Die Fibonacci-Zahlen

Lernziel für heute

„An der Mathematik irritiert mich, dass der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen sich zueinander so verhalten, als sei der ganze Kosmos schlampig gearbeitet.“

(JaMiRi, Karikatur-Zeichner der Deutschen Mathematiker Vereinigung)

Leonardo Pisano

Leonardo von Pisa ca. 1170 bis 1250
Sohn eines Kaufmanns aus Pisa
Sein Vater war Handelsattaché der Republik Pisa in Bugia (im heutigen Algerien).
Er zeigte früh eine mathematische Begabung, die sein Vater förderte. Auf Handelsreisen nach Ägypten, Syrien, Griechenland und Sizilien baute er sein mathematisches Wissen aus.
Hier lernte er auch arabische und indische Mathematik kennen und vor allem das Dezimalsystem.

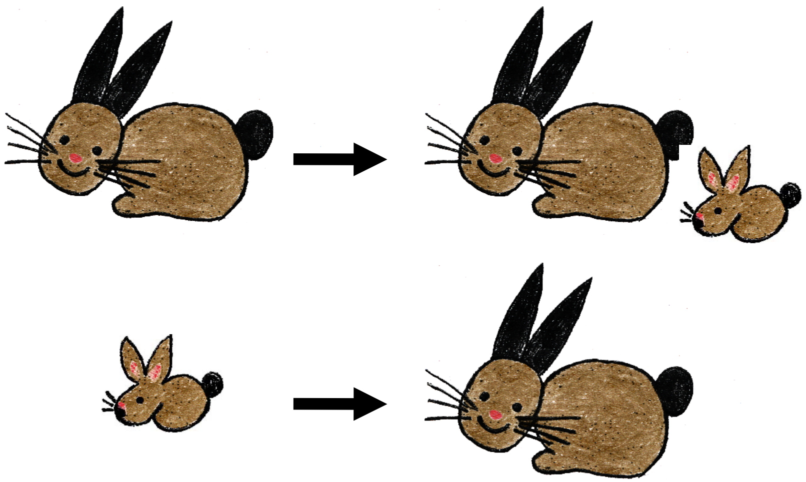
Dazu schrieb er 1202 das Werk „Liber abaci“, das in den nachfolgenden Jahren (ab ca. 1260) ein bedeutendes Werk für die Mathematikausbildung von Kaufleuten in Norditalien wurde. Insbesondere behandelte Leonardo Rechenaufgaben im Dezimalsystem und nicht im römischen Zahlsystem.

Zum Namen
Sein korrekter Name ist Leonardo Pisano, sein Vater hieß Guglielmo Bonaccio. Leonardo bemerkte selbst in seinen Schriften, dass er der Sohn des Bonaccio ist (Lat.: filius Bonacci).
Beim Studium seiner Schriften machten Mathematiker/Historiker (u.a. Éduard Lucas, 1842-1891) daraus den Namen „Fibonacci“ und zitierten darunter mathematische Ergebnisse, u.a. die berühmte Zahlenfolge.

Fibonacci-Zahlen

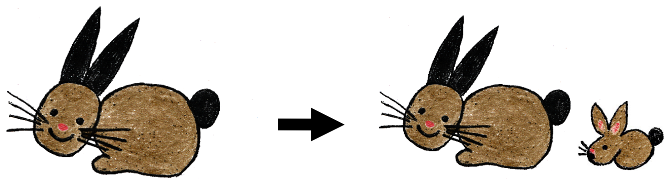
Auf Seite 124 steht im „Liber abaci“ folgende Aufgabe:

Ein Mann hielt ein Paar Kaninchen an einem Ort, der ringsum von einer Mauer umgeben war, um herauszufinden, wie viele Paare daraus in einem Jahr entstünden. Dabei ist es ihre Natur, jeden Monat ein neues Paar auf die Welt zu bringen, und sie gebären erstmals im zweiten Monat nach ihrer Geburt.

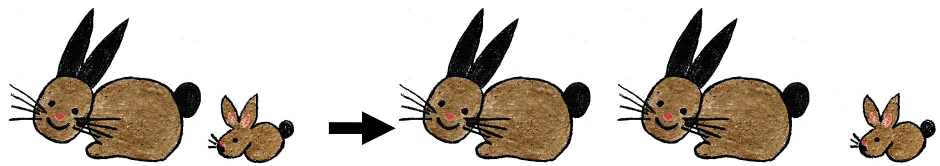


Fibonacci-Zahlen

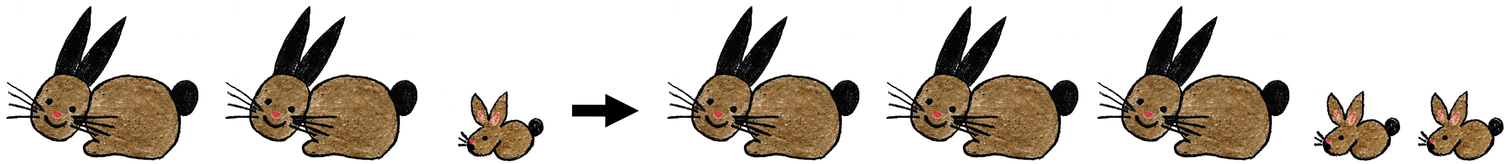
1. Monat



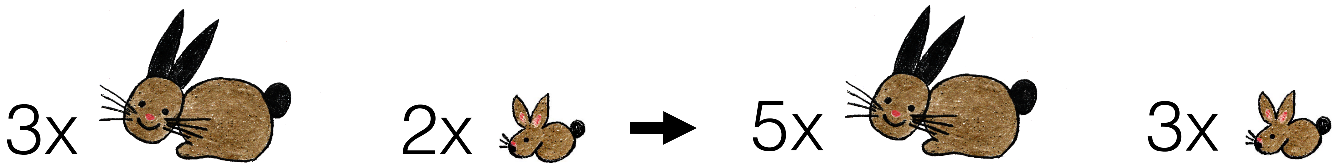
2. Monat



3. Monat



4. Monat



also: 1 —> 2 —> 3 —> 5 —> 8 —> …

Fibonacci-Zahlen

Definition der Fibonacci-Zahlenfolge

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

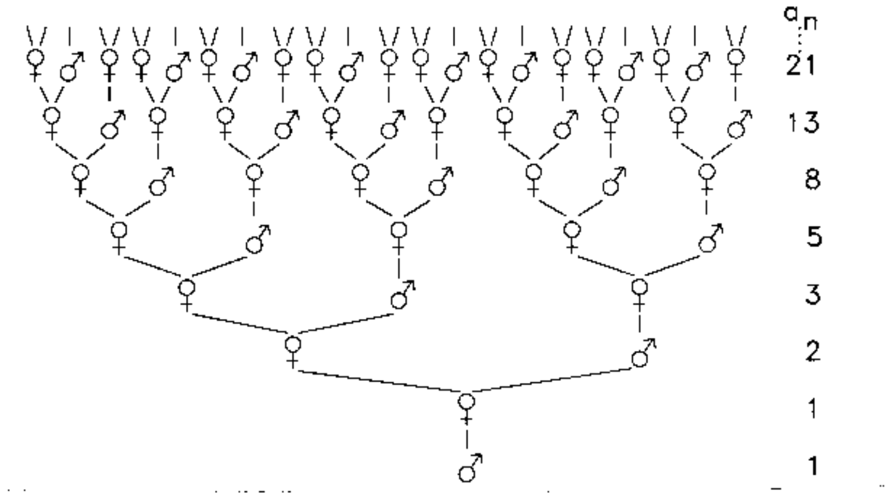
Index n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon. Zahl F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

also z.B. $F_7 = 13$ Die 7. Fibonacci-Zahl ist 13.

