzamt hat genau so viel bekommen wie Sie nun noch haben.

**Bekommt man bei einer Rechnung Unsinn heraus, kann das daran liegen, dass man mit Unendlich gerechnet hat.**

# Alltagszahlen

Unser Alltagszahlraum ist überwiegend der der zweistelligen Zahlen. Insbesondere bei konkreten Dingen, die um uns sind (Menschen, Fahrräder, Handtücher, …)

Ab und zu kommen größere Zahlen ins Spiel.

# Hunderter

Länge (km): Reisen in Deutschland

Zeit (Jahre): Ereignisse der vorstellbaren Vergangenheit

Menschen: Die Größe von Dörfern

Geschwindigkeiten (km/h): Autobahnfahrt, Verkehrsflugzeuge

Geld (Euro): Konsumgüter

# Tausender

Länge (km): Auslandsreisen

Zeit (Jahre): kulturelle Menschheitsgeschichte

Menschen: Kleinstädte

Geschwindigkeiten (km/h): Militärflugzeuge, Raketen

Geld (Euro): Möbel, teure Elektronik

# Zehntausender

Länge (km): globale Reisen

Zeit (Jahre): frühe Menschheitsgeschichte

Menschen: mittelgroße Städte

Geschwindigkeiten (km/h): Satelliten in Erdumlaufbahnen

Geld (Euro): Autokauf

# Hunderttausender

Länge (km): Entfernung zum Mond

Zeit (Jahre): Auftauchen des biologischen Menschen

Menschen: Großstädte

Geschwindigkeiten (km/h): Körper im Umlauf um die Sonne

Geld (Euro): Hauskauf

# Millionen

Länge (km): Entfernung zur Sonne

Zeit (Jahre): Evolutionsgeschichte der Tiere

Menschen: Einwohner von Staaten

Geld (Euro): Gehälter von Spitzenmanagern, Haushalte von Städten

Die Chance auf 6 Richtige im Lotto ist 1 zu 14 Millionen.

# Milliarden

Länge (km): leerer Weltraum

Zeit (Jahre): Alter des Universums (obere Grenze)

Menschen: alle Menschen auf der Erde (obere Grenze)

Geschwindigkeiten (km/h): Lichtgeschwindigkeit (obere Grenze)

Geld (Euro): Besitz der reichsten Menschen, Haushalte von Staaten

# Beispiele für große Zahlen in den Naturwissenschaften

Ein Kubikmeter hat eine Milliarde Kubikmillimeter
$1m^3 = 1.000.000.000\ mm^3$

Das Volumen der Erde ist $1.083.000.000.000\ km^3$ (Billion)

Der nächste Fixstern, Alpha Centauri, ist 4,3 Lichtjahre entfernt,
das sind ca. 40.680.000.000.000 km. (Billiarden)

In einem Mol eines Stoffes sind $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Atome/Moleküle.
z.B. ist 1 Mol Wasser 10g

# Wiederholung

Potenzschreibweise $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$

insbesondere $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Tausend

$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000$ Million

$10^9 = 1.000.000.000$ Milliarde

Potenzrechnung $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4} = a^7$

$$a^5 : a^3 = \frac{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-3} = a^2$$

$$\left(a^2\right)^3 = \left(a^2\right) \cdot \left(a^2\right) \cdot \left(a^2\right) = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

# große Zahlen

Angenommen, Sie besitzen $6{,}022 \cdot 10^{23}$ € und sind sehr spendabel:

- Ihre 200 Verwandten und gute Bekannten bekommen je 10 Millionen
- Sie selbst geben ein Jahr lang jeden Tag 10 Millionen für sich aus
- Sie beschäftigen 100 Angestellte mit einem Jahresgehalt von 1 Mio.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 602 | 200 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 |
| | | | | -2 | 000 | 000 | 000 |
| | | | | -3 | 650 | 000 | 000 |
| | | | | | -100 | 000 | 000 |
| 602 | 199 | 999 | 999 | 994 | 250 | 000 | 000 |

# Große Zahlen in der Mathematik

**mit einer Geschichte/Bedeutung**

1. Eine Wettbewerbsaufgabe für Schüler der 9. Klasse

Wir betrachten alle natürlichen Zahlen, die nur die Ziffern 1 oder 2 enthalten, also 1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, … und deren Quersumme.
Es sei A($n$) die Anzahl solcher Zahlen, die die Quersumme $n$ haben.
Die Quersumme 3 haben zum Beispiel die Zahlen 12, 21 und 111, also drei Zahlen. Also ist A(3) = 3 .
Aufgaben: a) Berechnen Sie A(4) und A(5)
b) Untersuchen Sie, ob A(8·2016) größer, kleiner oder gleich $10^{2016}$ ist.

