Dimension

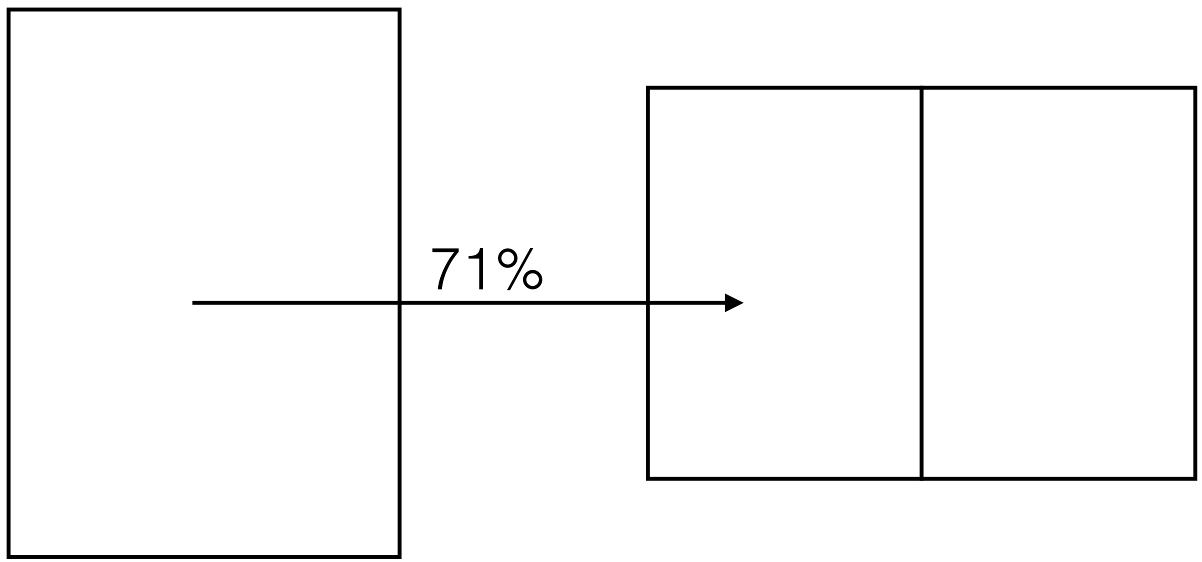
Vergrößern ist dimensionsabhängig

Mutter zum Sohn:
„Nimm mal den Topf, der ist doppelt so groß“

Architekt zum Kunden:
„Das Schwimmbecken wird so aussehen wie das hier, aber wie verabredet wird Ihres doppelt so groß.“

Verkleinern ist dimensionsabhängig

Das tägliche Wunder im Büro
Will man zwei DIN A4 Blätter auf eines kopieren, so ist der Verkleinerungsfaktor 71%. Trotzdem verringert sich der Papierverbrauch auf 50%



Einheiten umrechnen ist dimensionsabhängig

$$1\ m = 100\ cm$$

$$1\ m^2 = 10.000\ cm^2$$

$$1\ m^3 = 1.000.000\ cm^3$$

$$1\ foot = 12\ inch$$

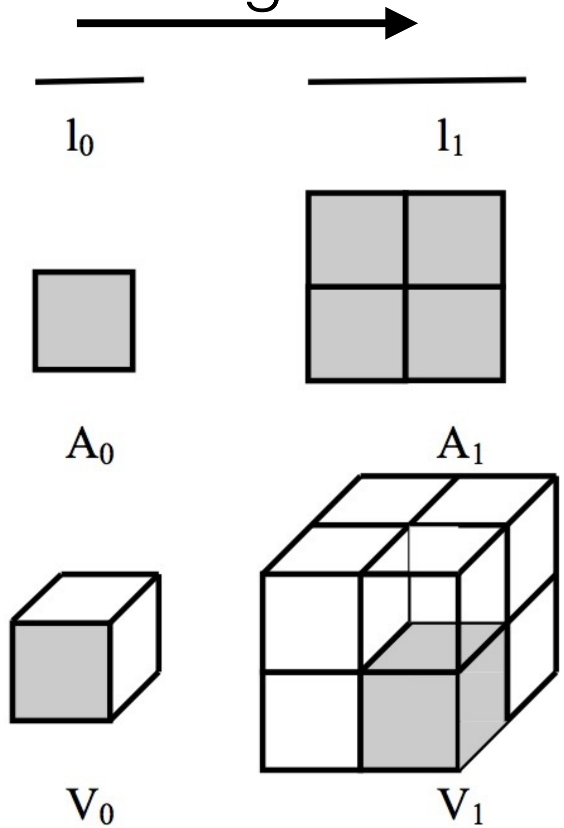
$$1\ sqfoot = 144\ sqinch$$

Die Dimensionen

allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} $\cdot$ alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$

Skalierungsfaktor: $s = 2$



1. Dimension: Linie — $l_1 = 2 \cdot l_0$

2. Dimension Fläche — $A_1 = 4 \cdot A_0$, $A_1 = 2^2 \cdot A_0$

3. Dimension Körper — $V_1 = 8 \cdot V_0$, $V_1 = 2^3 \cdot V_0$

Die Dimensionen

allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} $\cdot$ alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$

Das tägliche Wunder im Büro
Skalierungsfaktor: s = 71% = 0,71

Der Papierverbrauch betrifft die zweidimensionale Fläche

$$A_{neu} \approx 0{,}71^2 A_{alt} \approx 0{,}5 A_{alt}$$

Anwendung in der Natur

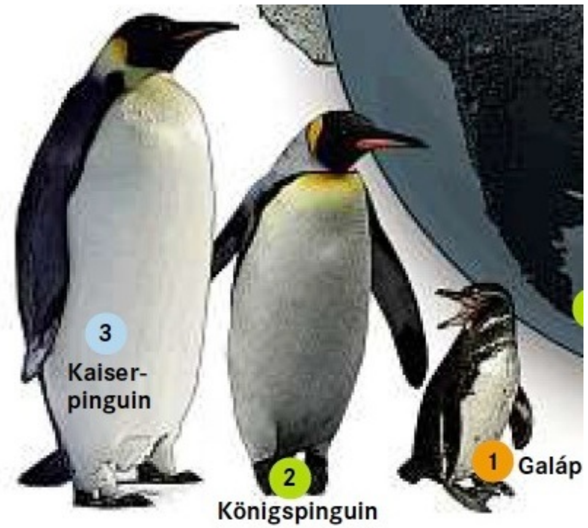
Die Bergmannsche Regel

Kleine Pinguine leben näher am Äquator.
Am Pol findet man große Pinguine

Die Dimensionen

allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} · alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$



Königspinguin: ca. 1 m groß
Kaiserpinguin: ca. 1,30 m groß
Skalierungsfaktor: s = 1,3

$$A_{Kaiser} = 1{,}3^2 A_{König} \approx 1{,}7 A_{König}$$

$$V_{Kaiser} = 1{,}3^3 V_{König} \approx 2{,}2 V_{König}$$

Vom Königs- zum Kaiserpinguin nimmt das (wärme- speichernde) Volumen um 120% zu, während die Oberfläche (Wärmeverlust) nur um 70% zunimmt.

Alltagserfahrung bei Menschen

Kleine Kinder müssen sorgfältiger vor Kälte geschützt werden.

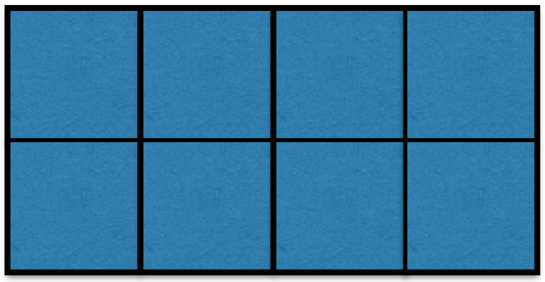
Durchschnittliche Körpergröße
Island: Mann 182,1 Frau 168,9
Italien: Mann 174,4 Frau 161,8

Messen ist das Vergleichen mit einer Normgröße

Länge: Normgrößen sind Meter, Kilometer, Zentimeter

Fläche: Normgrößen sind Quadratmeter, Quadratzentimeter

Volumen: Normgrößen sind Kubikmeter, Liter



In diese Fläche passen 2x4=8 Quadratzentimeter, also ist die Fläche 8 cm^2 groß.