25 ist keine Fibonacci-Zahl,
55 ist eine Fibonacci-Zahl, nämlich die 10.

Fibonacci-Zahlen

Praktische Anwendungen



Der Stammbaum einer (Bienen-)Drohne

Wichtigste Fibonacci-Verhältnisse sind:

0,382	0,5	0,618	1,618
38,2%	50%	61,8%	161,8%

Aktien, Kursverlaufsanalyse

Bei der Technischen Analyse nutzt man nun diese Verhältnisse zum einen bei der Periodenwahl in der Indikatorenanalyse und zum anderen bei der Kurszielbestimmung. Bekannte Untergruppen dieser Zyklentechnik sind Fibonacci: -Extensions -Retracement Extenions -Pull Extensions -Time Extensions (Ratio) -Time Reverse Time Extensions -Fanlines

Es erstaunt immer wieder, wie treffsicher die Methode ist.Nuten Sie zB die FibonaccyRetracements um bereits erarbeitete Unterstützungen/Widerstände erneut zu belegen.Wo diese deckungsgleich sind, wird die Bestandskraft verstärkt. Die Fehlerquote der Fibonaccy-Technik ist jedoch nicht zu unterschätzen, da sollte man die Fibonaccy-Methode mit anderen Techniken der TA gekoppeln.

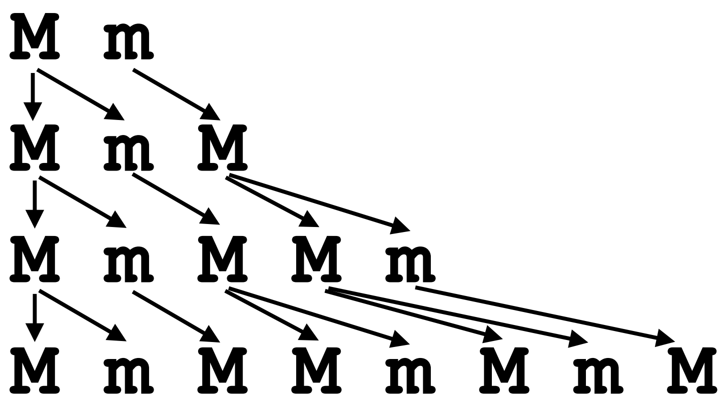
1. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

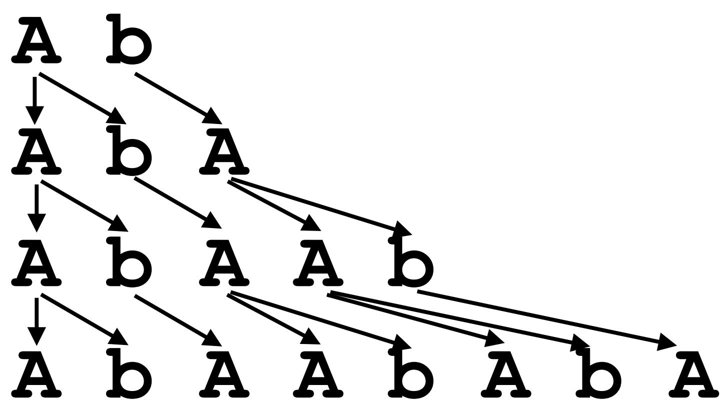
Das Prinzip der stetigen Teilung

Jeder Major **M** wird zerlegt in einen neuen (kleineren) Major und einen neuen Minor **m** und jeder Minor bleibt unzerteilt, wird aber zum neuen Major.

Das Prinzip der Kaninchenvermehrung

Jedes alte Kaninchen **A** bleibt alt, bringt aber ein Babykaninchen **b** zur Welt und jedes Baby wird zu einem alten Kaninchen.





2. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
k_n		1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,6190	1,6176	1,6181	1,617977

Wachstumsfaktor: Um welchen Faktor k wird eine Fibonacci-Zahl vergrößert, um die nächste zu erhalten? $F_{n+1} = k_{n+1} \cdot F_n$

Der Wachstumsfaktor nähert sich offenbar immer genauer $\Phi \approx$ 1,6180…

2. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
k_n		1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,6190	1,6176	1,6181	1,617977

Herleitung

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad | \quad : F_n$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Beide Brüche sind jeweils eine Fibonacci-Zahl geteilt durch die vorhergehende Fibonacci-Zahl.

setze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = x + 1$$

Das ist die charakteristische Gleichung für Φ.

3. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

Wenn die Quotienten (Fibonacci-Zahl : vorhergehende Fibonacci-Zahl) im Grenzwert gegen Φ konvergieren, dann konvergieren die umgekehrten Quotienten (vorhergehende Fibonacci-Zahl : Fibonacci-Zahl) gegen den Kehrwert von Φ, das ist φ.

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \Phi \quad \text{also} \quad \frac{F_{n-1}}{F_n} \to \frac{1}{\Phi} = \varphi$$

Die Fibonacci-Zahlen liefern gute Näherungen für φ

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \ldots$$

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

„Sprünge“ beim Berechnen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_{n+k} \approx F_n \cdot \Phi^k$$

Man kann um k Schritte weiterspringen.

Beispiel: $F_7 = 13$ Zu F_{12} ist ein Sprung um $k = 5$ Positionen.

$$F_{12} = F_{7+5} \approx F_7 \cdot \Phi^5 \approx 13 \cdot 1{,}618^5 \approx 144{,}157$$

$$F_{22} = F_{12+10} \approx 144 \cdot \Phi^{10} \approx 144 \cdot 1{,}618034^{10} \approx 17710{,}83$$

$$F_{22} = 17711$$

Achtung: Je größer die Sprünge sind, desto genauer muss Φ sein.

Nr.	Fibo	* PHI	* PHI^2	* PHI^3	* PHI^5	* PHI^10
1	**1**	1,618033989	2,618033989	4,236067977	11,090169944	122,99186938
2	**1**	1,618				
3	**2**	1,618	2,618			
4	**3**	3,236	2,618	4,236		
5	**5**	4,854	5,236	4,236		
6	**8**	8,090	7,854	8,472		
7	**13**	12,944	13,090	12,708		
8	**21**	21,034	20,944	21,180		
9	**34**	33,979	34,034	33,889		
10	**55**	55,013	54,979	55,069		
11	**89**	88,992	89,013	88,957		
12	**144**	144,005	143,992	144,026		
13	**233**	232,997	233,005	232,984	232,894	245,984
14	**377**	377,002	376,997	377,010	377,066	368,976
15	**610**	609,999	610,002	609,994	609,959	614,959
16	**987**	987,001	986,999	987,004	987,025	983,935
17	**1.597**	1.597,000	1.597,001	1.596,998	1.596,984	1.598,894
18	**2.584**	2.584,000	2.584,000	2.584,001	2.584,010	2.582,829
19	**4.181**	4.181,000	4.181,000	4.180,999	4.180,994	4.181,724
20	**6.765**	6.765,000	6.765,000	6.765,001	6.765,004	6.764,553
21	**10.946**	10.946,000	10.946,000	10.946,000	10.945,998	10.946,276
22	**17.711**	17.711,000	17.711,000	17.711,000	17.711,001	17.710,829
23	**28.657**	28.657,000	28.657,000	28.657,000	28.656,999	28.657,106
24	**46.368**	46.368,000	46.368,000	46.368,000	46.368,001	46.367,935
25	**75.025**	75.025,000	75.025,000	75.025,000	75.025,000	75.025,040
26	**121.393**	121.393,000	121.393,000	121.393,000	121.393,000	121.392,975
27	**196.418**	196.418,000	196.418,000	196.418,000	196.418,000	196.418,015
28	**317.811**	317.811,000	317.811,000	317.811,000	317.811,000	317.810,990
29	**514.229**	514.229,000	514.229,000	514.229,000	514.229,000	514.229,006

