Der Goldene Schnitt als „stetige Teilung“

Wiederholung

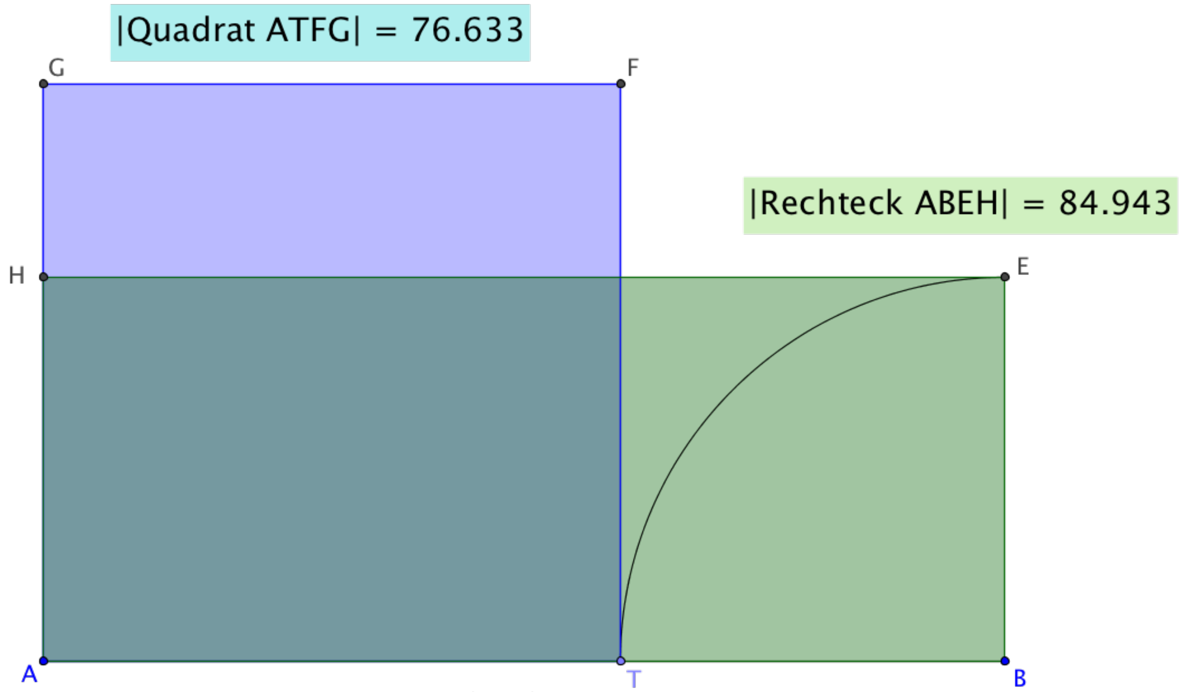
Definition nach Euklid:

Das Quadrat aus dem Major soll flächengleich sein zum Rechteck aus der ganzen Strecke und dem Minor.

$$(s\cdot\varphi)^2 = s\cdot(s-s\cdot\varphi)$$

$$s^2\cdot\varphi^2 = s^2 - s^2\cdot\varphi = s^2\cdot(1-\varphi)$$

$$\varphi^2 = 1-\varphi$$



$$Teilverhältnis\ \frac{|AT|}{|AB|} = 0.6$$

Wiederholung

$$\varphi^2 = 1 - \varphi$$

Für das Teilverhältnis φ gibt es Näherungsbrüche

$$\varphi \approx \frac{2}{3} \approx 0{,}667 \qquad \varphi \approx \frac{3}{5} = 0{,}600 \qquad \varphi \approx \frac{5}{8} = 0{,}625$$

jedoch erfüllt keiner **genau** die geforderte Bedingung von Euklid.

Der genaue Wert ist (Lösung der quadratischen Gleichung)

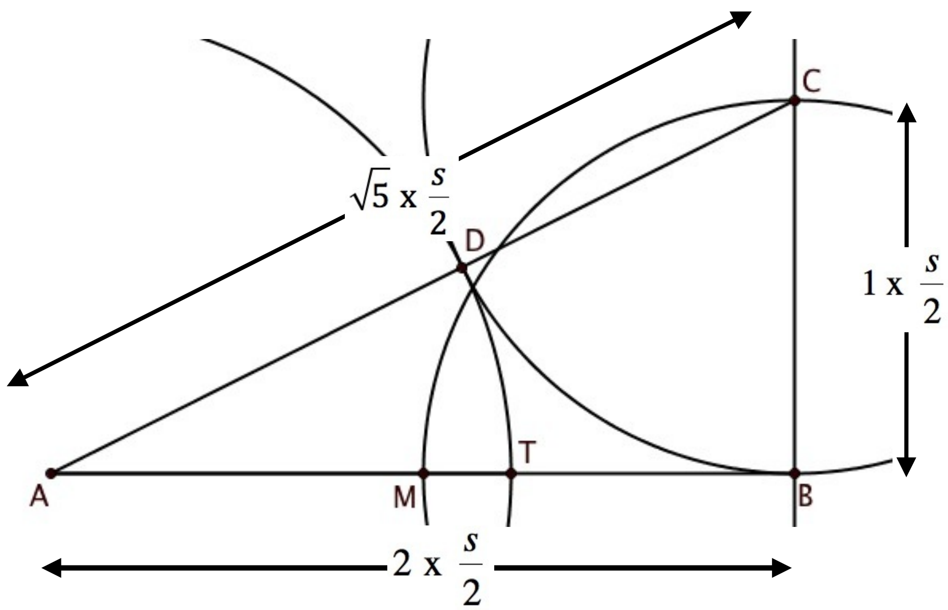
$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618033988749...$$

Wiederholung

Eine Strecke im Goldenen Schnitt zu teilen lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

$$s \cdot \varphi = s\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{s}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{s}{2}\sqrt{5} - \frac{s}{2}$$

D.h. man muss zu s/2 die $\sqrt{5}$ -fache Länge konstruieren und davon s/2 abziehen.