Messen in der falschen Dimension

Wenn das zu messende Objekt und der Vergleichsmaßstab nicht von derselben Dimension sind, geschehen folgende Fehler

Das Vergleichsmaß hat eine geringere Dimension als das Objekt
—> Das Objekt erscheint unendlich groß

Das Vergleichsmaß hat eine höhere Dimension als das Objekt
—> Das Objekt hat die Größe Null

Messen in der falschen Dimension

Die Umkehrung ist nicht logisch zwingend. Sie kann aber ein Lösungsansatz sein.

Das Objekt erscheint unendlich groß
—> Das Vergleichsmaß hat eine geringere Dimension als das Objekt oder
Das Objekt hat eine größere Dimension als beim Messen angenommen.

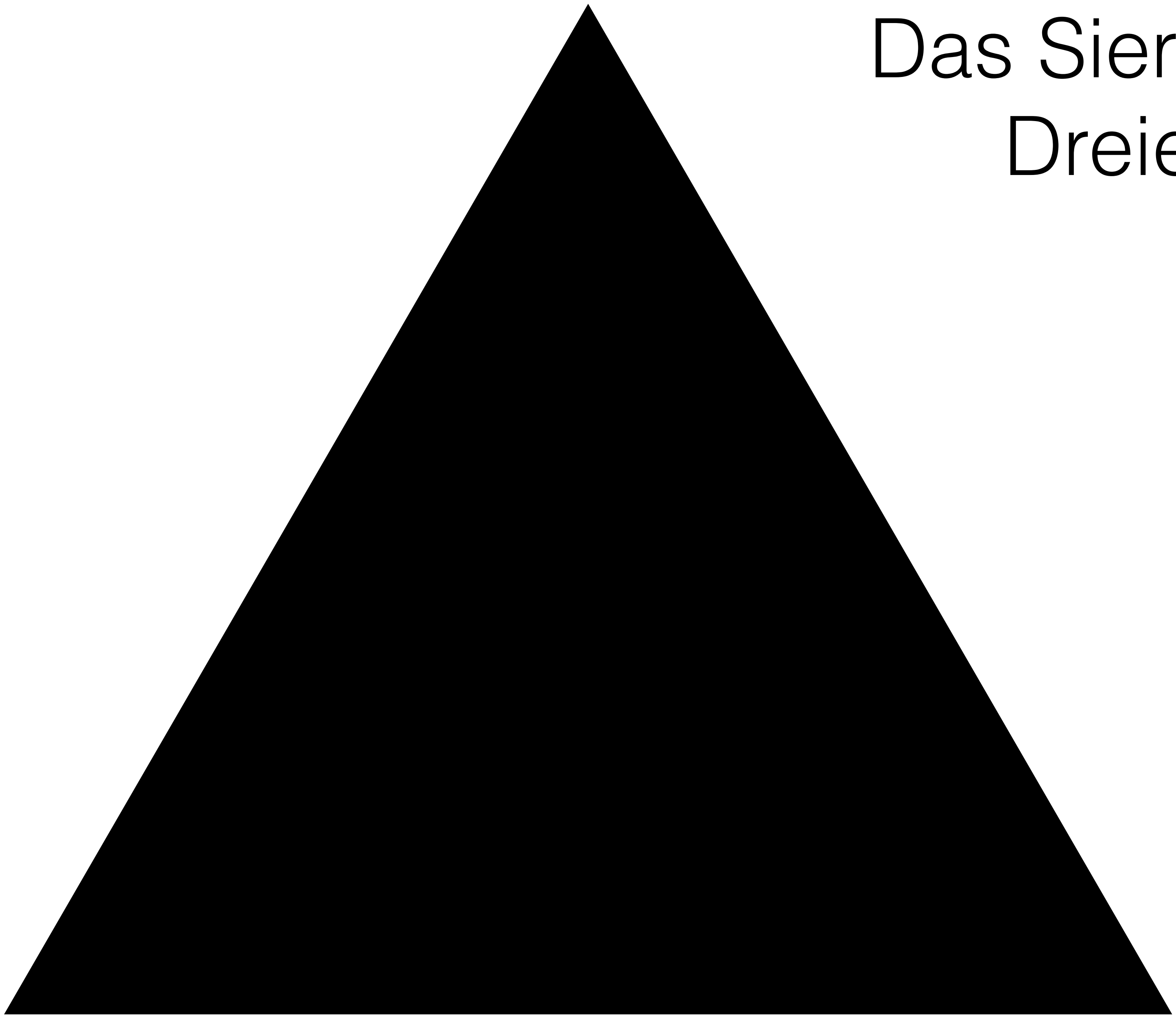
Das Objekt hat die Größe Null
—> Das Vergleichsmaß hat eine höhere Dimension als das Objekt oder
Das Objekt hat eine kleinere Dimension als beim Messen angenommen

Messen in der falschen Dimension

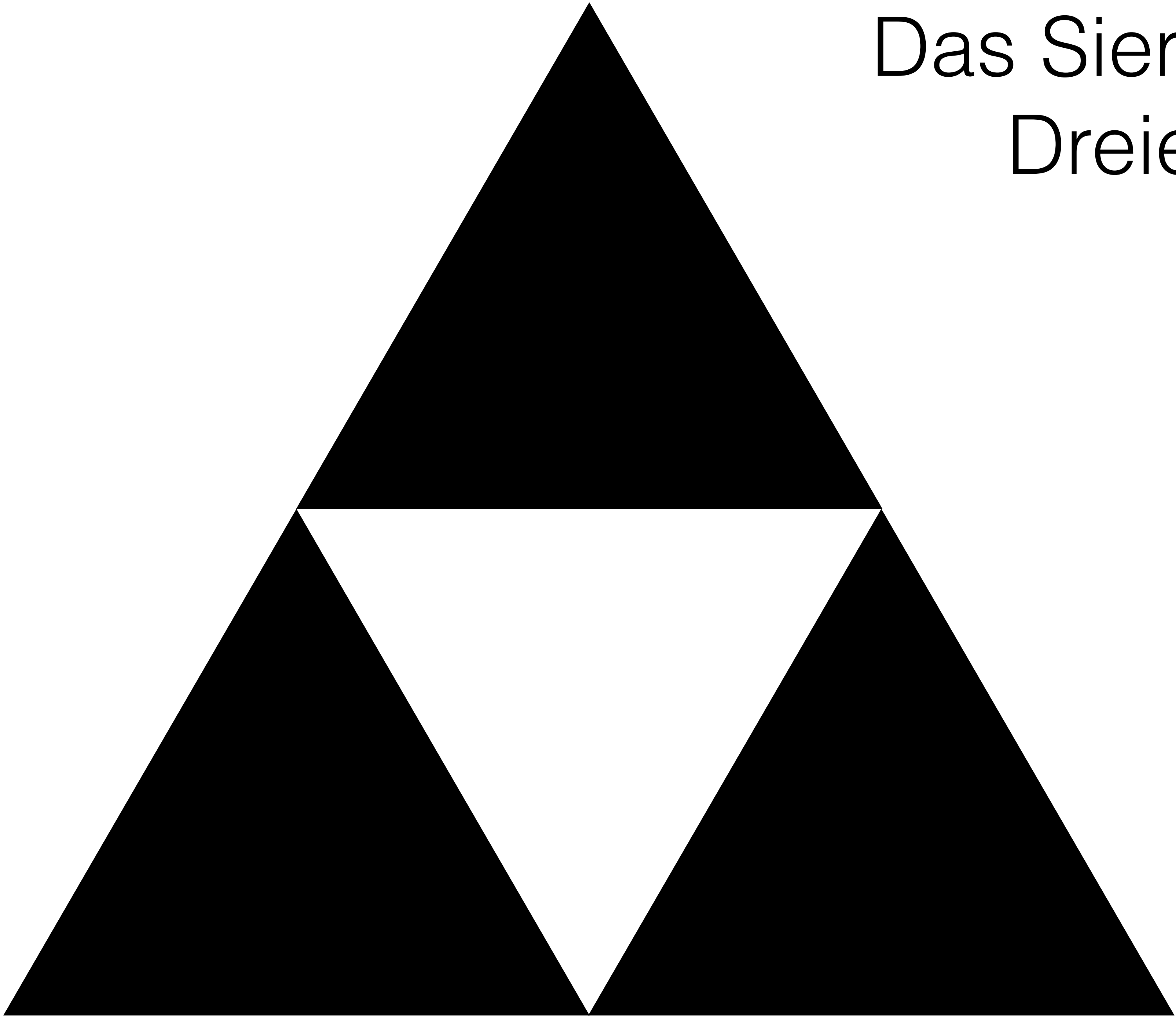
Ein sicherer Lösungsansatz ist:
Man misst das Objekt mit einer kleineren Kopie von sich selbst aus.