Lösung: zu a)
Quersumme 4: 22, 211, 121, 112, 1111 fünf Zahlen, also **A(4) = 5**
Quersumme 5: 221, 212, 122, 2111, 1211, 1121, 1112, 11111
acht Zahlen, also **A(5) = 8**

Lösung: zu b)

Die Quersumme der Zahl soll 8·2016 sein. Eine dieser Zahlen ist die, in der 4·2016 Zweien nebeneinander stehen.

$$\underbrace{2222...222}_{4\cdot 2016}$$

Nun kann man jede der Zweien durch 11 ersetzen und erhält weitere Zahlen mit der Quersumme 8·2016.

Man hat also an jeder der 4·2016 Stellen zwei Möglichkeiten:
Man schreibt eine 2 oder 11.

Auf diese Art kann man $2^{4\cdot 2016}$ verschiedene, gesuchte Zahlen bilden.
(Es gibt noch mehr gesuchte Zahlen, aber diese Betrachtung reicht schon aus.)

$$A\left(8\cdot 2016\right) > 2^{4\cdot 2016} = \left(2^4\right)^{2016} = 16^{2016} > 10^{2016}$$

Also: Die Anzahl der zulässigen Zahlen mit der Quersumme 8·2016 <u>ist größer als</u> $10^{2016}$.

Name: Franka Mawn  Aufgabe: 550936  Seite 1 von 1 (für diese Aufgabe)

a) Für die Berechnung von $A(4)$ und $A(5)$ schreibe ich alle möglichen Zahlen auf.

$A(4) = 5$ ✓  1111; 112; 121; 122; 22

Ich habe also bei unterschiedlichen Ziffern, diese an alle Stellen gesetzt

$A(5) = 8$ ✓  11111; 1112; 1121; 1211; 2111; 122; 212; 221

b) Für die Überprüfung, ob $A(8\cdot 2016)$ größer, kleiner oder gleich $10^{2016}$ ist habe ich zunächst die kleinste mögliche Ziffernzahl von $A(8\cdot 2016)$ bestimmt.

Diese bestände nur aus 2en wäre also $\frac{8\cdot 2016}{2} = 4\cdot 2016$.

Dabei könnte man nun jede vorkommende 2 durch 2 Einsen ersetzen. Man hat also an jeder der $4\cdot 2016$ Stellen zwei Möglichkeiten: 2 einsen oder eine zwei.

Die Anzahl der Möglichkeiten eine solche Zahl ~~[illegible]~~ zu erstellen beträgt ~~f~~olglich $2^{4\cdot 2016}$

Nach den Potenzgesetzen ist $2^{4\cdot 2016} = (2^4)^{2016} = 16^{2016}$

Da $16 > 10$ ist auch $16^{2016} > 10^{2016}$

$A(8\cdot 2016)$ ist also größer als $10^{2016}$

✓

Die Lösung der (sehr guten) Schülerin aus Klasse 9.

# Große Zahlen in der Mathematik

**mit einer Geschichte/Bedeutung**

## 2. Eine Wettbewerbsaufgabe für Schüler mit Modifikation

Gesucht ist die kleinste Zahl mit folgender Eigenschaft:
Die Zahl endet auf 4. Tauscht man die 4 von der letzten Stelle vor die verbleibende Ziffernfolge, so ist die neue Zahl 4 Mal so groß.

$$\boxed{\quad x \quad}\,4 \xrightarrow{\cdot 4 \text{ ergibt}} 4\,\boxed{\quad x \quad}$$

Lösung:

Die Schwierigkeit ist, dass man nicht weiß, wie groß (lang) die gesuchte Zahl x ist und daher nicht weiß, an welche Zehnerstelle die 4 vor der Zahl x steht. Also führen wir eine neue Unbekannte k ein für die Anzahl der Stellen in x.
Dann lautet der algebraische Ansatz:

$$\left(10x+4\right)\cdot 4 = 4\cdot 10^k + x$$

$$(10x+4)\cdot 4 = 4\cdot 10^k + x$$

$$40x+16 = 4\cdot 10^k + x$$

$$39x = 4\cdot 10^k - 16$$

$$x = \frac{4\cdot\left(10^k-4\right)}{39}$$

Nun muss man das *k* finden, für das $10^k$ - 4 durch 39 teilbar ist. Schließlich suchen wir für *x* eine natürliche Zahl und kein Bruch.