„An der Mathematik irritiert mich, dass der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen sich zueinander so verhalten, als sei der ganze Kosmos schlampig gearbeitet.“

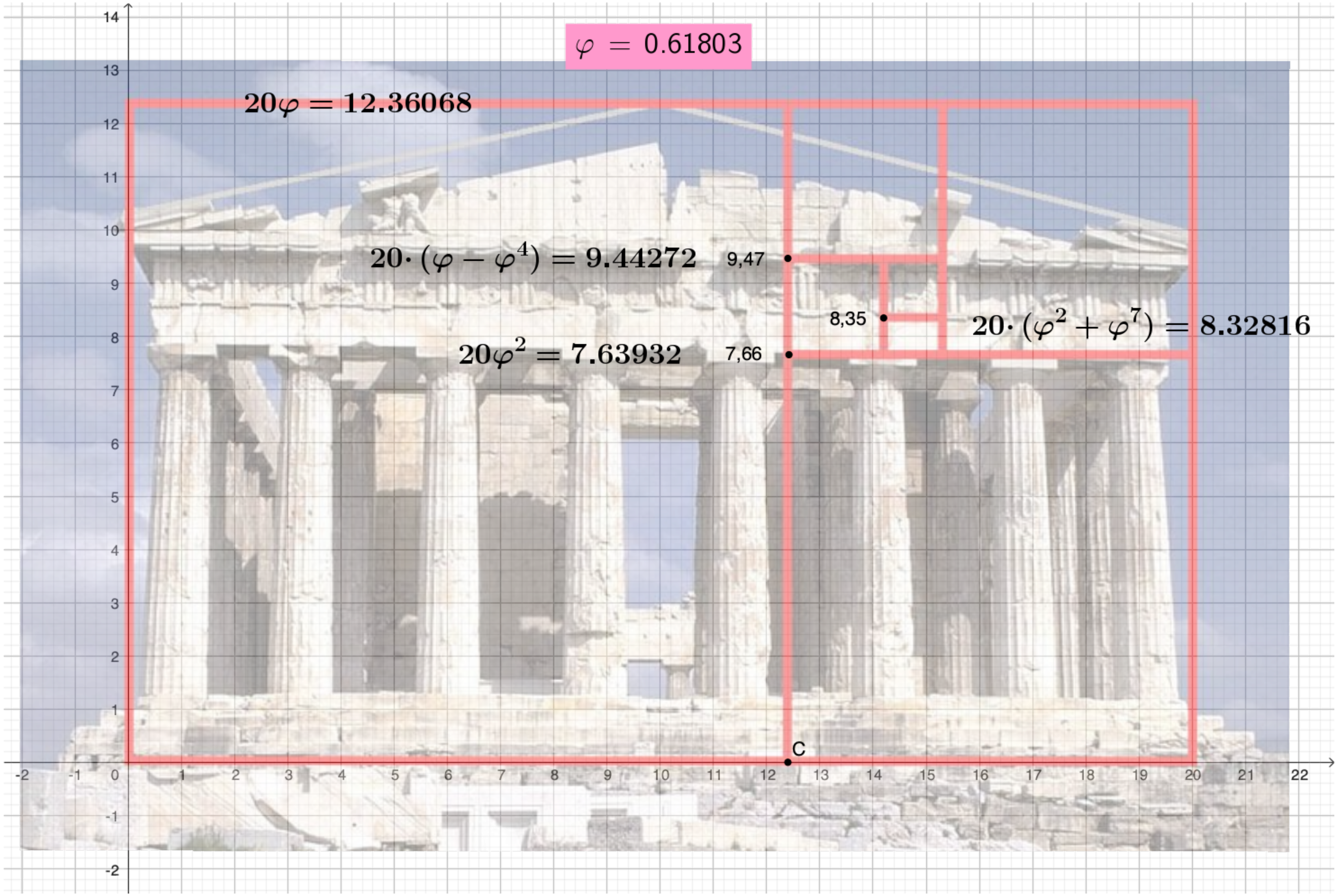
Die Geschichte des „goldenen Schnitts“

Vor gut 2000 Jahren, Euklid:
Als geometrisches Problem zur Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks mit Zirkel und Lineal

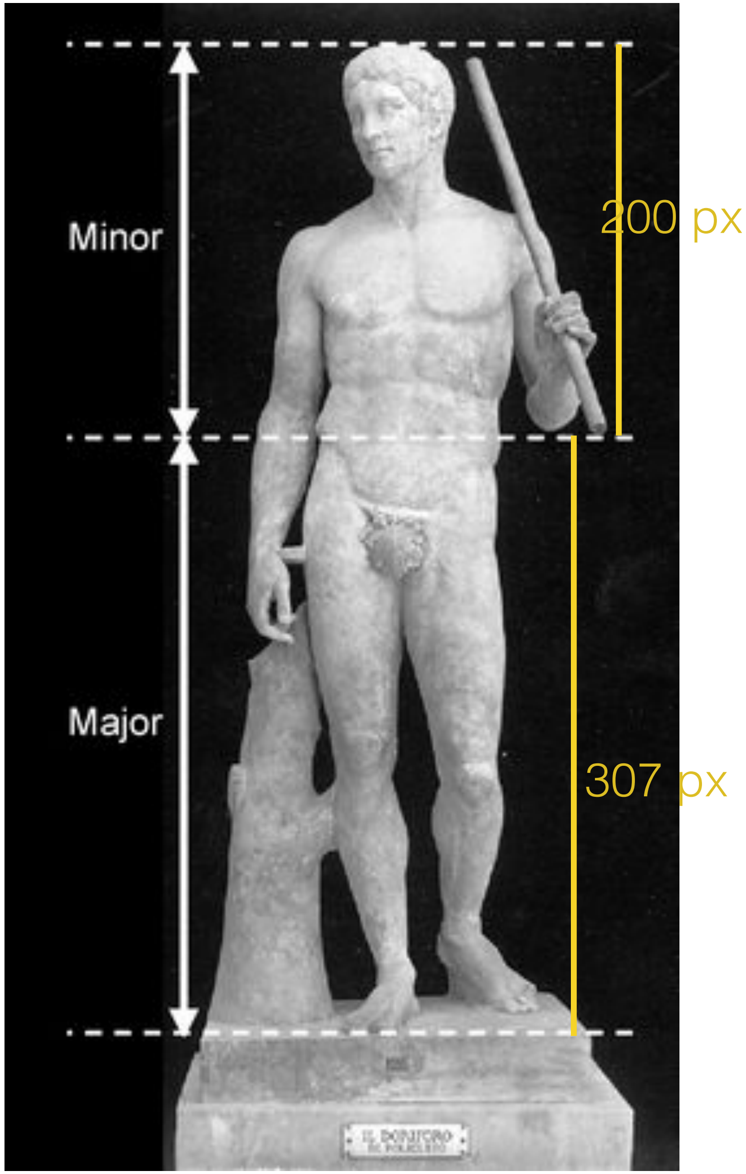
Renaissance, Luca Pacioli ~ 1500:
Verfasst mit Leonardo da Vinci das Buch „De Divina Proportione“ (mit vielen Bezügen auf Vitruvius)