Bei exakt selbstähnlichen Figuren ist dieser Ansatz naheliegend und immer möglich.

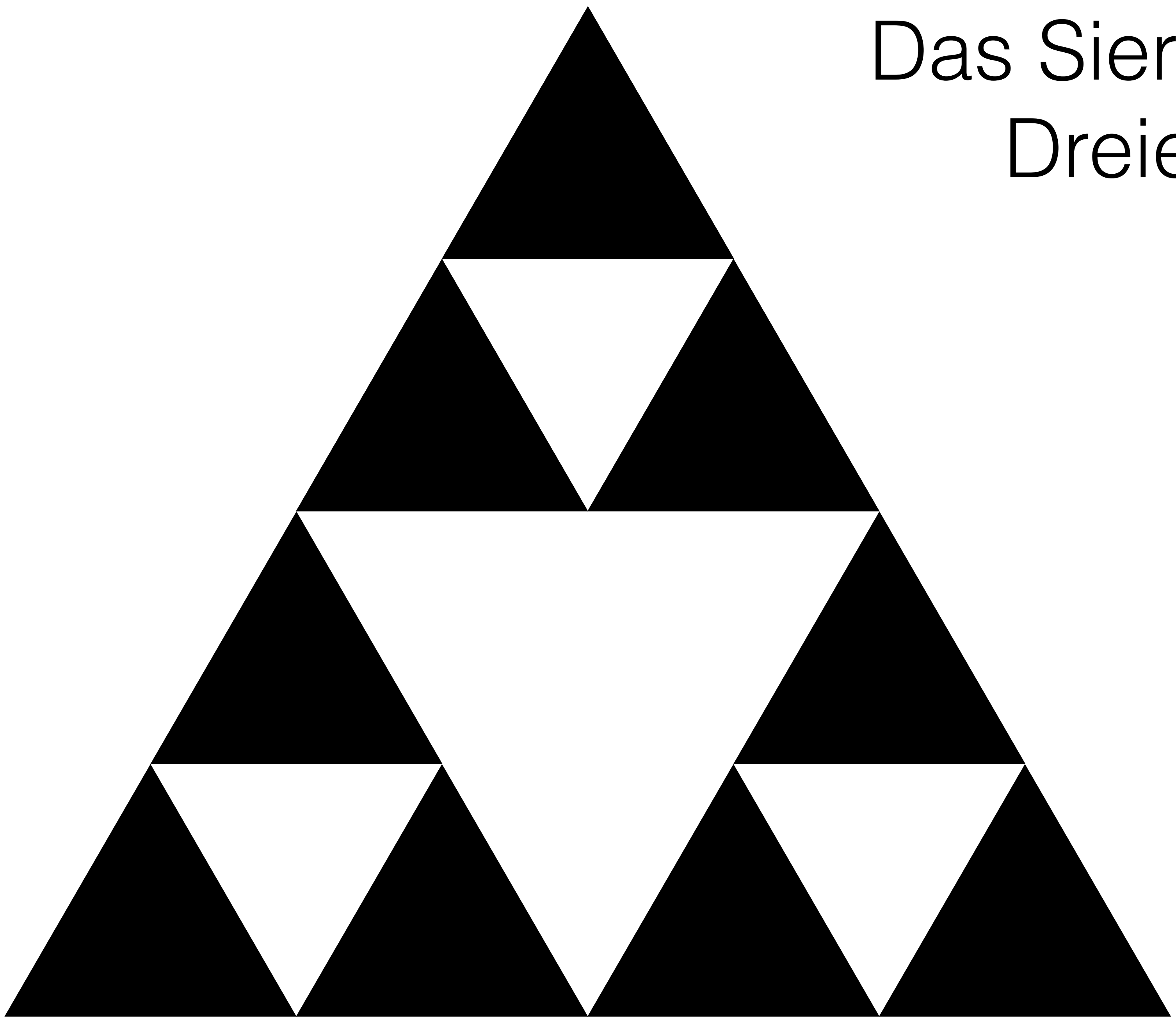
Das Sierpinski-Dreieck

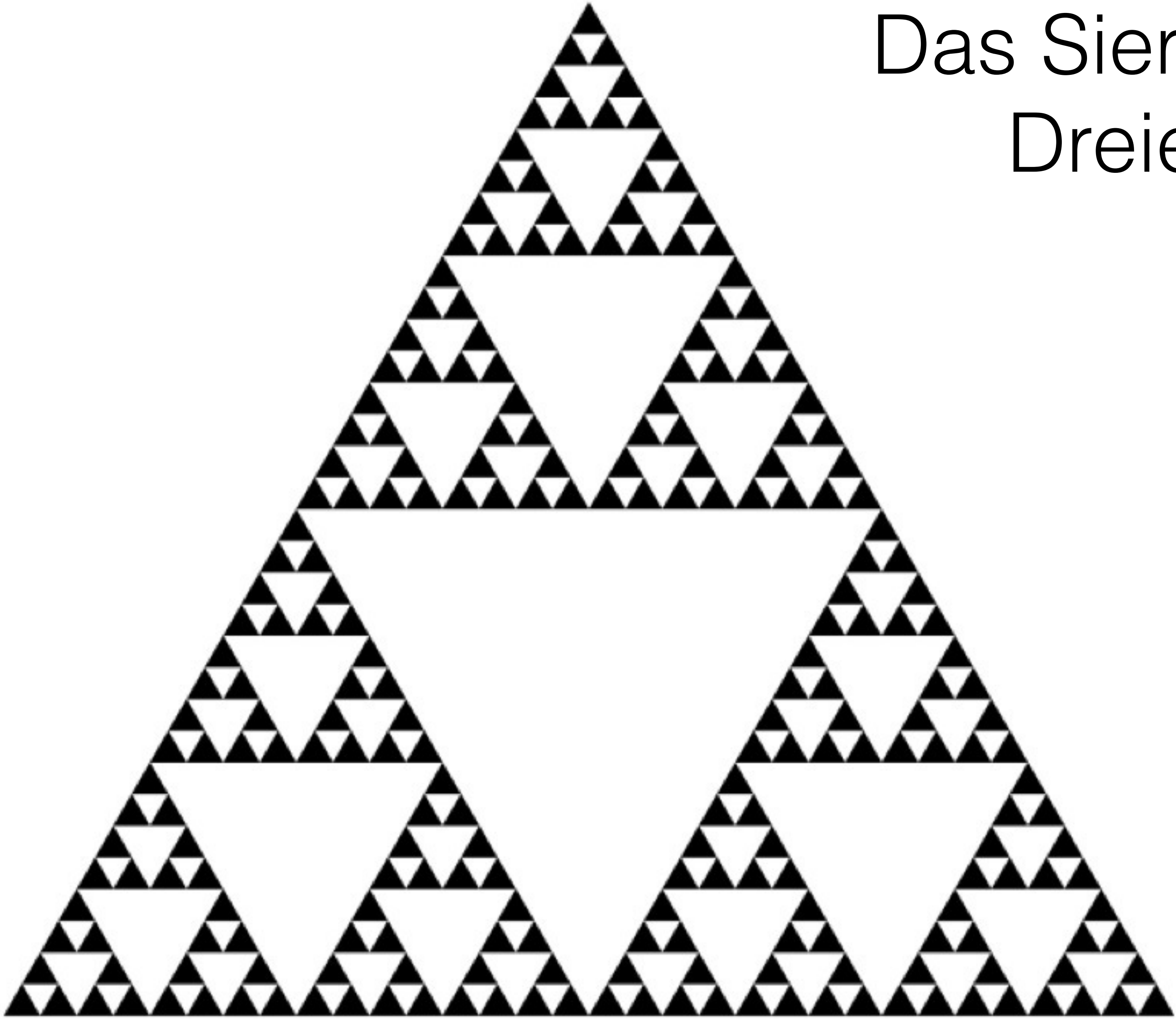


Das Sierpinski-Dreieck

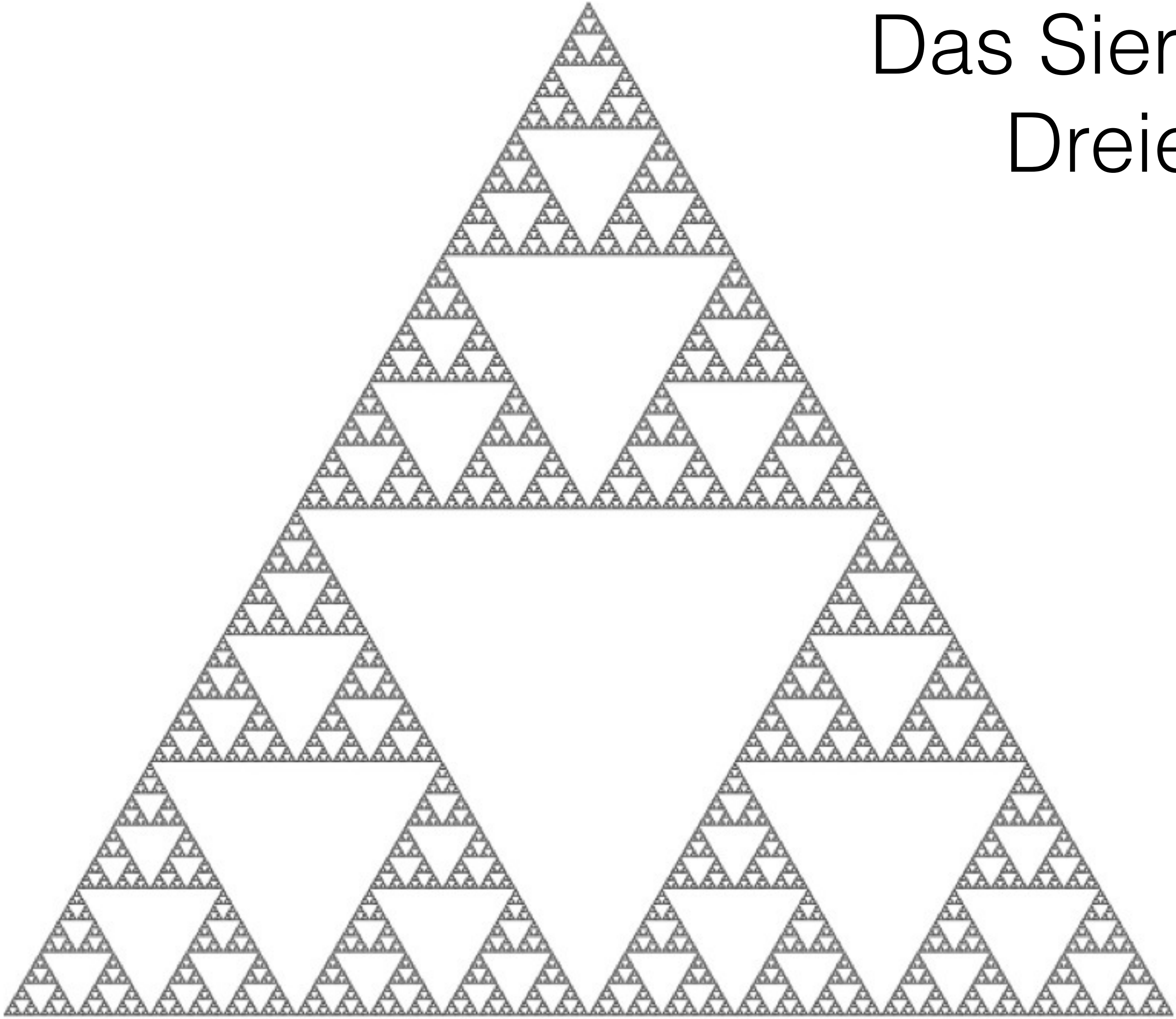


Das Sierpinski-Dreieck





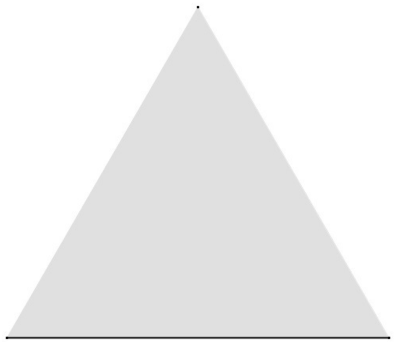
Das Sierpinski-Dreieck



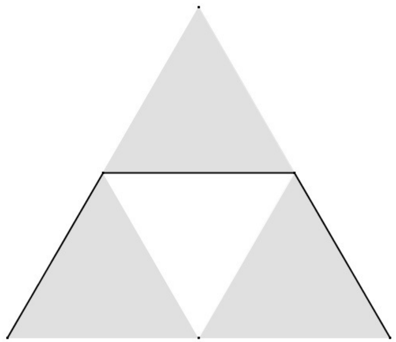
Das Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck

Ein erstes Beispiel

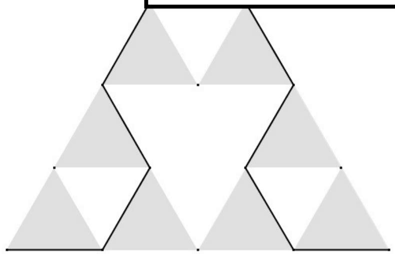


Fläche $= 1$ Länge $= 1$

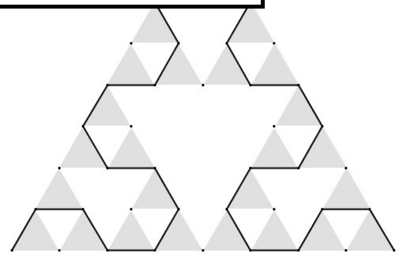


Fläche $= \frac{3}{4}$ Länge $= \frac{3}{2}$

Die Fläche geht gegen Null.
Die Linienlänge geht gegen Unendlich.



Fläche $= \frac{9}{16} \approx 0{,}56$ Länge $= \frac{9}{4} \approx 2{,}3$



Fläche $= \frac{27}{64} \approx 0{,}42$ Länge $= \frac{27}{8} \approx 3{,}4$

Ein erstes Beispiel

$$G_{neu} = s^D G_{alt}$$

Wir betrachten eine Vergrößerung eines Teils G_{alt} zur Gesamtfigur G_{neu}.

