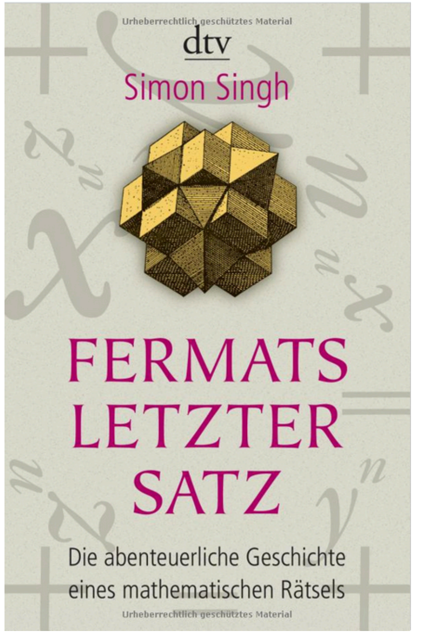
Nachträge

Große Zahlen?

Nachträge



Fermat und der Satz zu $x^n + y^n = z^n$

Literatur: Simon Singh, Fermats letzter Satz

Andrew Wiles ist 1953 geboren, war also 1994 zu alt für die Fieldsmedaille.

Er erhielt 2016 den Abelpreis für den Beweis des „Großen Fermatschen Satzes“

(Den Abelpreis gibt es seit 2003, benannt nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel. Die Vergabemodalitäten sind an den Nobelpreis angelehnt.)

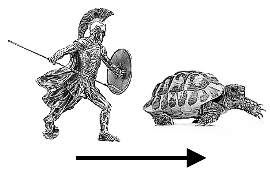
Wiles wurde 2000 zum englischen Ritter geschlagen, „Sir Andrew“.

Unendliche Summen

Zenon-Paradoxon

Achilles und eine Schildkröte machen ein Wettrennen. Achilles läuft 10 Mal schneller als die Schildkröte, daher räumt er ihr einen Vorsprung von 100 m ein.

Ist Achilles diesen Vorsprung von 100 m gelaufen, so ist die Schildkröte 10 m weitergekrochen.



Nun muss Achilles diese 10 m laufen.
In der Zeit kriecht die Schildkröte 1 m weiter.

Achilles 1 m, Schildkröte 10 cm, u.s.w.

Also kann Achilles die Schildkröte nie überholen!

Zenon-Paradoxon

Die Strecken des Achilles sind 100 m , 10 m , 1 m , 10 cm , … .

Nehmen wir an, dass Achilles die 100 m in 10 s läuft. Dann braucht er nacheinander 10 s, 1 s , $^1/_{10}$ s , …

$$10s+1s+\frac{1}{10}s+\frac{1}{100}s+\ldots\overset{?}{=}\text{"immer"}=\text{"unendlich lange"}$$

Es sind unendlich viele Teile, die man aneinander fügt.
Ist dann die Summe dieser Teile unendlich groß?

Geometrische Reihen

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

$$10 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{10}} 1 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{10}} \frac{1}{10} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{10}} \frac{1}{100} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{10}} \frac{1}{1000}$$

Das ist ein Beispiel für eine geometrische Reihe.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$ ist ein weiteres Beispiel

$$1 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$$

Allgemein:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\dots$$

Wobei q eine beliebige Zahl sein darf, typischer Weise aber ein Bruch zwischen 0 und 1 ist.
Für $q = 0$ und $q = 1$ ergeben sich Sonderfälle.