Der Begriff „goldener Schitt“ wird erst ab dem 19. Jahrhundert gebräuchlich, als „sectio aurea“ neben „sectio divina“.

Der Goldene Schnitt in der Kunst



Der Goldene Schnitt in der Kunst

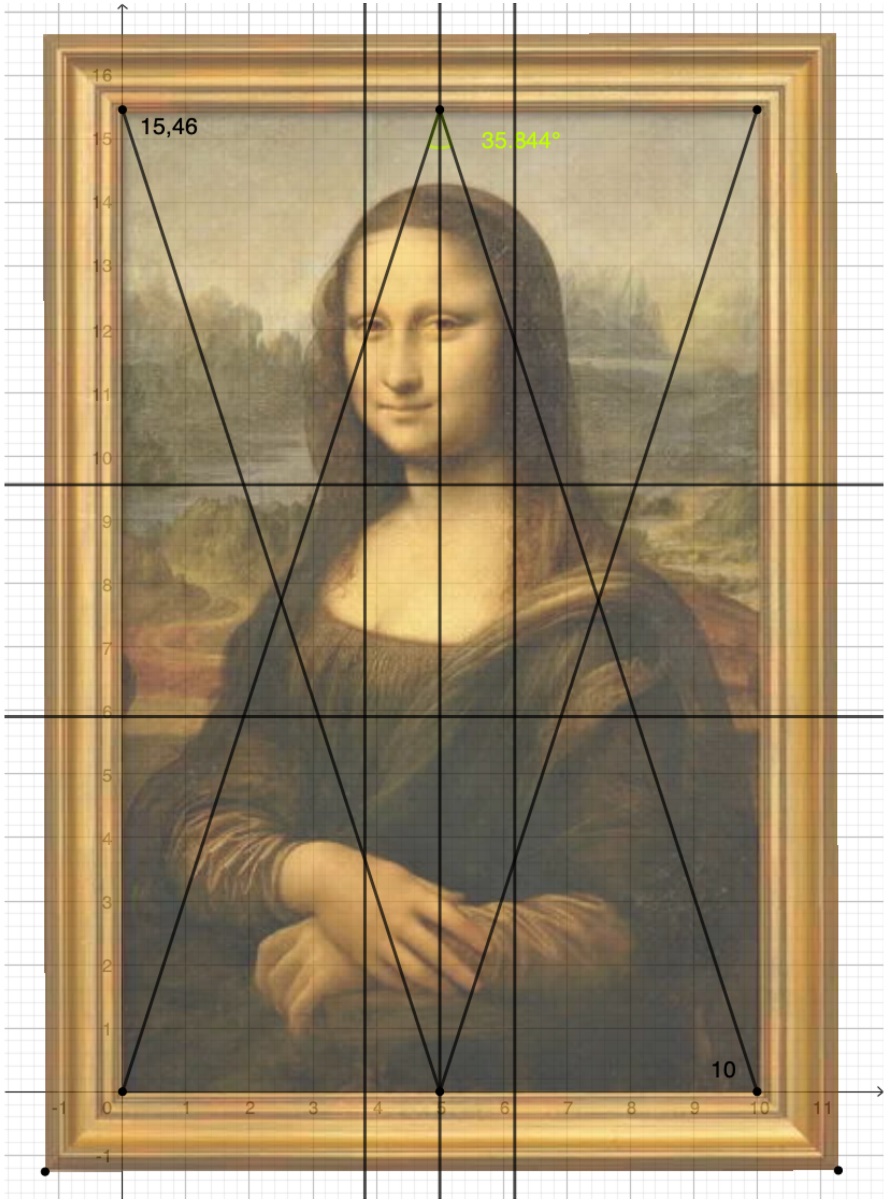


Der Bauchnabel teilt die Körpergröße im goldenen Schnitt. (0,618)

hier: 307 : 507 ≈ 0,606

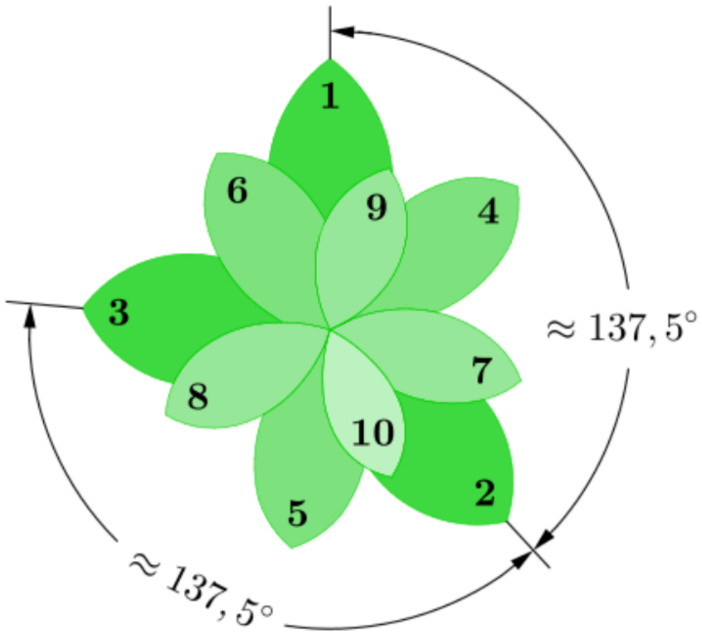
Messung am eigenen Körper:
Major: 0,585

Der Goldene Schnitt in der Kunst



Die Dreiecke von den Ecken zur Kantenmitte sind goldene Dreiecke (ca. 36° in der Spitze)