In einer exakt selbstähnlichen Figur verwendet man n Kopien von G_{alt}, um die Gesamtfigur G_{neu} zusammenzusetzen.

$$G_{neu} = n \cdot G_{alt}$$

$$n = s^D$$

s ist der Vergrößerungsfaktor vom Teil zur Gesamtfigur.
n ist die Anzahl der Teile, die in der Gesamtfigur enthalten sind.

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich s und n bestimmen und damit D **berechnen**.

$$\text{Fläche} = \frac{9}{16} \approx 0{,}56 \quad \text{Länge} = \frac{9}{4} \approx 2{,}3 \quad \text{Fläche} = \frac{27}{64} \approx 0{,}42 \quad \text{Länge} = \frac{27}{8} \approx 3{,}4$$

Ein erstes Beispiel

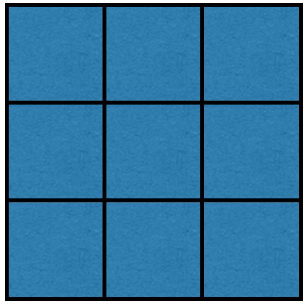
$$n = s^D$$

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich *s* und *n* bestimmen und damit *D* berechnen.

$$\log n = \log s^D$$

$$\log n = D \cdot \log s$$

$$\frac{\log n}{\log s} = D$$



$$n = 9$$

$$s = 3$$

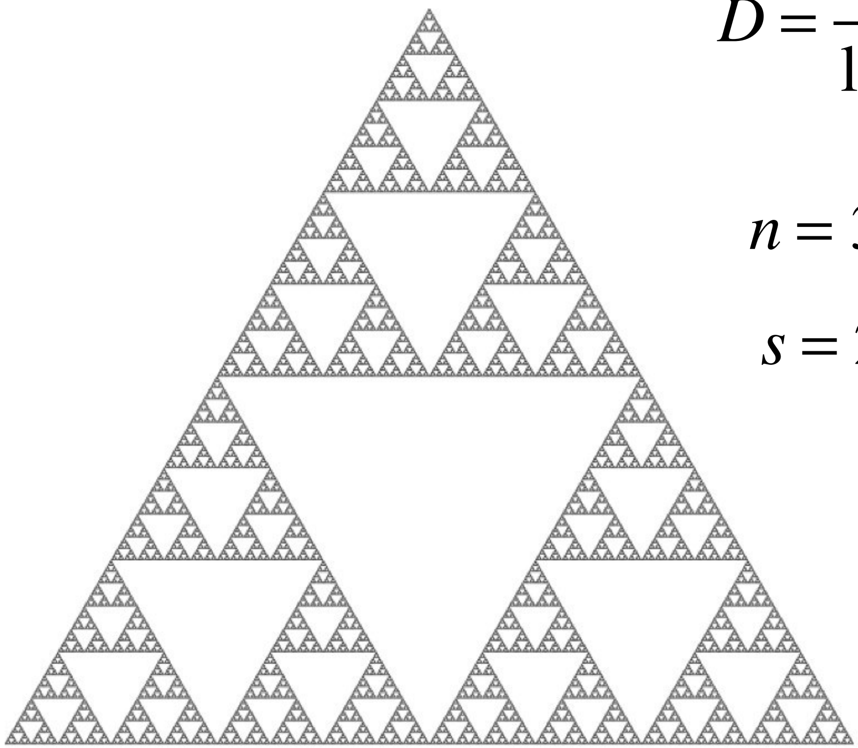
$$D = \frac{\log 9}{\log 3} \approx \frac{0{,}9542}{0{,}4771} = 2$$