Wiederholung

Praktische Anwendung

Um eine Strecke im goldenen Schnitt zu teilen

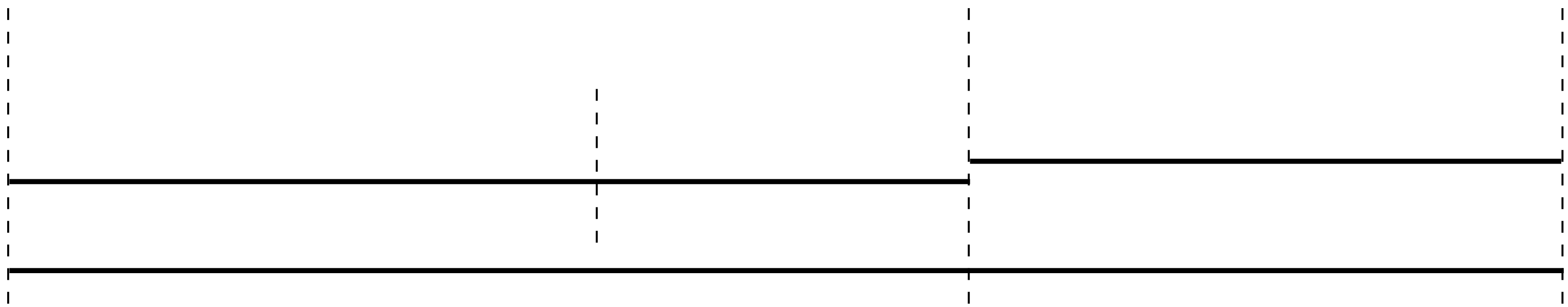
- misst man deren Länge
- multipliziert die Länge mit $\varphi \approx 0{,}618$
- erhält so die Länge des Majors für den goldenen Schnitt

$$L = 64{,}7cm$$

$$64{,}7cm \cdot 0{,}618 \approx 39{,}9cm$$

Stetige Teilung

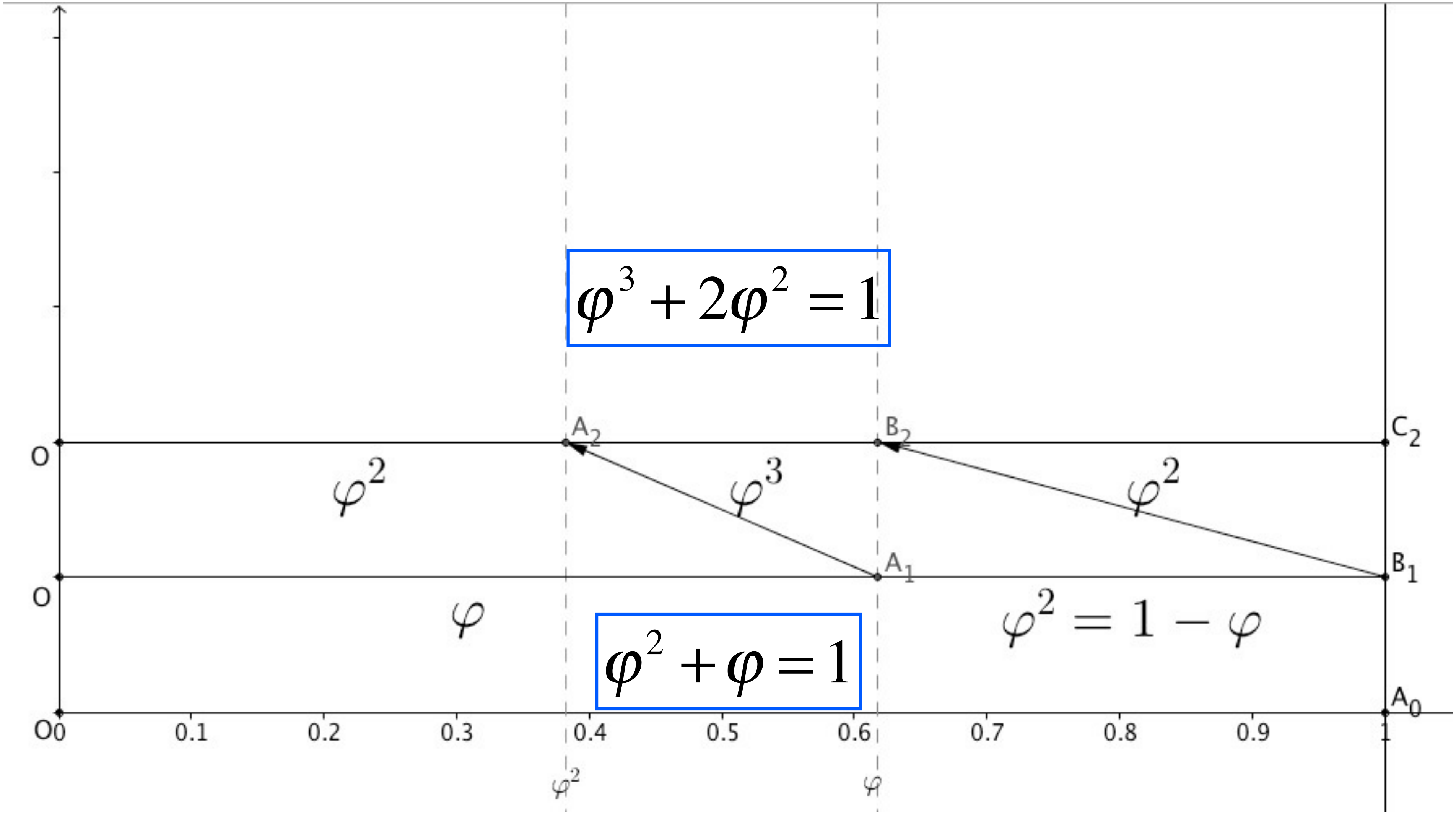
Eine Strecke s wird im Goldenen Schnitt geteilt.
Man erhält den Major $M = s\varphi$ und den Minor (als Rest) $m = s(1- \varphi)$