Geometrische Reihen

Eine Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \\ q \cdot s_n &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

$$s_n - q s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$s_n = n + 1 \quad \text{für } q = 1$$

Geometrische Reihen

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

für $q \neq 1$

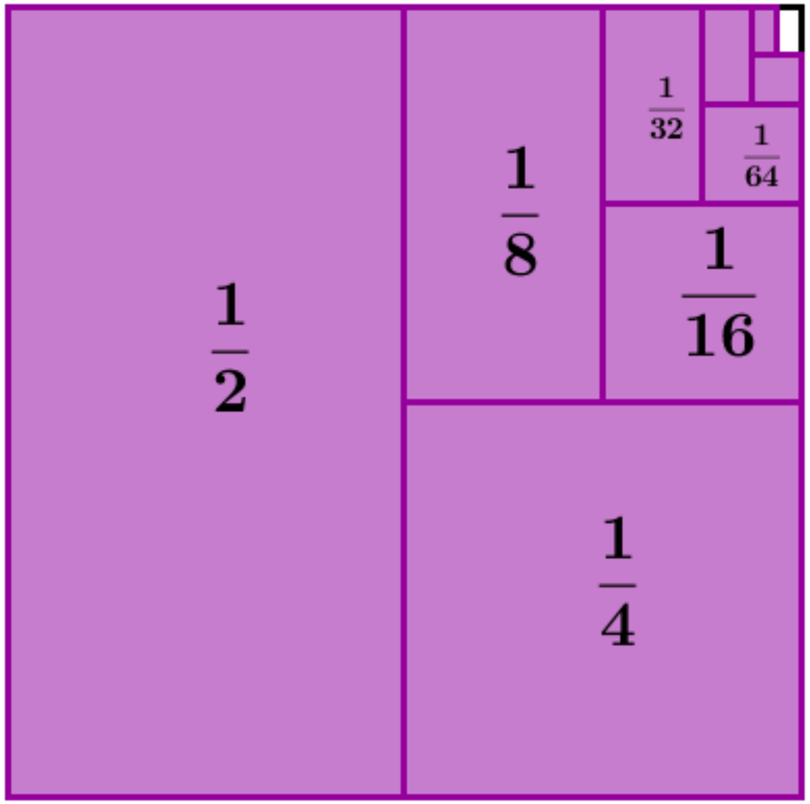
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} 0 & \text{wenn } -1 < q < 1 \text{ ist} \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \text{ oder } q < -1 \text{ ist} \end{cases}$$

Also gilt:

$$s_n \to \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{wenn } -1 < q < 1 \text{ ist} \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \text{ ist} \\ \pm\infty & \text{wenn } q < -1 \text{ ist} \end{cases}$$

Visualisierung einiger geometrischer Reihen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$



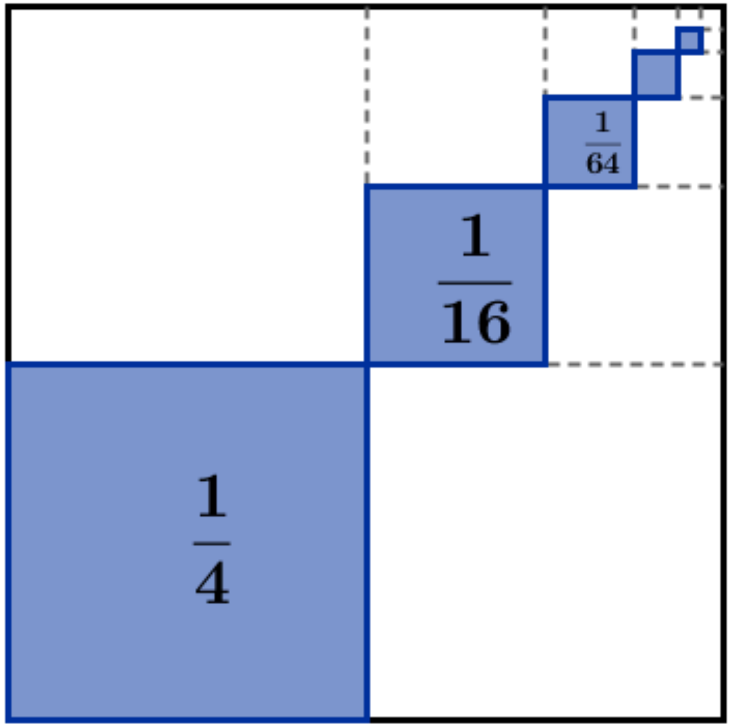
Also ist:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1+1=2$$

$$\frac{1}{1-q} \text{ für } q=\frac{1}{2} \quad \text{ergibt} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Visualisierung einiger geometrischer Reihen