Ein erstes Beispiel

$$n = s^D$$

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich *s* und *n* bestimmen und damit *D* berechnen.

$$D = \frac{\log n}{\log s}$$

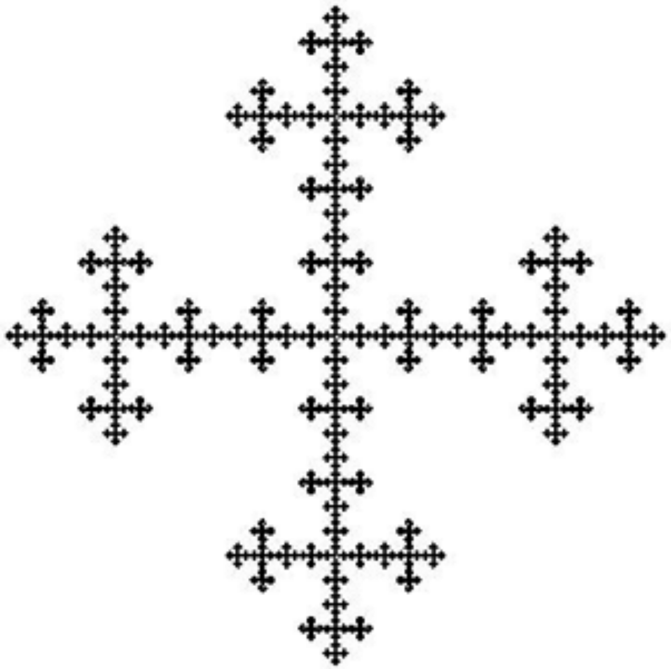


$$n = 3$$

$$s = 2$$

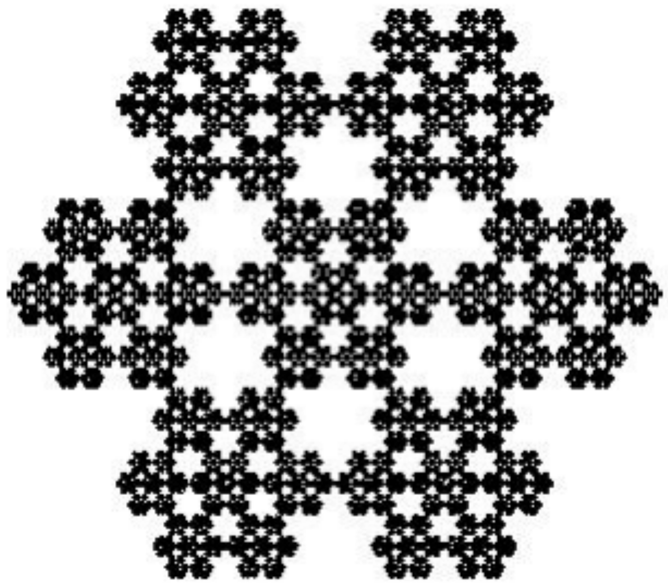
$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0,4771}{0,3010} \approx 1,585$$

Wie groß ist die Dimension?



$n = 5 \qquad s = 3$

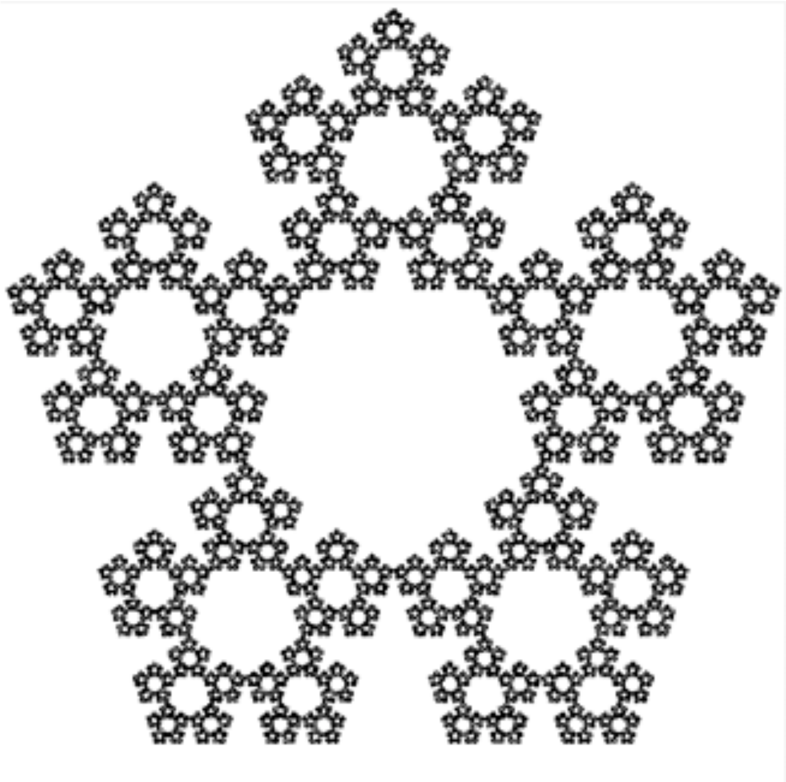
$$D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0{,}6990}{0{,}4771} \approx 1{,}465$$



$n = 7 \qquad s = 3$

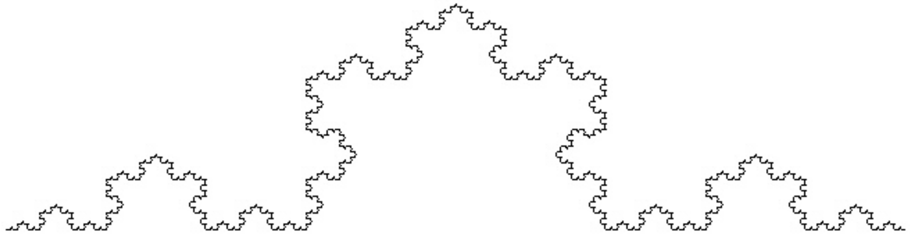
$$D = \frac{\log 7}{\log 3} \approx \frac{0{,}8451}{0{,}4771} \approx 1{,}771$$

Wie groß ist die Dimension?



$n = 5 \qquad s \approx 2{,}618$

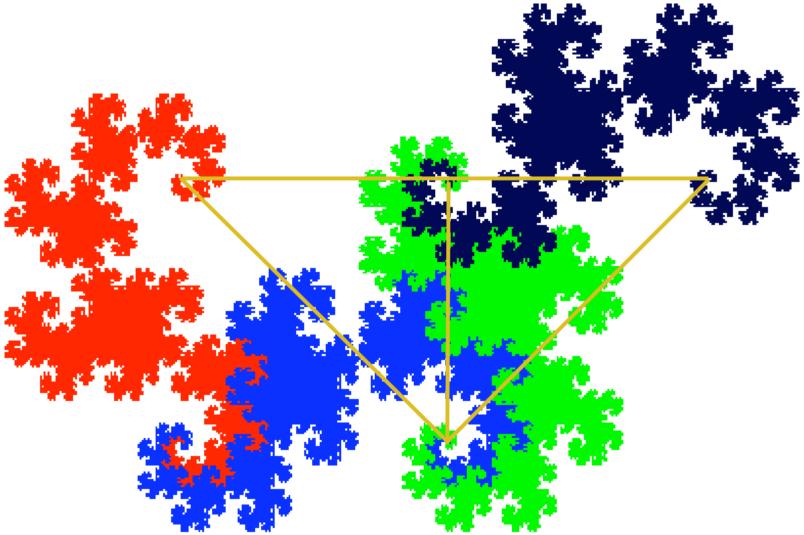
$$D = \frac{\log 5}{\log 2{,}618} \approx 1{,}67$$