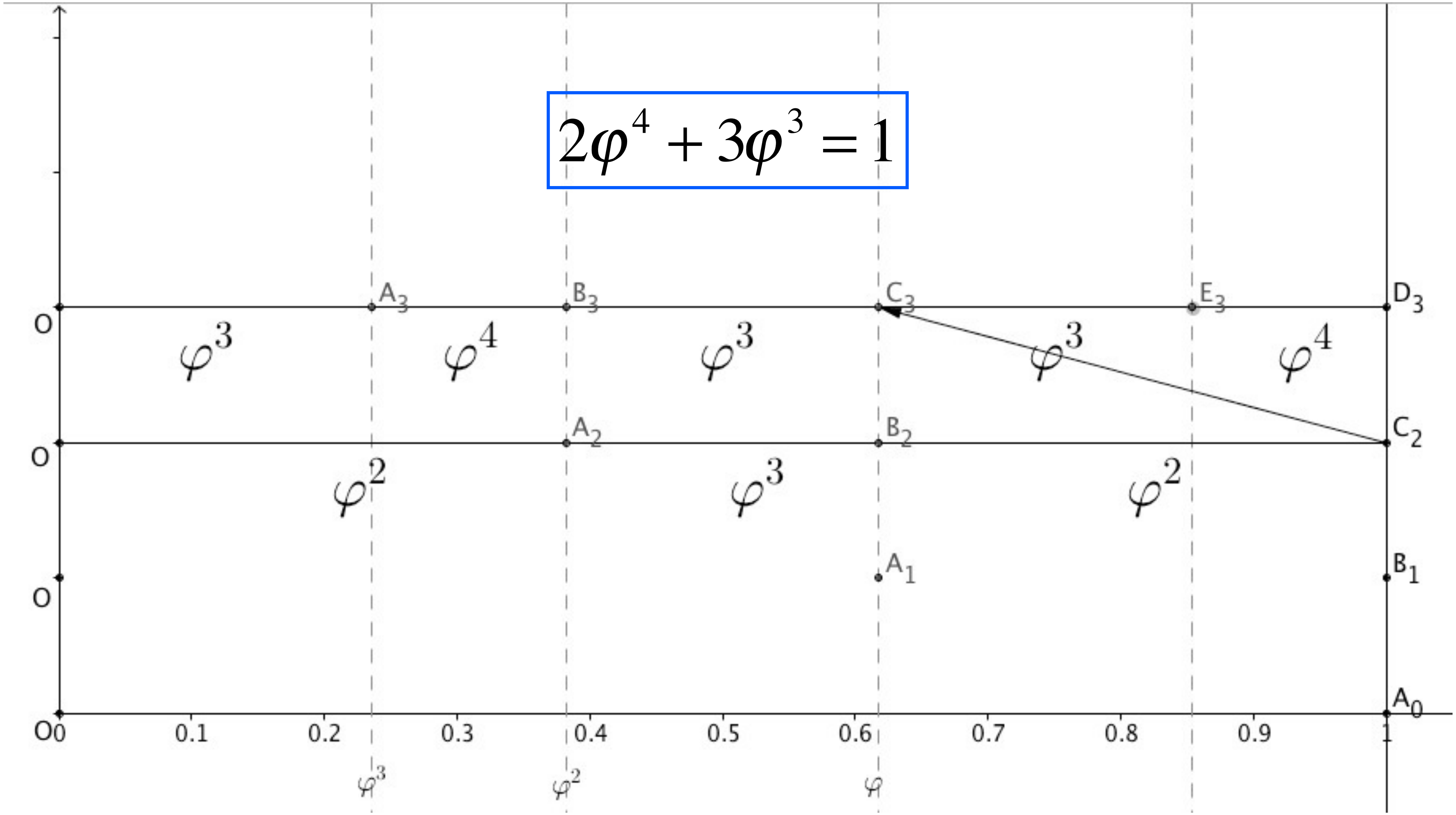
Nun möchte man den Major erneut im Goldenen Schnitt teilen.
Dazu muss man seine Länge $M = s\varphi$ mit φ multiplizieren zu $M\varphi = s\varphi\varphi = s\varphi^2$.

Diese Länge hat man bereits, denn nach Euklid ist $\varphi^2 = 1- \varphi$.
Für die Teilung des Majors im Goldenen Schnitt dient der Minor als „Messlatte".