Der goldene Schnitt in der Natur



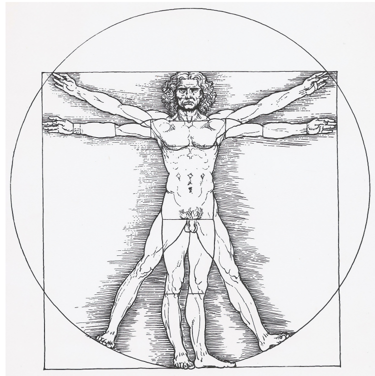
$360° \cdot \varphi \approx 222{,}5°$

„goldener Winkel“

$360° - 222{,}5° = 137{,}5°$

Major Minor

Der Vitruvianische Mann



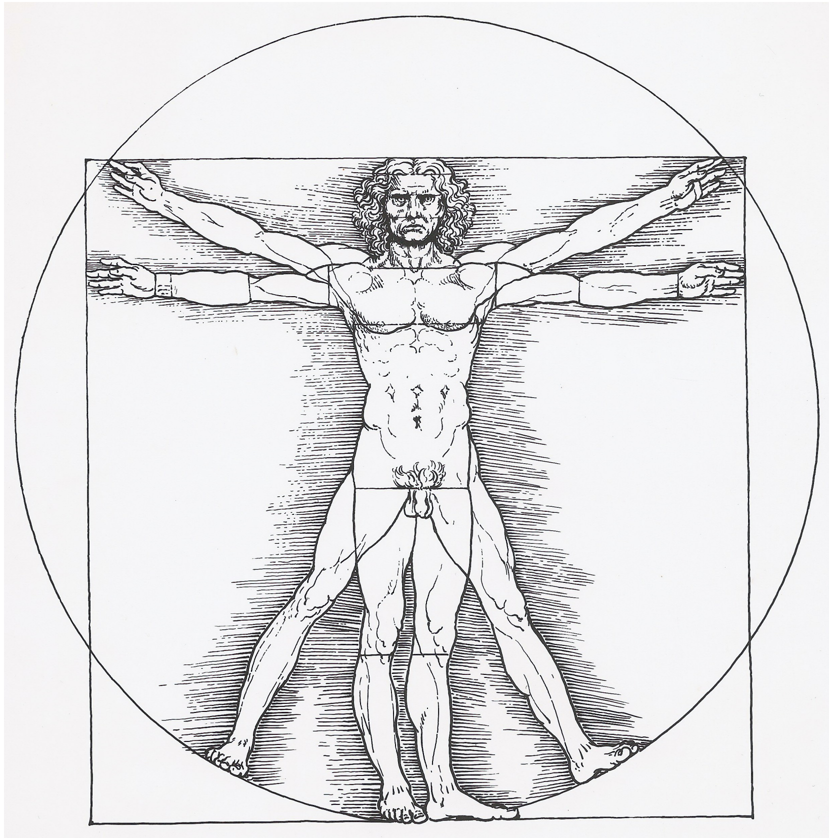
Vitruv
Marcus(?) Vitruvius Pollio(?)
Architekt und Bauingenieur
80-70 v.Chr. bis ca. 15 v.Chr.

Hat ein zehnbändiges Werk zur Baukunst herausgegeben. Das Werk ist im Mittelalter überraschend oft kopiert worden, obwohl es auf die romanischen und gotischen Bauten keinen Einfluss hatte. Es wurde zur Renaissance wiederentdeckt und beachtet.

Er behandelt sowohl die Technik als auch die Ästhetik von Bauten.

Der Vitruvianische Mann

Am Anfang des Bands 3 beschreibt er die Proportionen eines Menschen als Vorbild dafür, dass auch bei Gebäuden gewisse Proportionen eingehalten werden müssen.



tion in seiner Anlage gerechtfertigt werden, wenn er nicht, einem wohlgebildeten Menschen ähnlich, ein genau durchgeführtes Gliederungsgesetz in sich trägt.

2. Denn die Natur hat den Körper des Menschen so gebildet, daß das Angesicht von dem Kinn bis zu dem oberen Ende der Stirn und den untersten Haarwurzeln den zehnten Theil (der ganzen Körperlänge) ausmacht; das gleiche ebensoviel die Fläche der Hand vom Handgelenk bis zum Ende des Mittelfingers, der Kopf vom Kinn bis zum höchsten Punkte des Scheitels den achten Theil, ebensoviel vom unteren Ende des Nackens aus, vom oberen Ende der Brust bis zu den untersten Haarwurzeln den sechsten, bis zum höchsten Scheitelpunkte um den vierten Theil der Gesichtslänge mehr [1]). Von der Höhe des Gesichtes selbst aber ist vom Kinnende bis zum unteren Ende der Nase ein Dritttheil, ebensoviel beträgt die Nase von ihrem unteren Ende bis zu dem in der Mitte der Augenbrauen; von diesem Endpunkte bis zu den untersten Haarwurzeln, wo die Stirne gebildet wird, ist gleichfalls ein Dritttheil. Der Fuß aber mißt den sechsten Theil der Körperhöhe, der Vorderarm den vierten, die Brust gleichfalls den vierten Theil [2]). Auch die übrigen Glieder haben ihre Maßverhältnisse, deren sich auch die alten angesehensten Maler und Bildhauer bedient und dadurch großen und endlosen Ruhm erlangt haben.

3. In ähnlicher Weise aber müssen die Glieder der Tempel in Hinsicht auf die Gesammtmasse der ganzen Größe in den einzelnen Theilen Maßverhältnisse haben, die sich einander in vollkommenster Uebereinstimmung entsprechen. Der Mittelpunkt des Körpers ferner ist von Natur der Nabel. Denn wenn ein Mensch mit ausgespannten

[1]) Die Handschriften und meisten Ausgaben geben quartae (den vierten Theil). Da dieß unmöglich ist, indem nach Vitruv selbst die Höhe von den Haarwurzeln an der Stirne bis zum Scheitel ein Vierzigstel und nicht ein Zwanzigstel der Körperlänge beträgt, so ist eine Aenderung unerläßlich. Macht man aus dem Viertheil ein Fünftheil, so wird auch hier die Differenz zu groß und beträgt ein Dreißigstel. Marini nimmt daher an, es seien einige Worte ausgefallen und gibt statt ad summum verticem quartae — ad summum verticem tantumdem et oris quartae.

[2]) Von einer Achsel zur andern.

Händen und Füßen auf den Rücken gelegt wird und man den Zirkelmittelpunkt in seinen Nabel einsetzt, so werden, wenn man die Kreislinie beschreibt, von den beiden Händen und Füßen Finger und Zehen von der Linie berührt. Eben so, wie die Figur eines Kreises an dem Körper dargestellt wird, so wird auch die eines Quadrates an ihm gefunden. Denn wenn man vom unteren Ende der Füße bis zur Scheitelhöhe mißt und dieses Maß auf die ausgespannten Hände überträgt, so wird man dieselbe Breite wie Höhe finden, wie dieß bei Flächen ist, die nach dem Winkelmaß quadratisch gemacht sind.

4. Wenn daher die Natur den Körper des Menschen so gebildet hat, daß die Glieder seiner ganzen Gestalt in bestimmten Verhältnissen entsprechen, so scheinen die Alten mit Grund es so festgesetzt zu haben, daß sie auch bei der Ausführung von Bauwerken ein genaues Maßverhältniß der einzelnen Glieder zu der ganzen äußeren Gestalt beobachten. Wie sie daher bei allen Bauwerken Ordnungsvorschriften überlieferten, so thaten sie es besonders bei den Tempeln der Götter, bei welchen Werken Vorzüge und Mängel ewig zu sein pflegen.