$n = 4 \qquad s = 3$

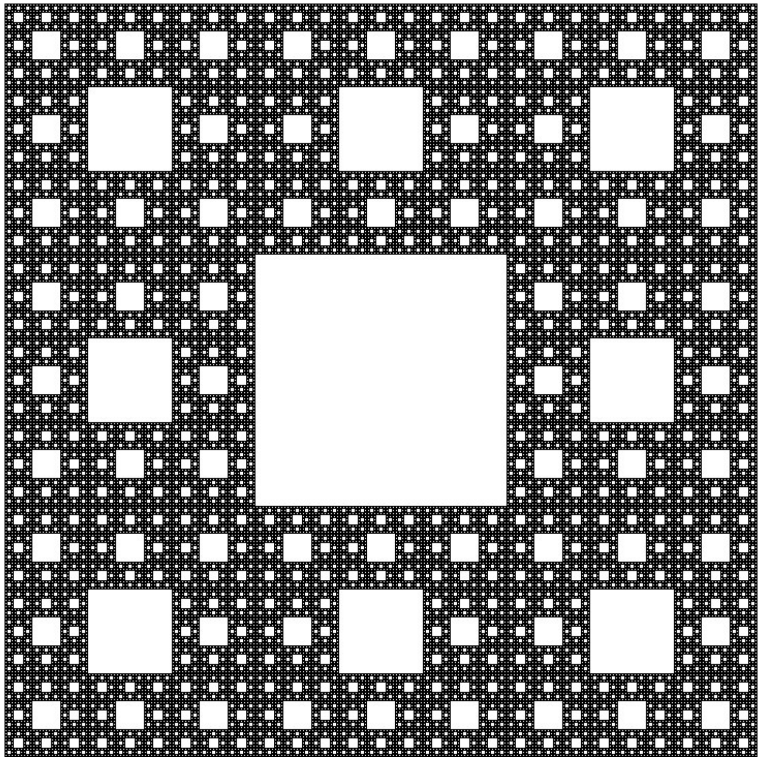
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26$$

Wie groß ist die Dimension?



$$n = 4 \qquad s = 2$$

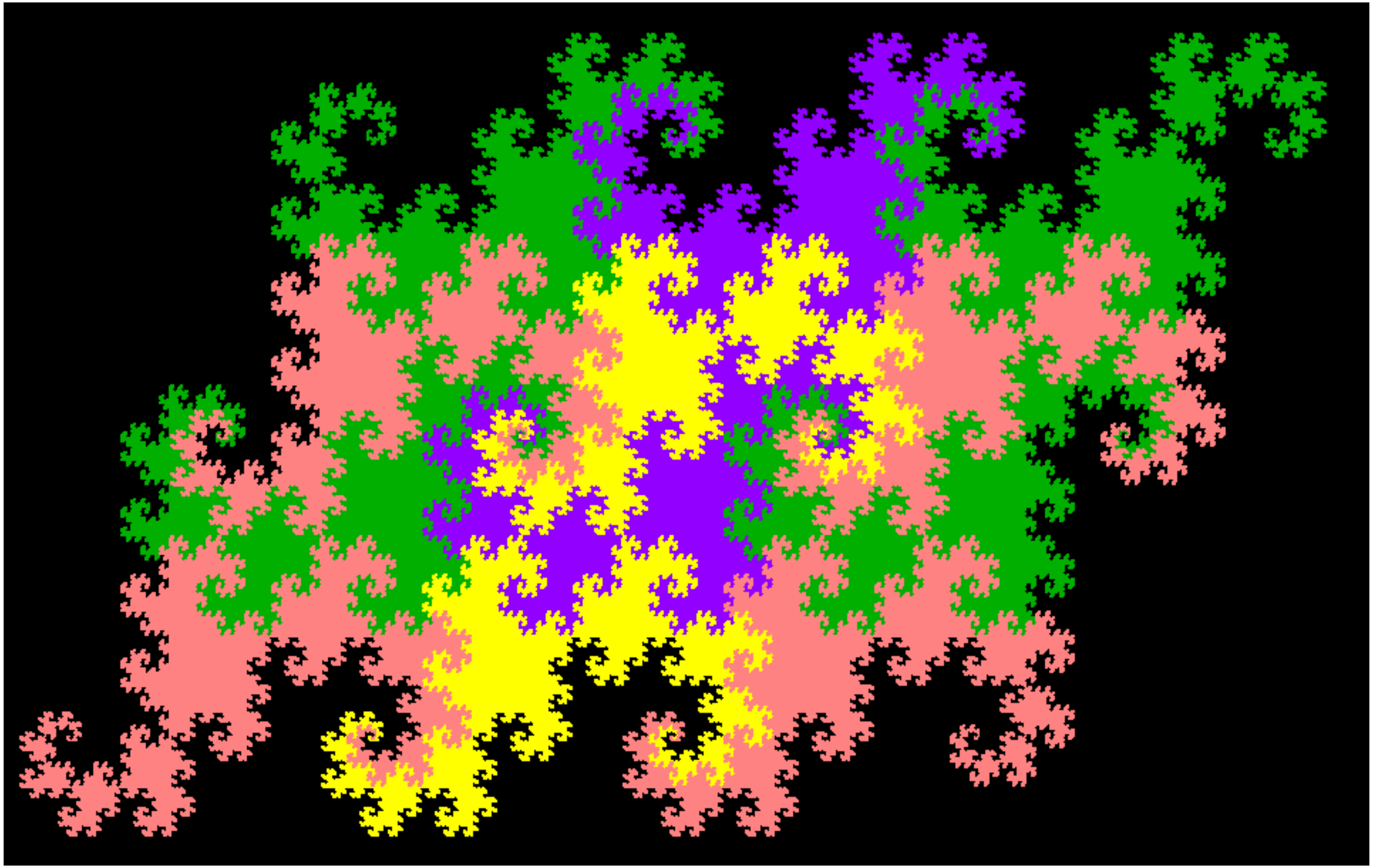
$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$