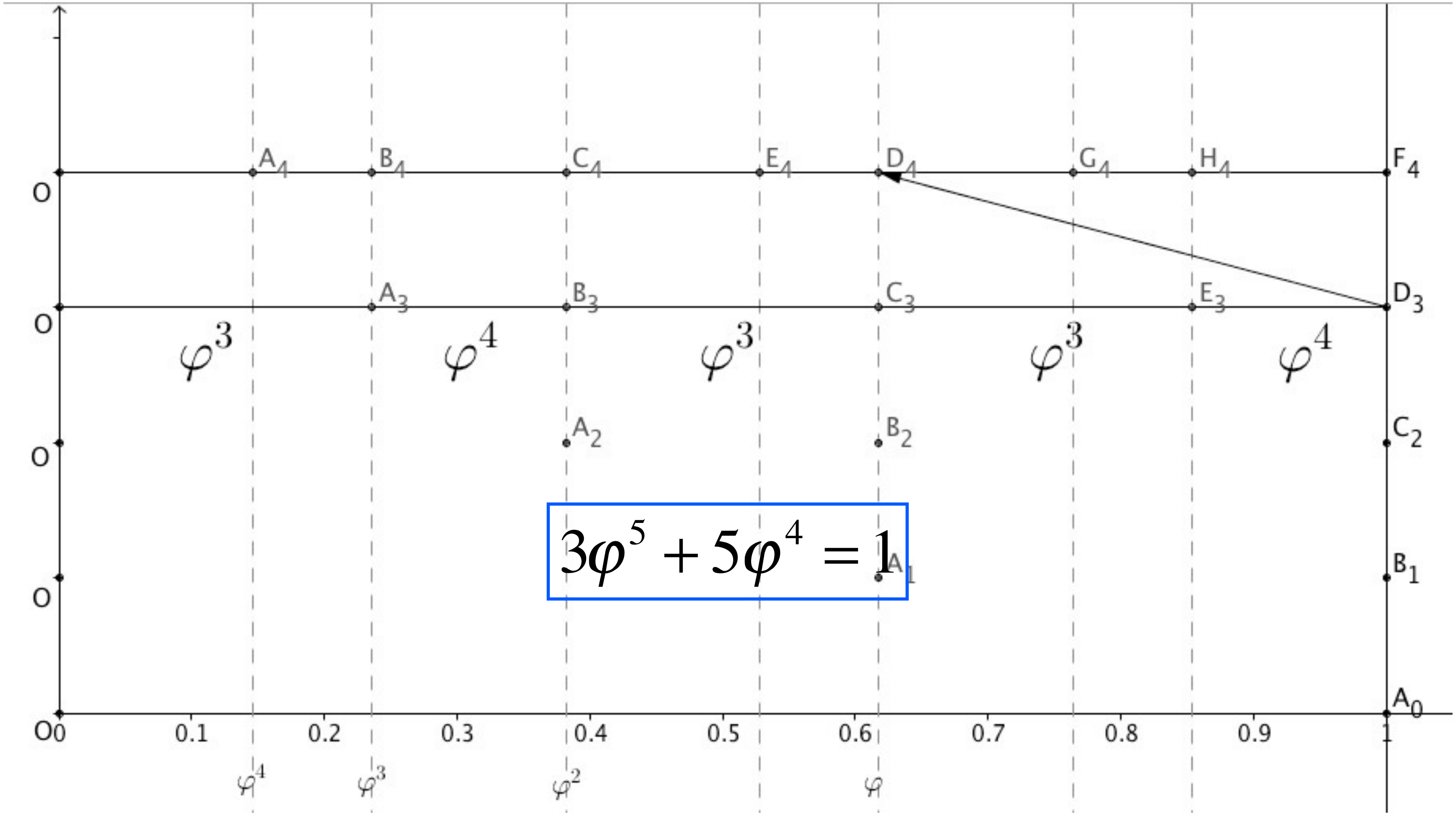
Stetige Teilung



Stetige Teilung



Stetige Teilung



$$\boxed{3\varphi^5 + 5\varphi^4 = 1}$$

Stetige Teilung

Zusammenfassung:

$$\boxed{\varphi^2 + \varphi = 1}$$

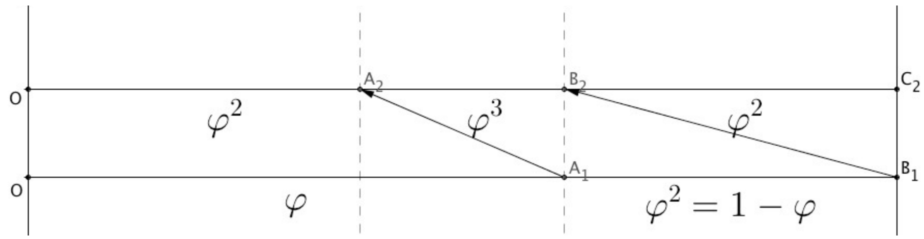
$$\boxed{\varphi^3 + 2\varphi^2 = 1}$$

$$\boxed{2\varphi^4 + 3\varphi^3 = 1}$$

$$\boxed{3\varphi^5 + 5\varphi^4 = 1}$$

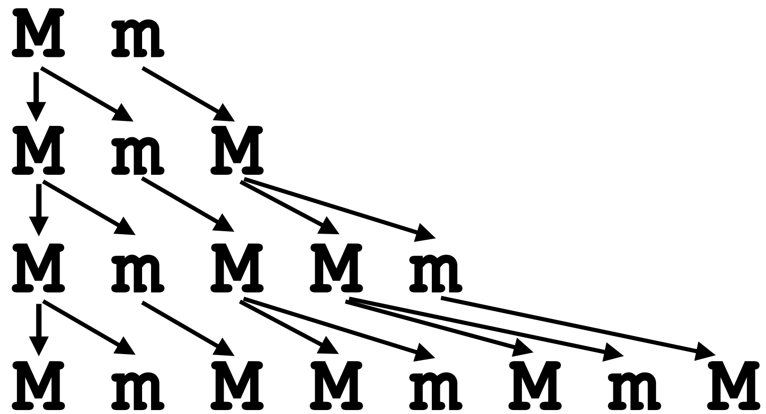
Vermutung:

$$\boxed{5\varphi^6 + 8\varphi^5 = 1}$$



<u>Das Prinzip der stetigen Teilung</u>

Jeder Major wird zerlegt in einen neuen (kleineren) Major und einen neuen Minor und jeder Minor bleibt unzerteilt, wird aber zum neuen Major



Wiederholung

Die Goldene Verlängerung

Das umgekehrte Problem: Man kennt den Major M und sucht die Gesamtstrecke s.

$$M = s \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad s = M \cdot \frac{1}{\varphi} = M \cdot \Phi$$

$$\varphi^2 = 1 - \varphi \mid :\varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi} - 1 \mid +1$$

$$1 + \varphi = \frac{1}{\varphi} = \Phi$$

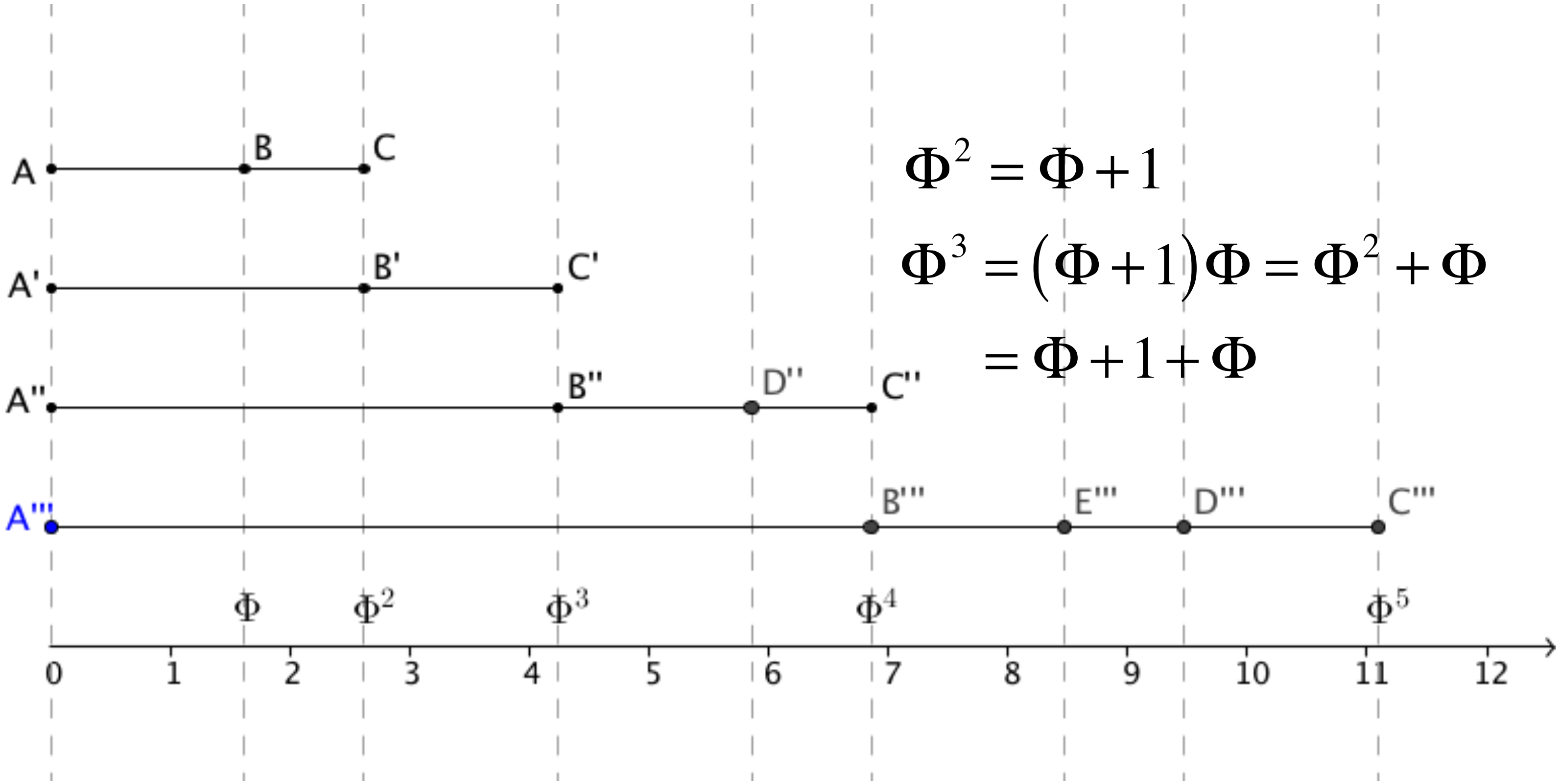
$$\Phi \approx 1{,}618$$

Weiterhin gilt nun:

$$\Phi = 1 + \varphi \mid \cdot \Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + \varphi \cdot \Phi = \Phi + 1$$