5. Ebenso haben sie die Grundmaße, welche bei allen Bauwerken nothwendig zu sein scheinen, von den Gliedern des Körpers hergenommen, wie den Zoll (Finger), Palm (Handfläche), Fuß, die Elle (Ellenbogen, Vorderarm), und haben sie, eine vollkommene Zahl, welche die Griechen Teleion nennen, zu Grunde legend, eingetheilt. Als vollkommene Zahl aber haben die Griechen festgesetzt, was man zehn nennt, denn von den Händen ist die Zehn-Zahl der Zolle (Finger) und von den Zollen der Palm und von dem Palm der Fuß erfunden. Wie aber nach den Gliedern der beiden Handflächen zehn die vollendete Zahl ist, so billigt auch Plato diese Zahl als die vollendete, deshalb, weil die Zehnheit aus den einzelnen Fingern, welche bei den Griechen Monades heißen, entsteht. Sobald ihrer aber elf oder zwölf geworden sind, so können sie, weil sie dieselben überschreiten, keine vollkommene Zahl mehr sein, bis sie zu einem anderen Zehner gelangen, denn die einzelnen Dinge sind Theile jener Zahl.

6. Die Mathematiker aber, damit nicht einverstanden, haben gesagt, daß die Zahl, welche sechs genannt wird, die vollkommene sei, deshalb, weil diese Zahl eine Gliederung hat, die ihrem auf der

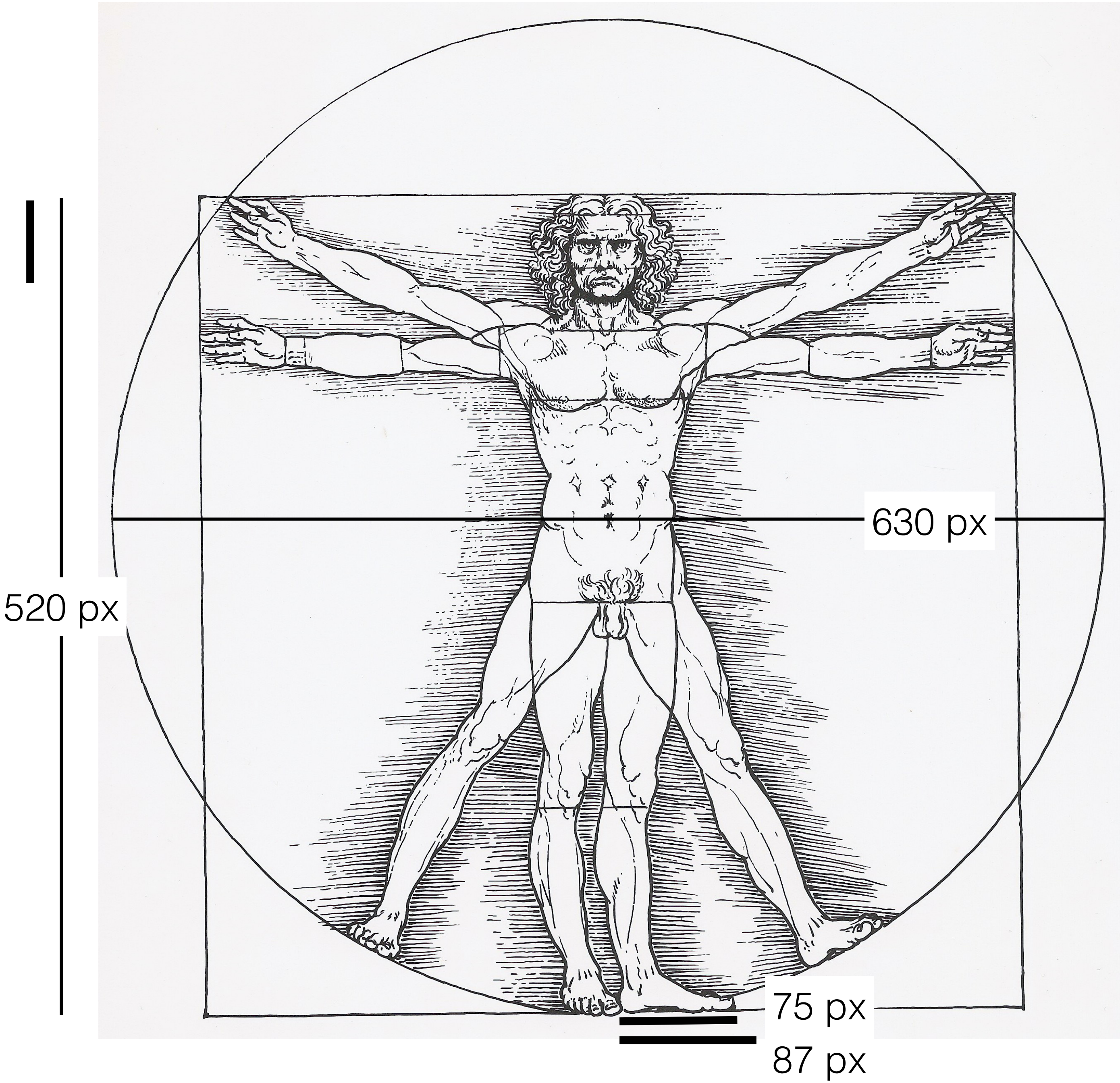
Übersetzung Dr. Franz Reber, 1865

Bauchnabel - Füße
315 px

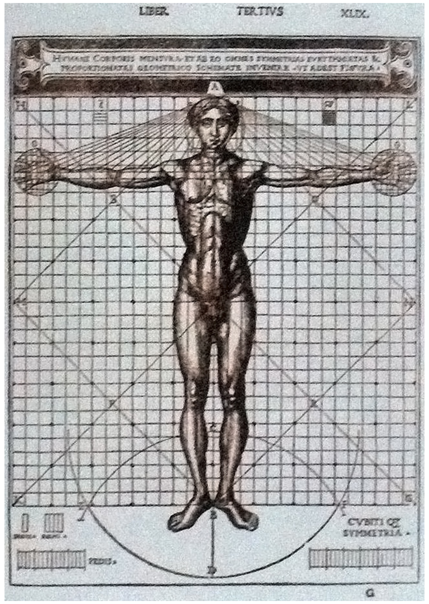
$$\frac{315}{520} \approx 0{,}60577$$

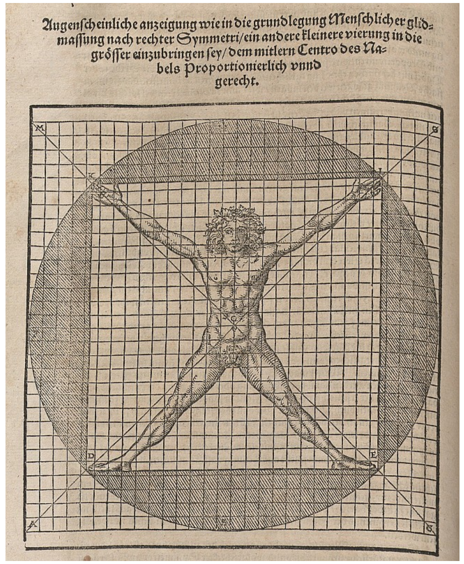
Fuß: 70 px
75·6 = 450
520:6 ≈ 87

Mein Fuß: 28 cm
28·6 = 168
182:28 ≈ 6,5



Vitruv hat seine Bücher nicht illustriert.
Verschiedene Maler haben die Beschreibung in ein Bild umgesetzt.