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots+\frac{1}{4^n}+\dots=\frac{1}{3}$$



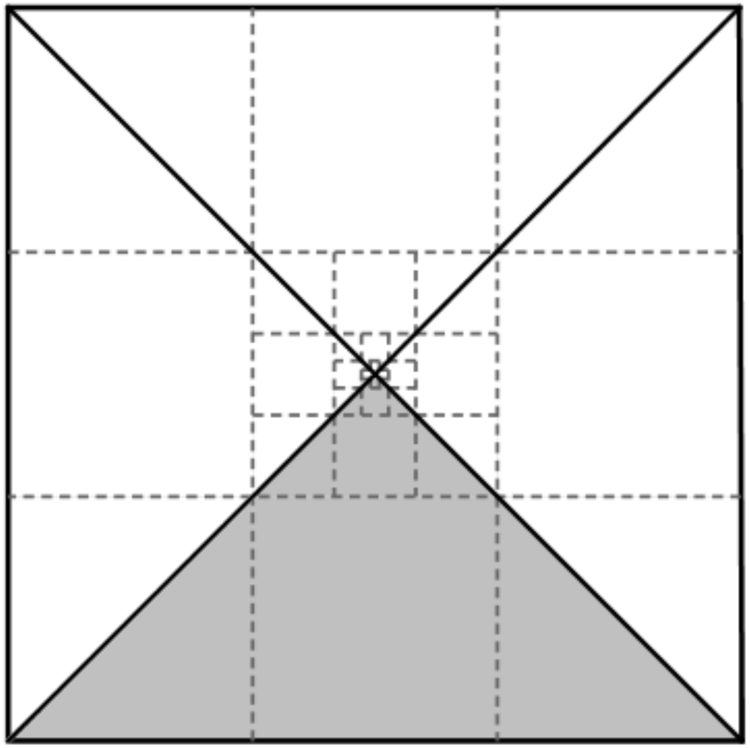
Also ist:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{4^4}+\dots=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1-q} \text{ für } q=\frac{1}{4} \text{ ergibt } \frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

Visualisierung einiger geometrischer Reihen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} = \frac{3}{4}$$



Also ist:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{3^5} + - \dots = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1-q} \text{ für } q = -\frac{1}{3} \text{ ergibt } \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Zenon-Paradoxon

Wir wissen:
Ist $0 < q < 1$, so gilt

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

Beim Lauf des Achilles war $q = \frac{1}{10}$ Also ist

$$10s + 1s + \frac{1}{10}s + \frac{1}{100}s + \ldots = 10s + \frac{1}{1-\frac{1}{10}}s = 10s + \frac{10}{9}s = 11\frac{1}{9}s$$

Also überholt Achilles die Schildkröte ~~nie~~. nicht in den ersten $11\,{}^{1}/_{9}$ Sekunden.

Periodische Dezimalzahlen

Die Zeit, die Achilles läuft, ist

$$10s+1s+\frac{1}{10}s+\frac{1}{100}s+\frac{1}{1000}s+\ldots$$

Schreibt man dieses als Dezimalzahl,

$$10s+1s+0{,}1s+0{,}01s+0{,}001s+\ldots=11{,}111\ldots\,s$$

so ist einem sofort klar, dass es eine endliche Zeitspanne ist und keine unendlich große.

Periodische Dezimalzahlen sind Summen mit unendlich vielen Summanden.

Periodische Dezimalzahlen

$$0,\overline{9} = 0,9999... \overset{?}{=} 1$$

$$0,9999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10.000} + ...$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... \right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \qquad \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1$$

Um Mehrdeutigkeiten auszuschließen, ist eine Darstellung mit Periode 9 in unserer Zahlschreibweise nicht zulässig.

$$\cancel{0,4\overline{9}} = 0,5 \qquad \cancel{1,23\overline{9}} = 1,24$$

Periodische Dezimalzahlen

Eine etwas einfachere Rechnung

$$
\begin{array}{r}
10x = 9{,}9999\ldots \\
x = 0{,}9999\ldots \\
\hline
9x = 9{,}0000\ldots
\end{array}
$$

Subtrahieren

Also

$$x = 1$$

Periodische Dezimalzahlen

$$0,\overline{9} = 1$$

Hier zwei Argumente für das „Bauchgefühl".