Stetige Verlängerung



$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = (\Phi + 1)\Phi = \Phi^2 + \Phi$$
$$= \Phi + 1 + \Phi$$

$$\Phi^4 = (\Phi + 1 + \Phi)\Phi = \Phi^2 + \Phi + \Phi^2$$
$$= \Phi + 1 + \Phi + \Phi + 1$$

$$\Phi^5 = (\Phi + 1 + \Phi + \Phi + 1)\Phi$$
$$= \Phi + 1 + \Phi + \Phi + 1 + \Phi + 1 + \Phi$$

Stetige Verlängerung

Zusammenfassung:

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi + 1}$$

$$\boxed{\Phi^3 = 2\Phi + 1}$$

$$\boxed{\Phi^4 = 3\Phi + 2}$$

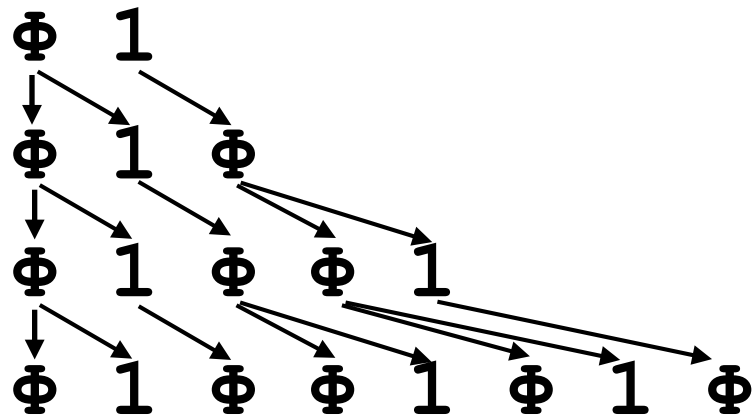
$$\boxed{\Phi^5 = 5\Phi + 3}$$

Vermutung:

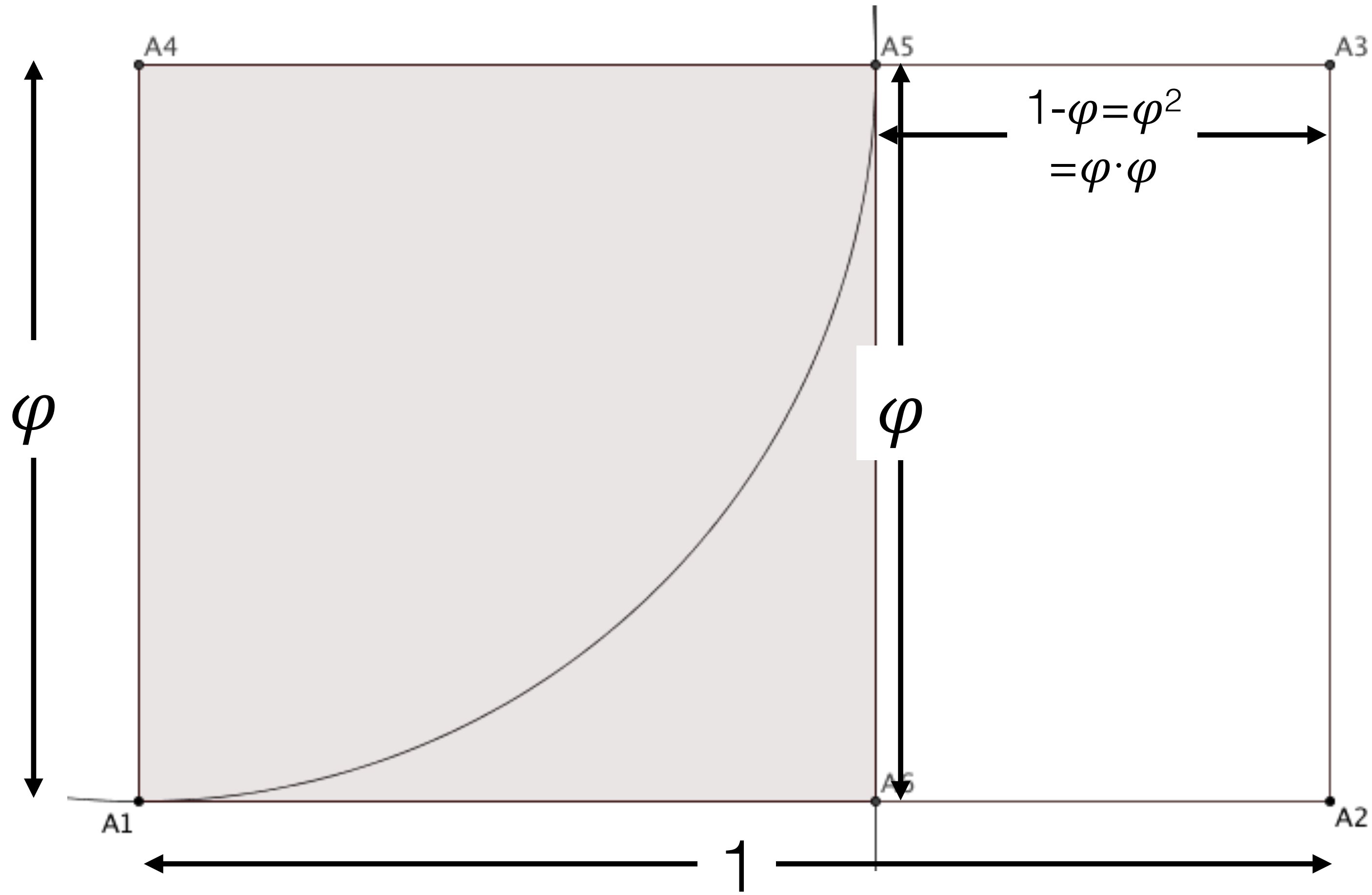
$$\boxed{\Phi^6 = 8\Phi + 5}$$

<u>Das Prinzip der stetigen Verlängerung</u>

Jeder längere Teil Φ wird verlängert zu einem neuen Teil Φ und einer 1 und jeder kürzere Teil 1 wird zum neuen längeren Teil Φ.