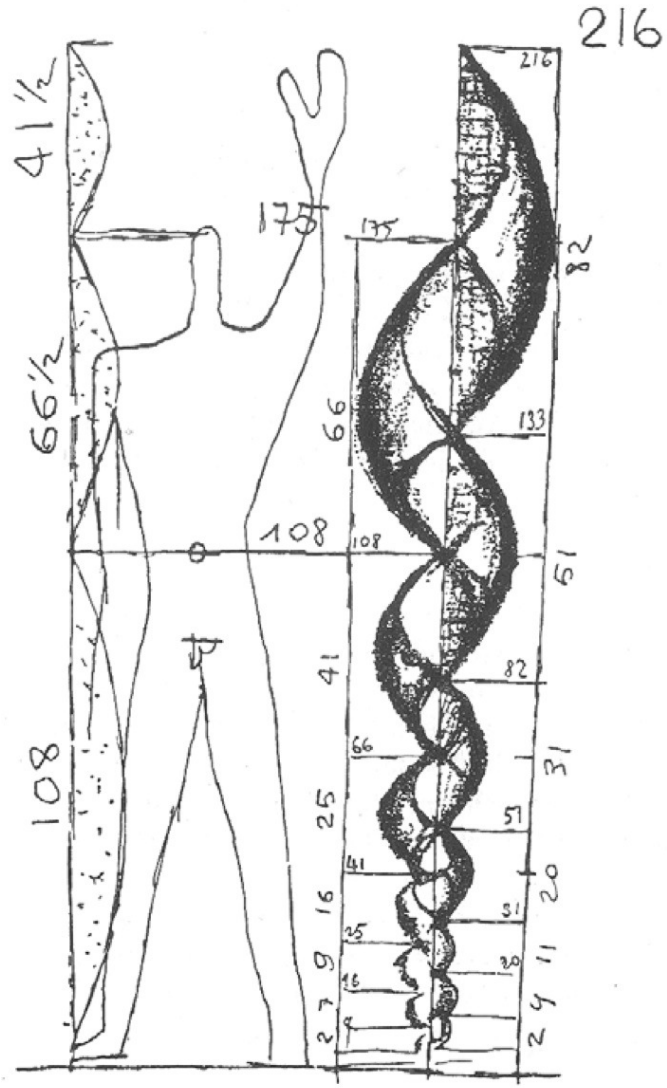
Kritik: (Auch Leonardo) Menschen haben nicht die gleichen Proportionen, lassen sich nicht in den gleichen Maßstab pressen. (eigene Erfahrung beim Kleiderkauf)

Der Modulor (Le Corbusier)

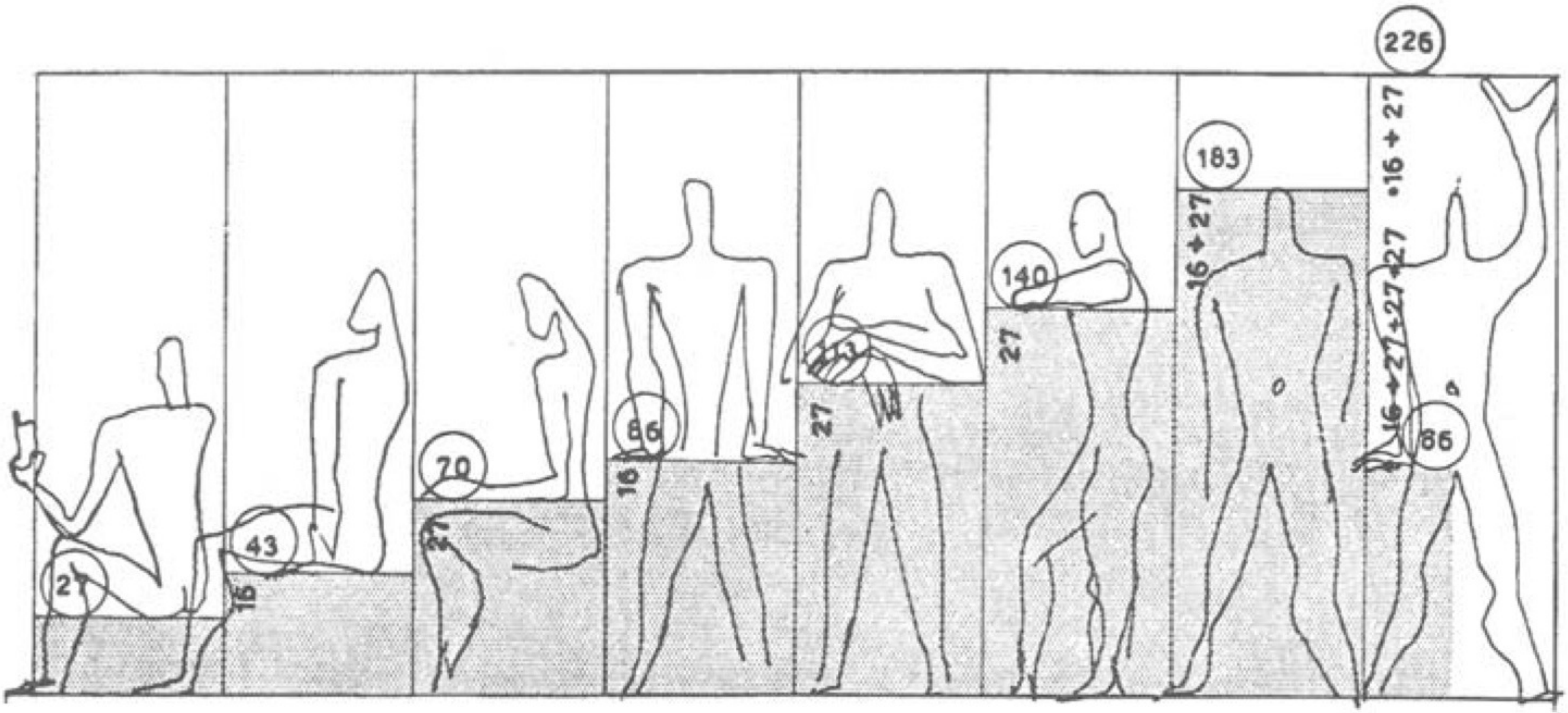
Seit 1940 arbeitete Corbusier an einem Maßsystem für Gebäude und Möbel, das sich am menschlichen Körper orientierte. Dieses System wurde im Buch „Le Modulor“ 1948 veröffentlicht, 1955 erschien „Le Modulor 2“ mit einem leicht veränderten System.

175		216	
108	0,6171	133	0,6157
66	0,6111	82	0,6165
41	0,6212	51	0,6220
25	0,6098	31	0,6078
16	0,6400	20	0,6452
9	0,5625	16	0,8000
7	0,7778	14	0,8750

Bei beiden Größenfolgen erkennt man das Fibonacci-System $m_{n+1} = m_n + m_{n-1}$.