Um k zu finden bleibt nur systematisches Probieren.

| k | $10^k$ - 4 | durch 39 |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 0,153… |
| 2 | 96 | 2,46… |
| 3 | 996 | 25,53… |
| 4 | 9996 | 256,30… |
| 5 | 99996 | 2564 |

Das gesuchte k ist also 5.
Dann ist das gesuchte x:

$$x = \frac{4\cdot\left(10^5-4\right)}{39} = 10256$$

Die gesuchte Zahl ist somit 10x + 4, also 102564

Probe:

| 1 | 0 | 2 | 5 | 6 | 4 | · | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 | 2 | 5 | 6 | | |

---

Nun variieren wir die Aufgabe, indem wir die 4 durch 6 ersetzen.

Gesucht ist die kleinste Zahl mit folgender Eigenschaft:
Die Zahl endet auf 6. Tauscht man die 6 von der letzten Stelle vor die verbleibende Ziffernfolge, so ist die neue Zahl 6 Mal so groß.

Der algebraische Ansatz für x und dessen Stellenzahl k liefert dann

$$x = \frac{4\cdot\left(10^k - 4\right)}{39} \qquad x = \frac{6\cdot\left(10^k - 6\right)}{59}$$

Die systematische Suche mit dem Computer wird dann erst für k = 57 fündig, so dass die endgültige Lösungszahl die folgende 58-stellige Zahl ist:

**1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966**

# Große Zahlen in der Mathematik

**mit einer Geschichte/Bedeutung**

## 3. Eine Vermutung über Primfaktoren von Pólya

Jede natürliche Zahl (größer als 1) kann in Primfaktoren zerlegt werden.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad \text{vier Primfaktoren}$

$37 = 37, \quad \text{ein Primfaktor}$

Nun kann man untersuchen, ob die Anzahl der Primfaktoren gerade oder ungerade ist.

| | | | | Anzahl un- /gerade | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | {2} | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | {3} | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | {2, 2} | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 5 | {5} | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 6 | {2, 3} | 2 | 0 | 3 | 2 |
| 7 | {7} | 1 | 1 | 4 | 2 |
| 8 | {2, 2, 2} | 3 | 1 | 5 | 2 |
| 9 | {3, 3} | 2 | 0 | 5 | 3 |
| 10 | {2, 5} | 2 | 0 | 5 | 4 |
| 11 | {11} | 1 | 1 | 6 | 4 |
| 12 | {2, 2, 3} | 3 | 1 | 7 | 4 |
| 13 | {13} | 1 | 1 | 8 | 4 |
| 14 | {2, 7} | 2 | 0 | 8 | 5 |

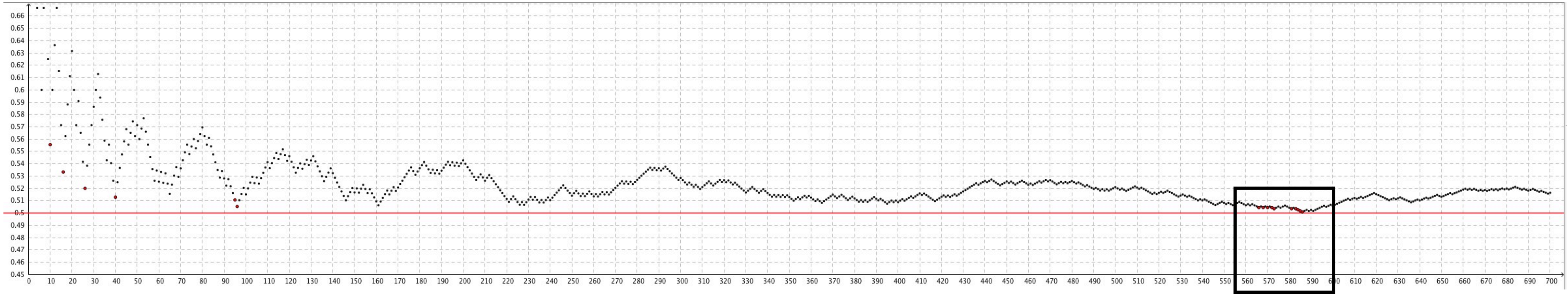
| | | | | Anzahl un- /gerade | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | {3, 5} | 2 | 0 | 8 | 6 |
| 16 | {2, 2, 2, 2} | 4 | 0 | 8 | 7 |
| 17 | {17} | 1 | 1 | 9 | 7 |
| 18 | {2, 3, 3} | 3 | 1 | 10 | 7 |
| 19 | {19} | 1 | 1 | 11 | 7 |
| 20 | {2, 2, 5} | 3 | 1 | 12 | 7 |
| 21 | {3, 7} | 2 | 0 | 12 | 8 |
| 22 | {2, 11} | 2 | 0 | 12 | 9 |
| 23 | {23} | 1 | 1 | 13 | 9 |
| 24 | {2, 2, 2, 3} | 4 | 0 | 13 | 10 |
| 25 | {5, 5} | 2 | 0 | 13 | 11 |
| 26 | {2, 13} | 2 | 0 | 13 | 12 |
| 27 | {3, 3, 3} | 3 | 1 | 14 | 12 |