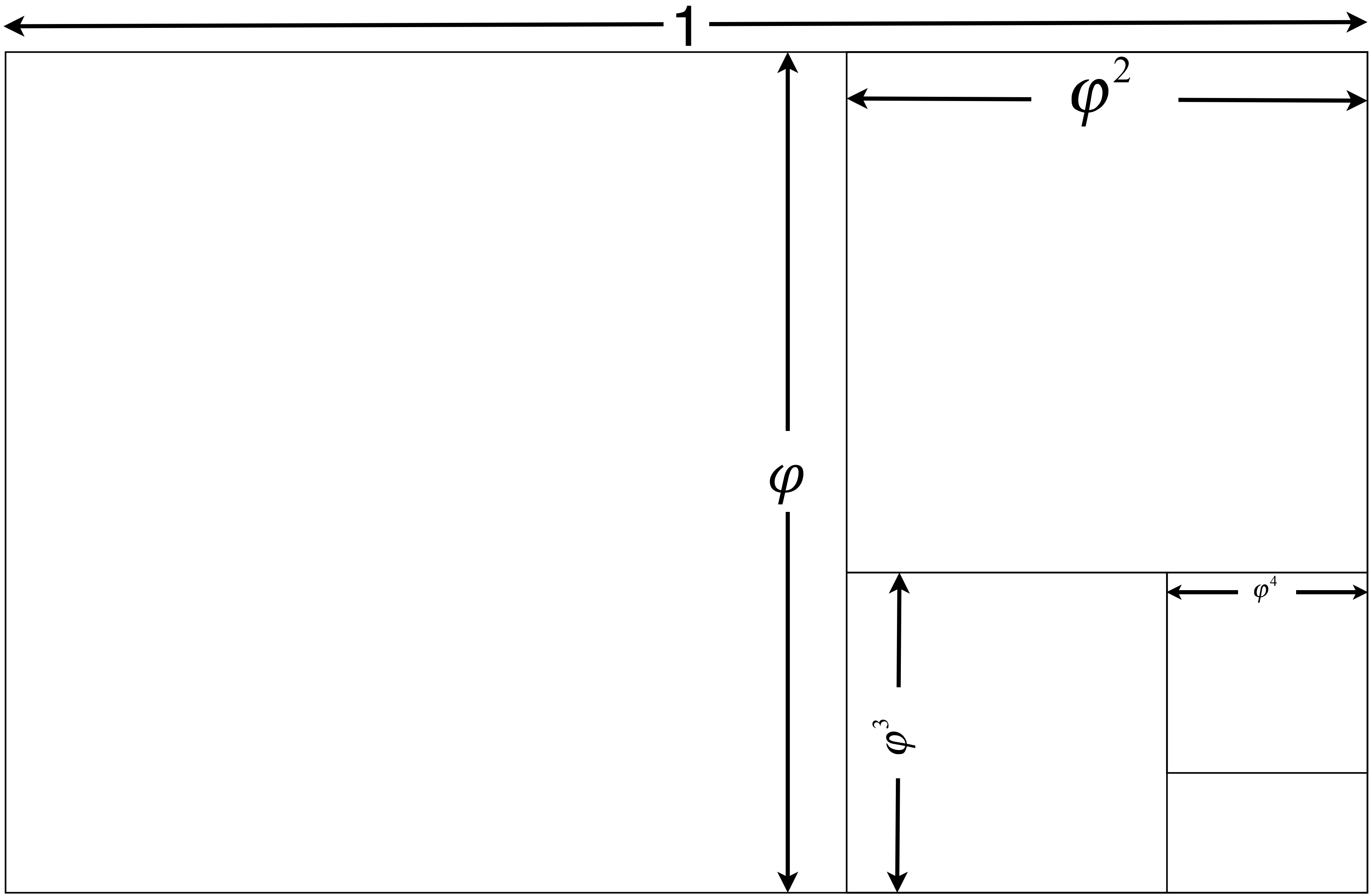
Das Goldene Rechteck



Schneidet man von einem goldenen Rechteck ein Quadrat ab, so ist das Restrechteck wieder ein goldenes Rechteck, verkleinert um den Faktor φ.

2 Experimentier-dateien

Das Goldene Rechteck



Das Goldene Rechteck

Goldenes Rechteck
Teilt man ein Quadrat ab, so entsteht ein Rechteck, das ähnlich ist zum Ausgangsrechteck.