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\ldots$$

$$\cdot\, 3$$

$$\frac{3}{3} = 1 = 0,9999999999\ldots$$

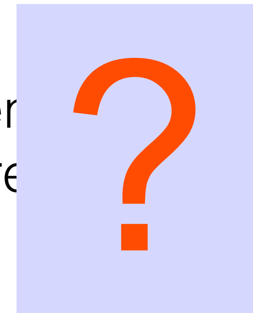
$$\begin{array}{rrrrr}
1,0 & 1,00 & 1,000 & 1,0000 & 1,0000000\ldots \\
-0,9 & -0,99 & -0,999 & -0,9999 & -0,9999999\ldots \\
=0,1 & =0,01 & =0,001 & =0,0001 & =0,\underbrace{0000000\ldots}_{\text{unendlich viele}}
\end{array}$$

Im Ergebnis kommt keine 1 mehr, da erst unendlich viele Nullen kommen.

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots=\frac{1}{1-q} \quad , \quad 0<q<1$$

Bei der geometrischen Reihe erhält man einen endlichen Wert, weil die einzelnen Summanden immer kleiner werden.

Ist das immer so?

Das heißt:
Werden die einzelner  den (irgendwie)
kleiner, so ergibt dere mation einen
endlichen Wert.

Harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \quad \rightarrow \infty$$

Die harmonische Reihe ist das bekannteste Gegenbeispiel, denn diese Summe strebt gegen Unendlich.

n	1/n	Summe
1	1	1
2	0,5	1,5
3	0,3333	1,83333
4	0,25	2,08333
5	0,2	2,28333
6	0,1667	2,45000
7	0,1429	2,59286
8	0,125	2,71786
9	0,1111	2,82897
10	0,1	2,92897

n	1/n	Summe
11	0,0909	3,01988
12	0,0833	3,10321
13	0,0769	3,18013
14	0,0714	3,25156
15	0,0667	3,31823
16	0,0625	3,38073
17	0,0588	3,43955
18	0,0556	3,49511
19	0,0526	3,54774
20	0,05	3,59774

Harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

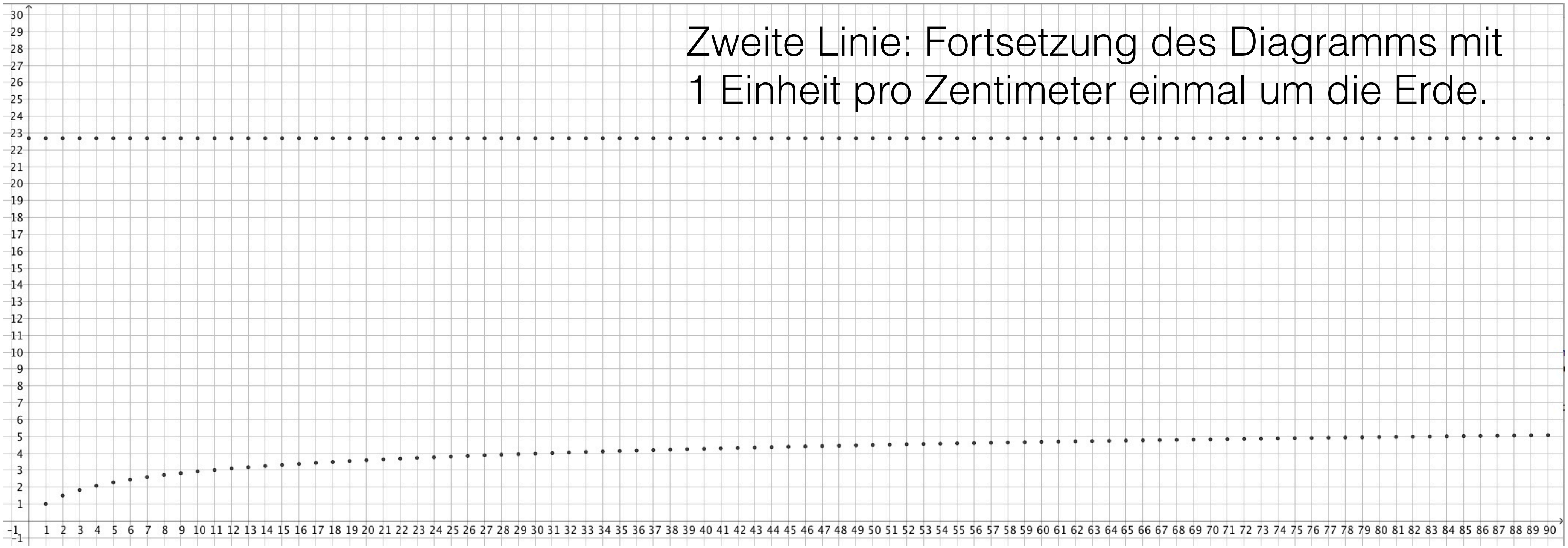
n	Summe bis $\frac{1}{n}$
7223	9,462311
7224	9,462449
7225	9,462587
7226	9,462726
7227	9,462864
7228	9,463002
7229	9,463141