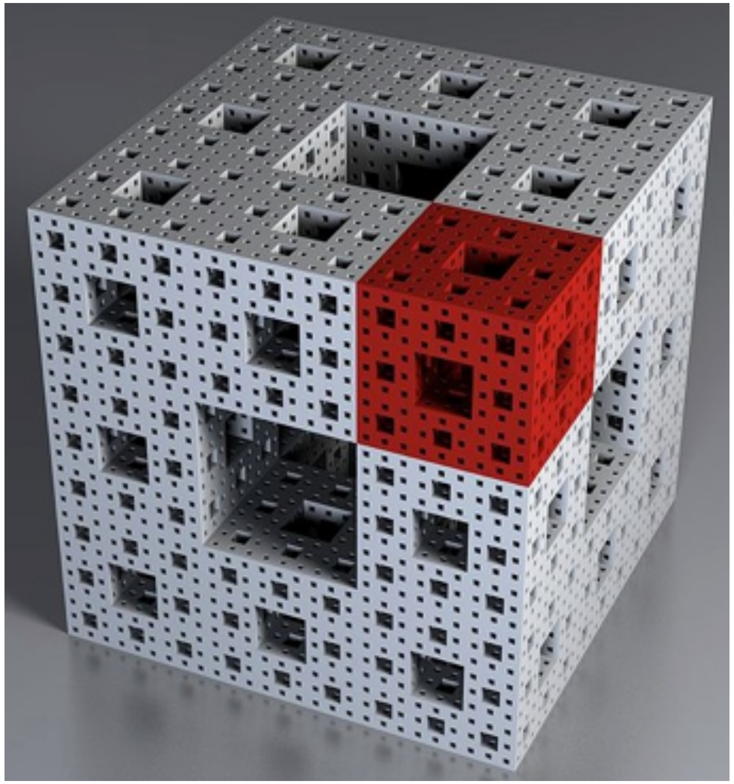
$$n = 8 \qquad s = 3$$

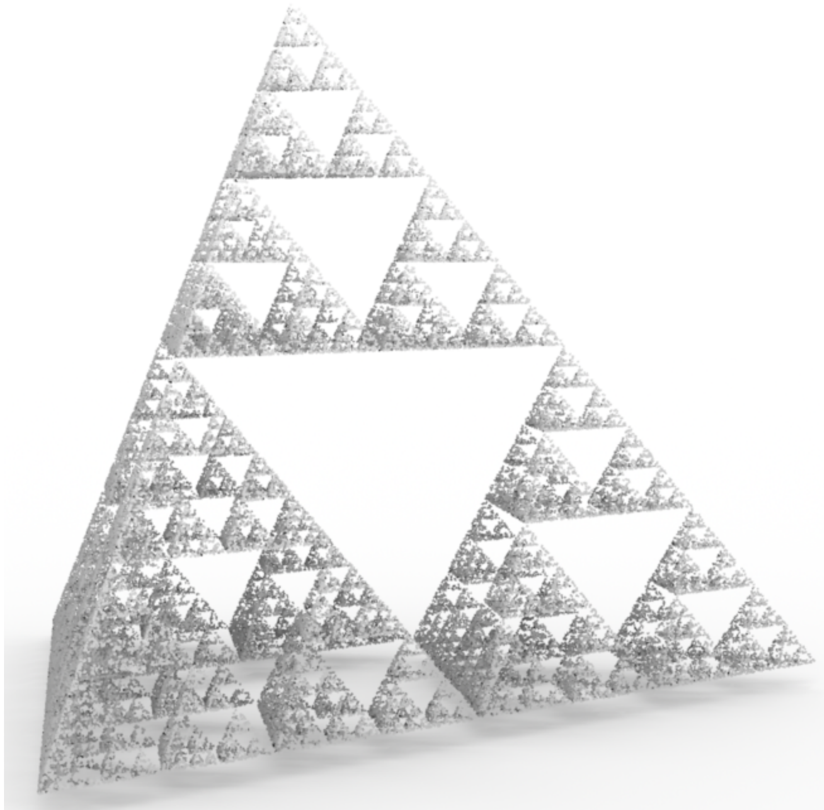
$$D = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1{,}89$$

Der Heighway-Drachen als fächenfüllende Kurve



Wie groß ist die Dimension?





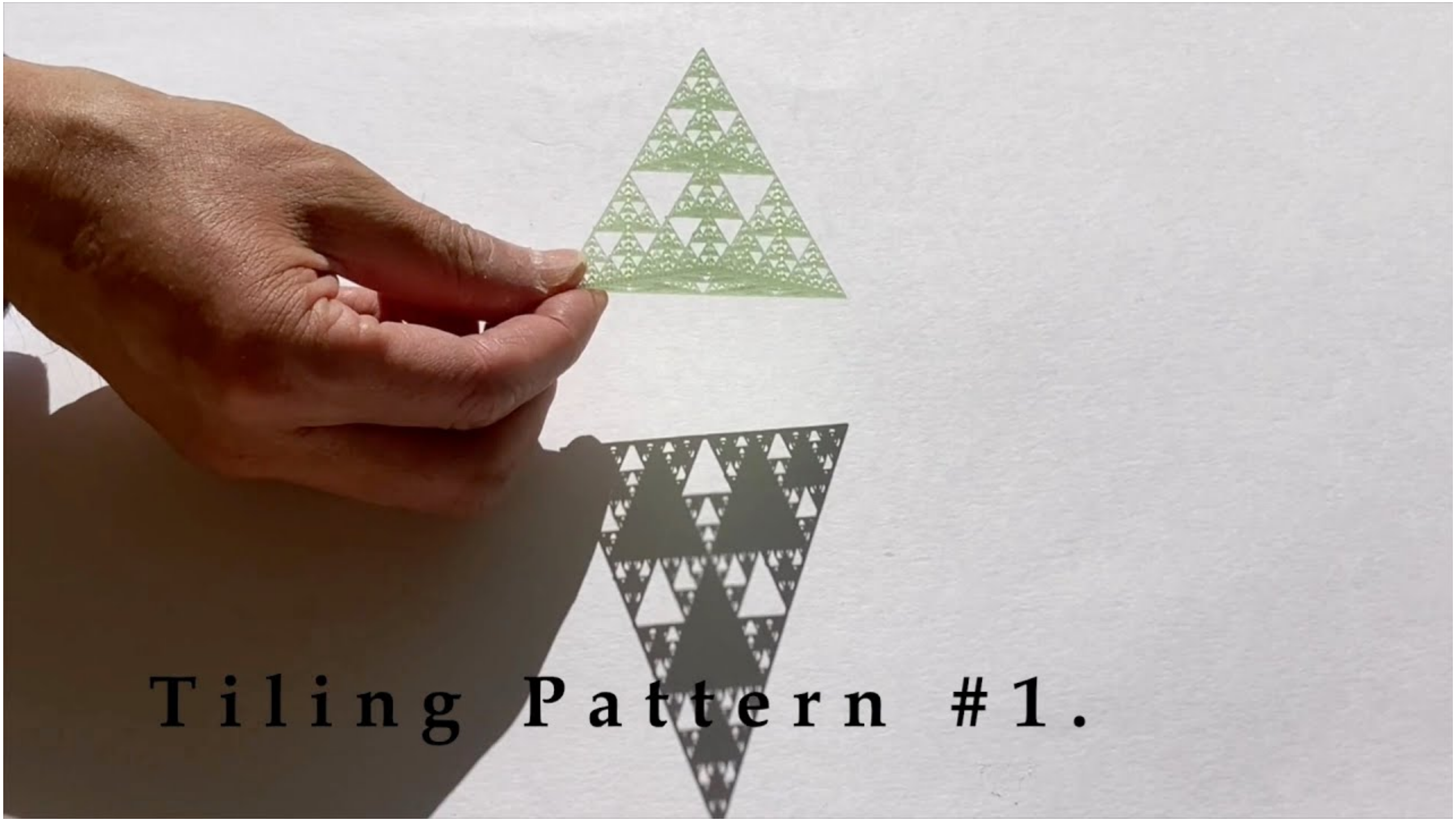
$n = 20 \qquad s = 3$

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2{,}73$$

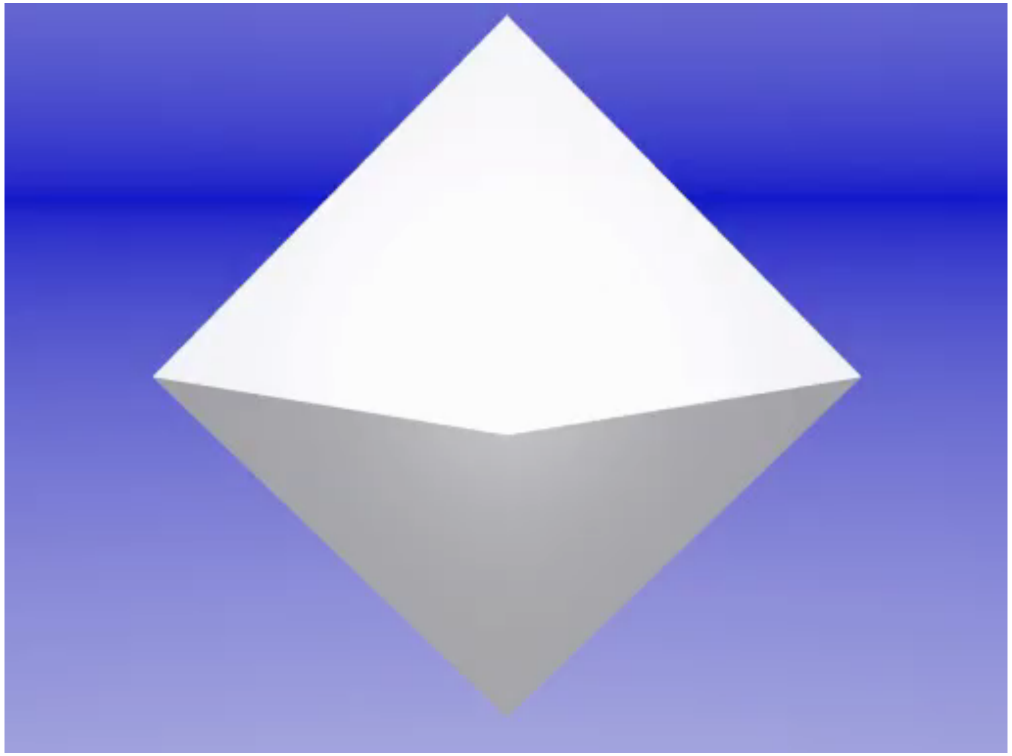
$n = 4 \qquad s = 2$

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

https://www.youtube.com/watch?v=VsFD37f-2ck&t=4s



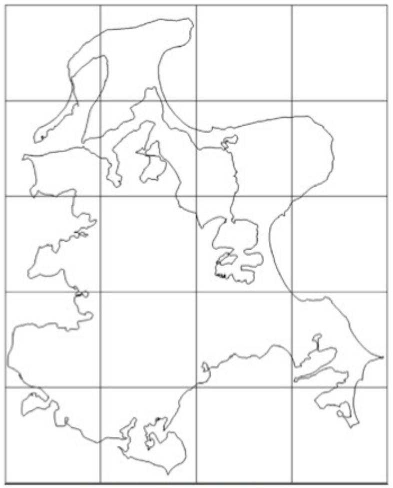
Wie groß ist die Dimension?