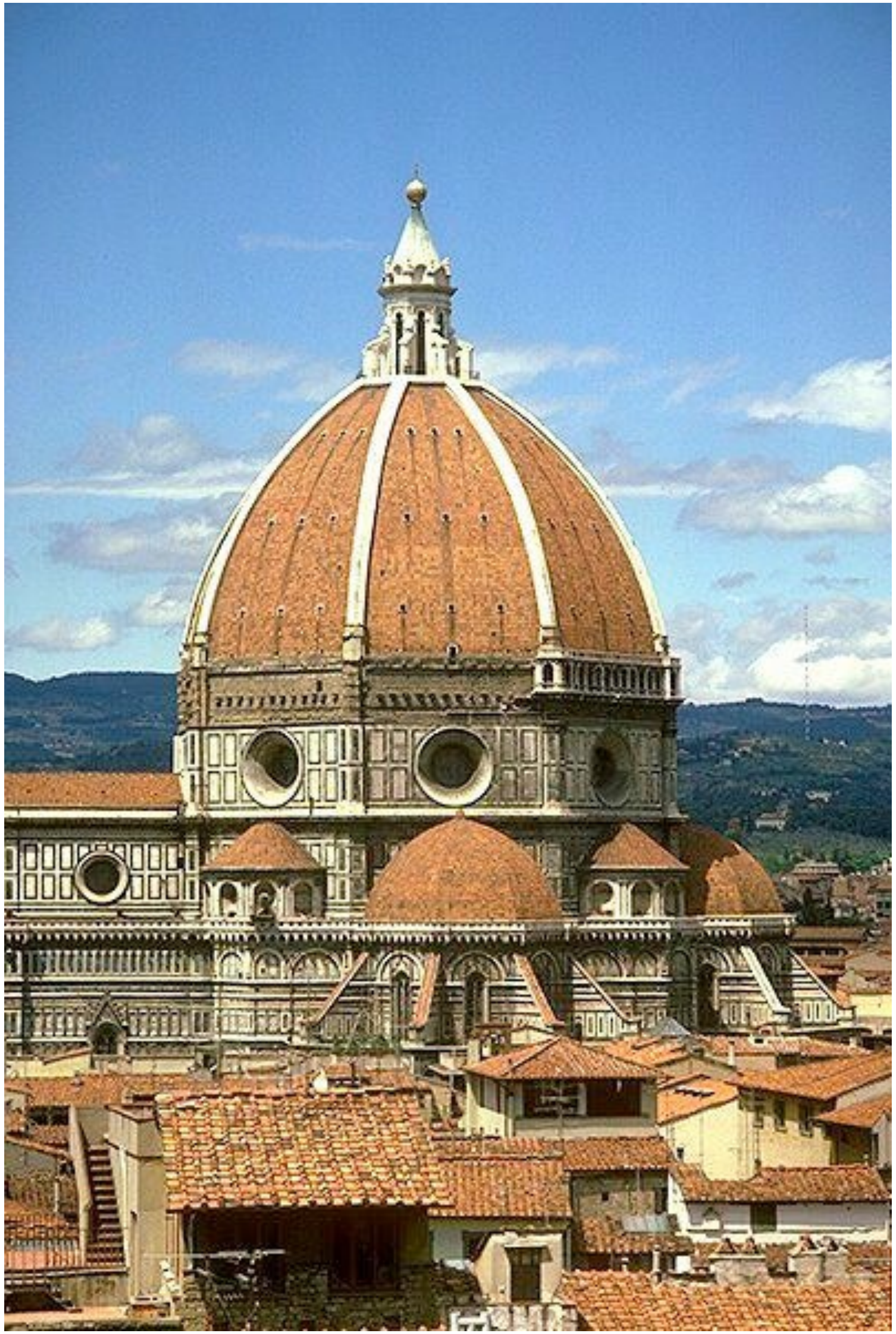
DIN A *n* Rechteck
Halbiert man die lange Seite des Rechtecks, so entstehen zwei Rechtecke, die ähnlich sind zum Ausgangsrechteck.

Dom in Florenz

goldenes R.

3:5

5:8



Kettenbruchentwicklung

$$\varphi^2 = 1 - \varphi \quad | +\varphi$$

$$\varphi + \varphi^2 = 1 \quad | \ \varphi \text{ ausklammern}$$

$$\varphi(1+\varphi) = 1 \quad | \ :(1+\varphi)$$

$$\varphi = \frac{1}{1+\varphi} \quad | \text{ ineinander einsetzen}$$

$$\varphi = \frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{1+\varphi}}} \quad | \text{ ineinander einsetzen}$$

$$\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{1+\varphi}}}}$$

$$\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}}}$$

Kettenbruchentwicklung

$$\varphi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}}}}}$$

Zu einem unendlichen Kettenbruch erhält man Näherungszahlen, wenn man ihn vor einem +-Zeichen abbricht.

$$\varphi_0 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi_1 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\varphi_2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \frac{2}{3} = 0{,}6666...$$

$$\varphi_3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{1}{1+\varphi_2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Kettenbruchentwicklung

$$\varphi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}}}}}$$

$$\varphi_3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{1}{1+\varphi_2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{1+\varphi_3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$\varphi_5 = \frac{8}{13} = 0{,}61538... \qquad \varphi_6 = \frac{13}{21} = 0{,}61904... \qquad \varphi_7 = \frac{21}{34} = 0{,}61764...$$

Rechenprinzip

$$\varphi_n = \frac{a}{b} \qquad \varphi_{n+1} = \frac{1}{1+\varphi_n} = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{b}} = \cfrac{1}{\cfrac{b}{b}+\cfrac{a}{b}} = \frac{b}{a+b}$$

Kettenbruchentwicklung

$$\varphi_0 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\varphi_2 = \frac{2}{3} = 0{,}666...$$

$$\varphi_3 = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\varphi_4 = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$\varphi_5 = \frac{8}{13} = 0{,}61538...$$

$$\varphi_6 = \frac{13}{21} = 0{,}61904...$$

$$\varphi_7 = \frac{21}{34} = 0{,}61764...$$

$$\varphi_8 = \frac{34}{55} = 0{,}61818...$$