Unveränderte Stellen sind keine Garantie für einen Grenzwert.

Harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

Grafische Darstellung



Harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \rightarrow \infty$$

Der Beweis

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\underset{2^2}{4}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{\underset{2^3}{8}}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{\underset{2^4}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\boxed{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\boxed{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{32}+\ldots$$

$$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad =\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad =\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Die verkleinerte Reihe ergibt unendlich oft den Teilwert $^1/_2$.

Also ist sie unendlich groß.

Die harmonische Reihe ist sogar noch größer, also erst recht unendlich groß.

Harmonische Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \to \infty$$

Ein zweiter Beweis (indirekt)

Angenommen, die Summe ergibt einen endlichen Wert S:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}S=\quad+\frac{1}{2}\quad+\frac{1}{4}\quad+\frac{1}{6}\quad+\frac{1}{8}\quad+\frac{1}{10}\quad+\frac{1}{12}\quad+\frac{1}{14}\ldots$$

$$\frac{1}{2}S=1\quad+\frac{1}{3}\quad+\frac{1}{5}\quad+\frac{1}{7}\quad+\frac{1}{9}\quad+\frac{1}{11}\quad+\frac{1}{13}\ldots$$

Die blaue Hälfte ist offensichtlich größer als die rote, was aber Unsinn ist.

$$\frac{1}{2}S<\frac{1}{2}S$$

Die Annahme, dass S ein endlicher Wert ist, ist falsch.

Variationen zur Harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \longrightarrow \infty$$

Wir addieren offensichtlich zu viele Zahlen. Also lassen wir welche weg.

$$\cancel{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}+\frac{1}{8}+\cancel{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}}+\frac{1}{12}+\cancel{\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}+\frac{1}{16}+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\right) \longrightarrow \infty$$

Ein „gleichmäßiges Ausdünnen“ der Summe führt nicht dazu, dass sie gegen einen Grenzwert strebt.

Variationen zur Harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \to \infty$$

Wir addieren offensichtlich zu viele Zahlen. Also lassen wir welche weg.

$$1+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{8}}+\frac{1}{9}+\cancel{\frac{1}{10}}+\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{12}}+\cancel{\frac{1}{13}}+\cancel{\frac{1}{14}}+\cancel{\frac{1}{15}}+\frac{1}{16}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots \to \frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}645$$

1735 Euler

Die Quadratzahlen sind offenbar „dünn genug verteilt“.