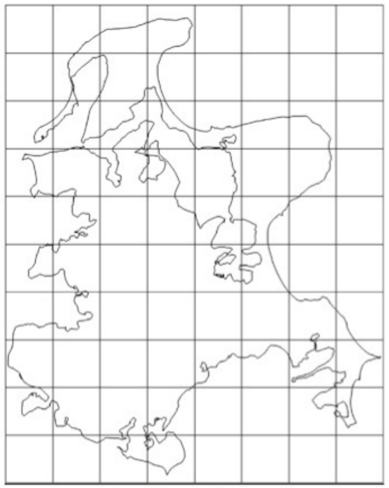
$$n = 6 \qquad s = 2$$

$$D = \frac{\log 6}{\log 2} \approx 2{,}58$$

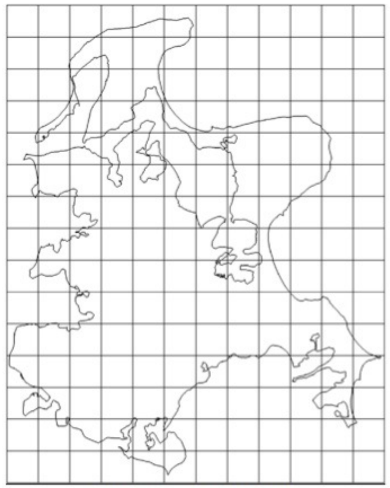
Die Boxcounting-Dimension



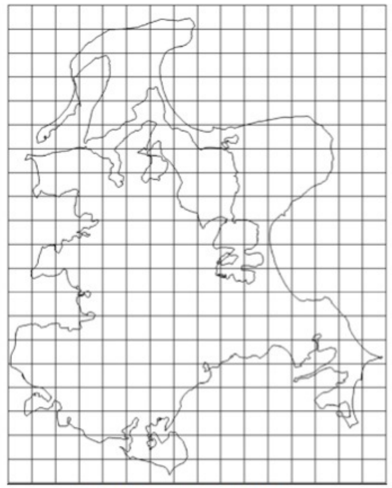
Gitterweite 1/4



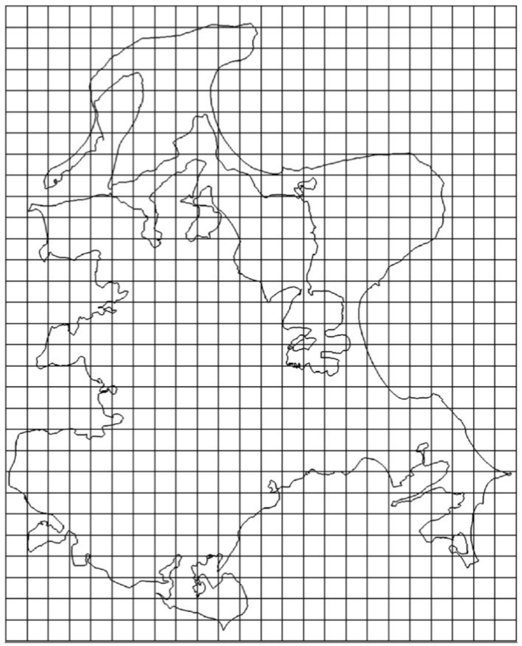
Gitterweite 1/8



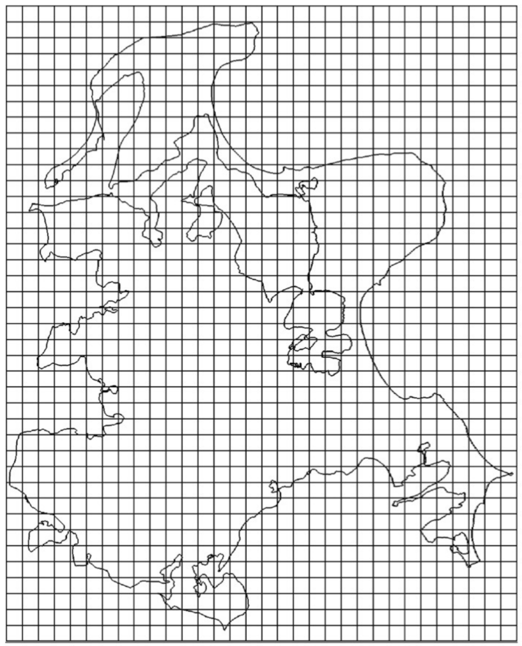
Gitterweite 1/12



Gitterweite 1/16

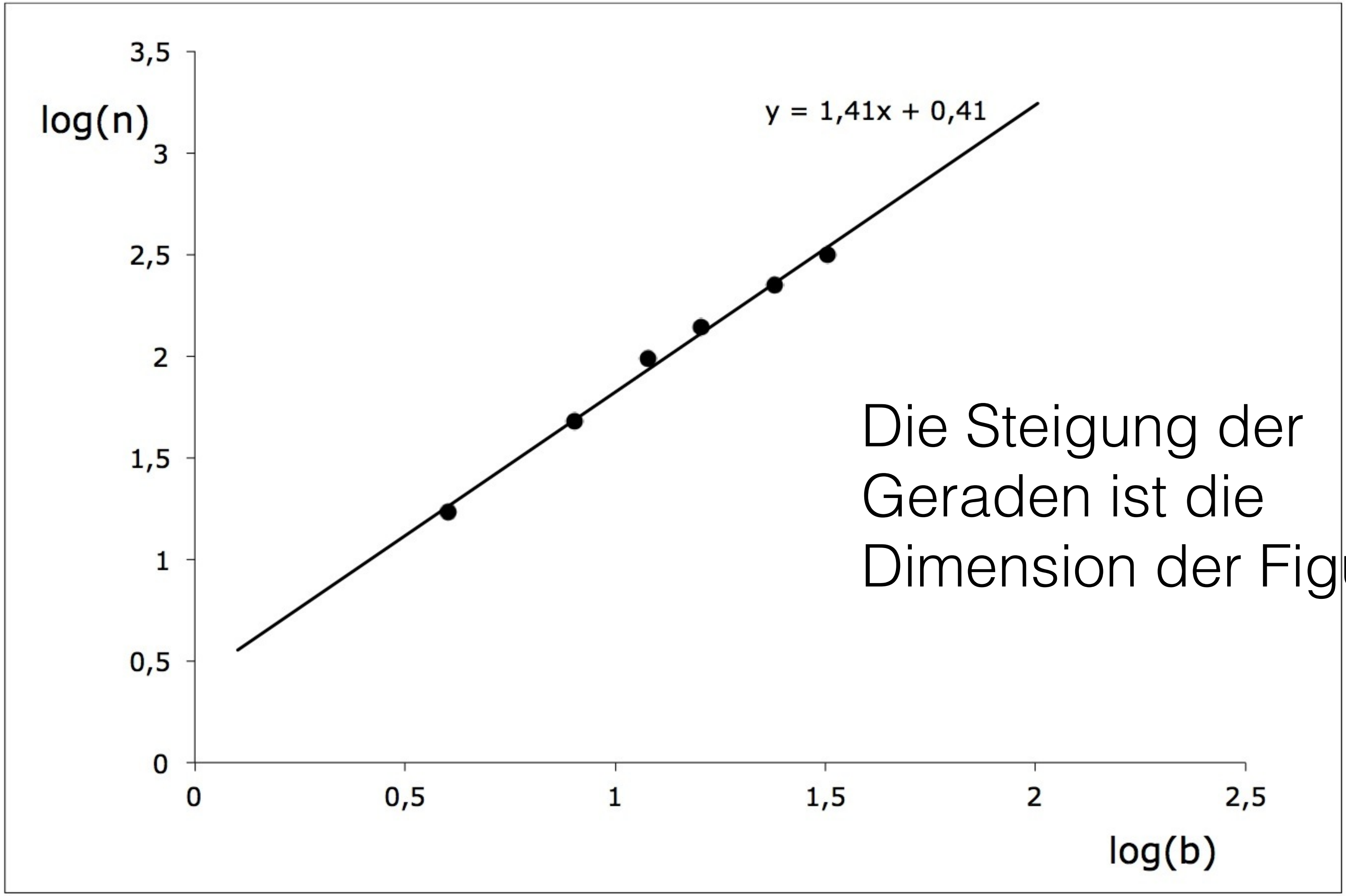


Gitterweite 1/24



Gitterweite 1/32

Die Boxcounting-Dimension



Die Steigung der Geraden ist die Dimension der Figur