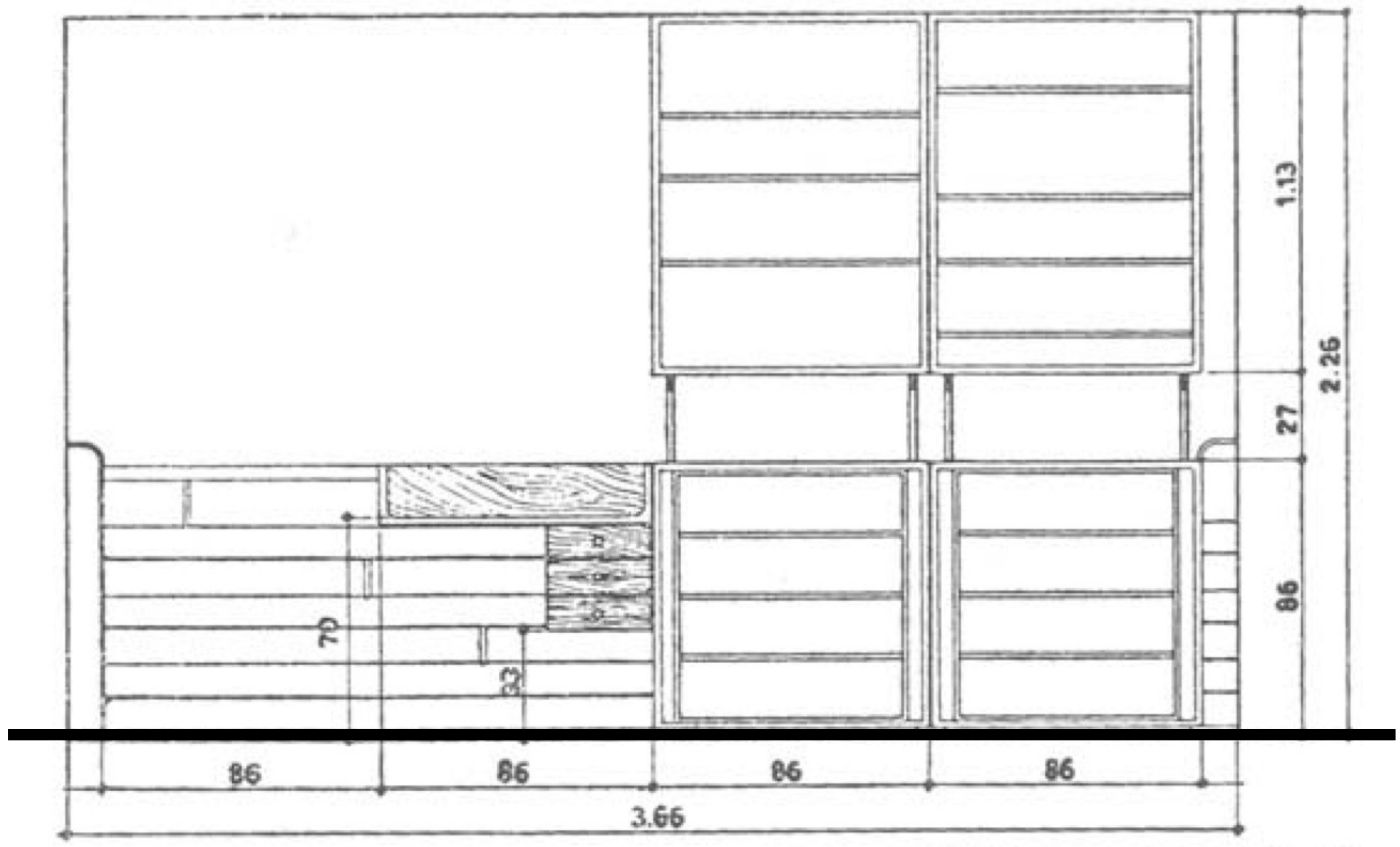
Der Modulor (Le Corbusier)



27	43	70		113		183	
			86		140		226
0.628	0.614	0.6195		0.6175			
			0.6143		0.6195		

Das Maßsystem aus Modulor 2

Ein Möbelstück nach den Maßen des Modulors 2



heutige Küchenplanung

Die ideale Arbeitshöhe

Bei der Küchenplanung in Zusammenarbeit mit einem Küchenplaner ist die richtig bestimmte Arbeitshöhe (Korpushöhe) das Wesentliche bei der Küchenplanung. Die Arbeitshöhe wird meist auf die „Hauptarbeitsperson“ abgestimmt. Mit Hilfe folgender Tabelle können Sie Sich schon im Vorfeld einen eigenen Überblick verschaffen über die empfohlenen und rückenschonenden Arbeitshöhen. Die Empfehlungen:

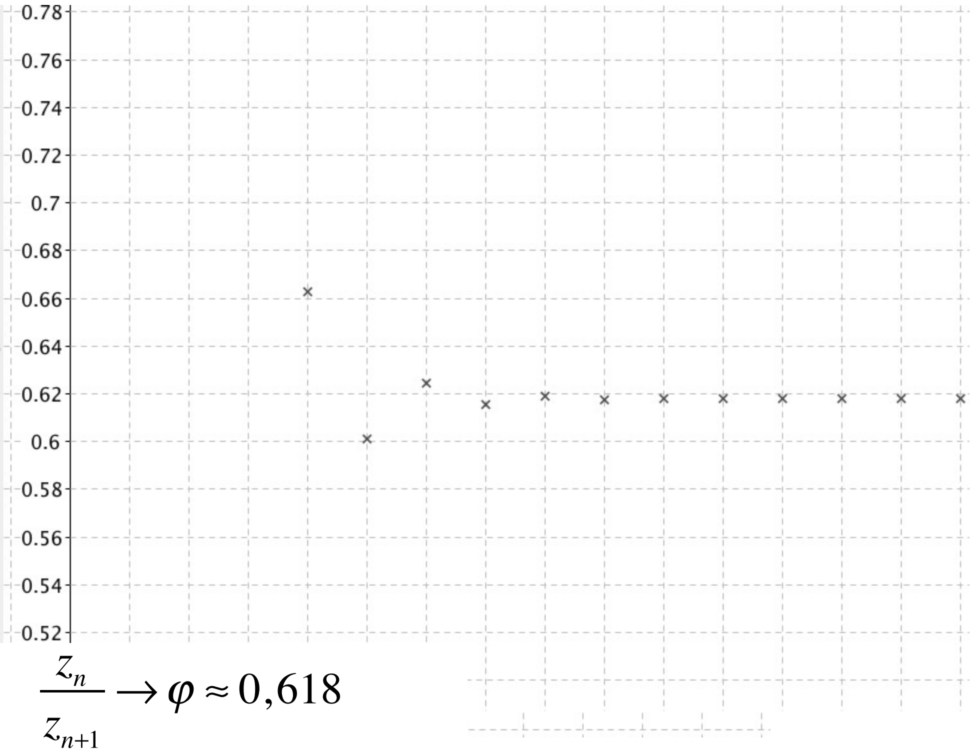
Körpergröße in cm	Arbeitshöhe in cm
155	85
160	90
165	93
170	95
175	97
180	100
185	103
190	106
195	108
200	110

„form follows function“

Goldener Schnitt und allgemeine Fibonacci-Zahlen (Corbusier)

1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181

1	1
2	30
3	31
4	61
5	92
6	153
7	245
8	398
9	643
10	1041
11	1684
12	2725
13	4409
14	7134
15	11543
16	18677
17	30220
18	48897
19	79117



Der Grenzwert $\frac{z_n}{z_{n+1}} \to \varphi \approx 0{,}618$

hängt nur vom Bildungsgesetz ab $z_{n+1} = z_n + z_{n-1}$

nicht von den Startwerten.

Experimentier-
datei