Variationen zur Harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \longrightarrow \infty$$

Wir addieren offensichtlich zu viele Zahlen. Also lassen wir welche weg.

$$\cancel{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}+\cancel{\frac{1}{6}}+\frac{1}{7}+\cancel{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}+\frac{1}{11}+\cancel{\frac{1}{12}}+\frac{1}{13}+\cancel{\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots \longrightarrow \infty$$

1737 Euler

Die Primzahlen liegen dichter als die Quadratzahlen
und liefern somit zu viele Summanden.

Variationen zur Harmonischen Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots \longrightarrow \infty$$

Die Nenner werden nicht schnell genug groß, so dass die Summanden nicht schnell genug klein werden.

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots$$

Ist $s>1$, so wachsen die Nenner schneller.

Für jedes $s>1$ hat die Reihe einen endlichen Wert, z.B. für $s = 2$.

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots$$

Das ist die von Euler eingeführte und von Bernhard Riemann weiter untersuchte Zeta-Funktion.

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{6^{\frac{3}{2}}}+\ldots\approx 2{,}6124$$

alternierende Reihen

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - + \ldots$$

und $$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 \ldots$$

dann besitzt die Reihe immer einen Grenzwert (Leibniz).

Die Summanden müssen immer kleiner werden,
es ist aber egal, nach welcher Gesetzmäßigkeit.

alternierende Reihen

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - + \ldots$$

und $$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 \ldots$$

Beispiel:

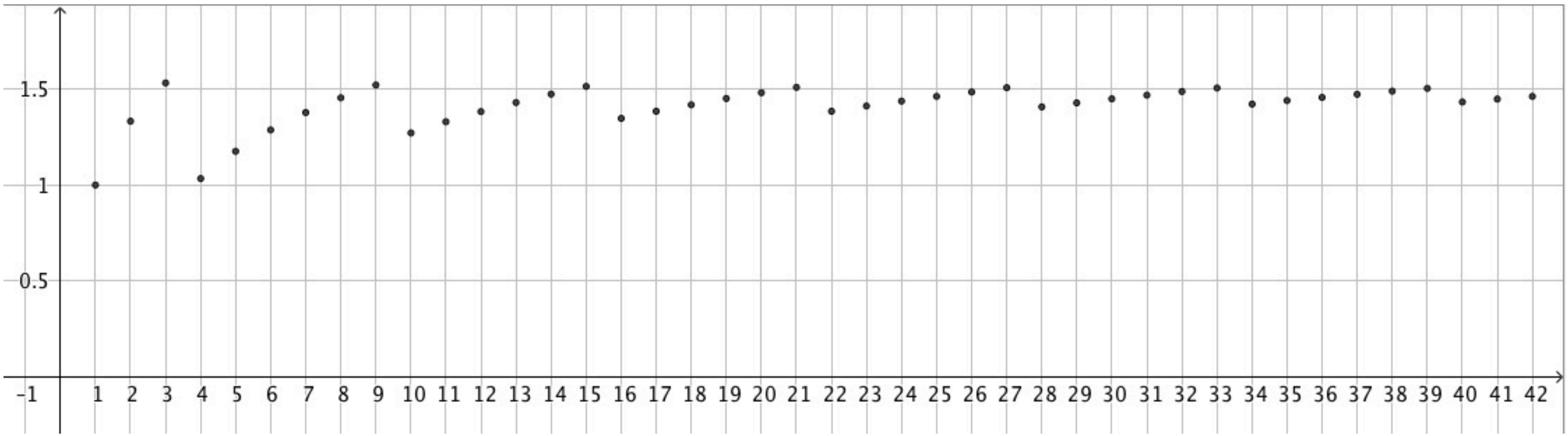
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + - \ldots = \ln 2 \approx 0,6931\ldots$$

Aber ACHTUNG:
Der Grenzwert ist an eine Reihenfolge der Summanden gebunden. Die einzelnen Zahlen (mit Rechenzeichen) dürfen <u>nicht vertauscht</u> werden.

alternierende Reihen

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\ldots$$

so umordnen, dass der Grenzwert 1,5 ist.



$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{6}+\frac{1}{27}+\ldots$$