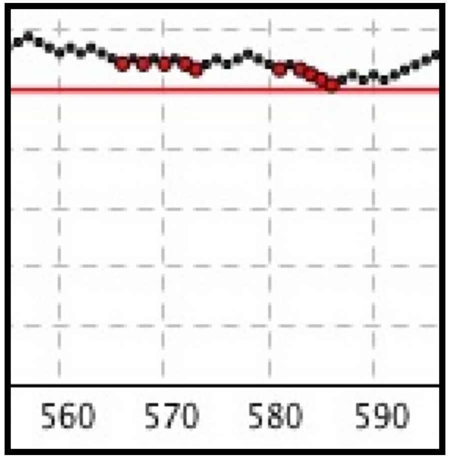
Die Zahlen mit einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren überwiegen.

# Die Vermutung von Pólya

1919 vermutete der ungarische Mathematiker George Pólya, dass die Zahlen mit ungeraden Anzahlen von Primfaktoren <u>immer</u> mehr sind als die mit einer geraden Anzahl.

Hier eine Computeruntersuchung bis 700 mit grafischer Darstellung.






Im Bereich von 580 bis 590 geht der Anteil der ungeraden Anzahlen von Primfaktoren stark an 0,5 heran, fällt aber nicht darunter.

# Ergebnisse

1919 Aufstellung der Vermutung durch Pólya.

1958 Der englische Mathematiker C.B. Haselgrove beweist, dass die Vermutung bei einer Obergrenze von weniger als $1{,}845 \cdot 10^{361}$ falsch sein muss.

1960 Der amerikanische Mathematiker/Informatiker R.Sherman Lehman gibt mit 906.180.359 eine konkrete Obergrenze an, für die die Pólya-Vermutung falsch ist.

1980 Der japanische Mathematiker Minoru Tanaka beweist, dass 906.150.257 die kleinste Obergrenze ist, für die die Pólya-Vermutung falsch ist.

Das kann heute mit einem Computer in wenigen Sekunden nachgerechnet werden.

# Große Zahlen in der Mathematik

**mit einer Geschichte/Bedeutung**

## 4. Eine Vermutung von Euler

Seit ca. 1600 jagen Mathematiker der Fermatschen Vermutung nach:

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für natürliche Zahlen x, y, z

- unendlich viele Lösungen, wenn $n = 2$ ist
- keine Lösungen, wenn $n \geq 3$ ist

Die Lösungen für $x^2 + y^2 = z^2$ nennt man pythagoreische Zahlentripel, das bekannteste ist $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$.

Ein Beweis für $n \geq 3$ konnte lange Zeit nicht gefunden werden.
Erst 1994 gelang das dem englischen Mathematiker Andrew Wiles.

Auf dem Weg dorthin wurden viele ähnliche Gleichungen/Probleme formuliert.

# Die Vermutung von Euler

1769 vermutete der europäische Mathematiker Leonard Euler, dass die Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ keine Lösungen mit nur natürlichen Zahlen besitzt.

Man konnte keine Lösung finden, auch nicht mit Hilfe von (frühen) Computern. Andererseits gelang aber auch kein Beweis, dass es keine Lösung gibt.

1988 stellte der amerikanische Mathematiker Noam Elkies eine Lösung vor:

$$18.796.760^4+15.365.639^4+2.682.440^4=20.615.673^4$$

Kurz darauf konnte er beweisen, dass Eulers Gleichung
$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ tatsächlich <u>unendlich viele</u> Lösungen besitzt.

Die kleinste Lösung (das kleinste w) ist

| | |
|---|---|
| $414560^4$ | **2953585740019204096000** |
| + $217519^4$ | **2238663363846304960321** |
| + $95800^4$ | **842290759696000000000** |
| $422481^4$ | **3185874984000794592032**1 |

Bei einer systematischen Suche mit dem Computer müsste man alle Möglichkeiten bis x = 414.560 durchprobieren.

Das sind ungefähr 12 Billiarden Möglichkeiten. Selbst ein schneller Computer müsste dafür mehrere hundert Jahre rechnen.

Programm öffnen

| x | y | z |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 2 |
| 4 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 4 |