Die Fibonacci-Zahlen

Leonardo Pisano

Leonardo von Pisa ca. 1170 bis 1250
Sohn eines Kaufmanns aus Pisa
Sein Vater war Handelsattaché der Republik Pisa in Bugia (im heutigen Algerien).
Er zeigte früh eine mathematische Begabung, die sein Vater förderte. Auf Handelsreisen nach Ägypten, Syrien, Griechenland und Sizilien baute er sein mathematisches Wissen aus.
Hier lernte er auch arabische und indische Mathematik kennen und vor allem das Dezimalsystem.

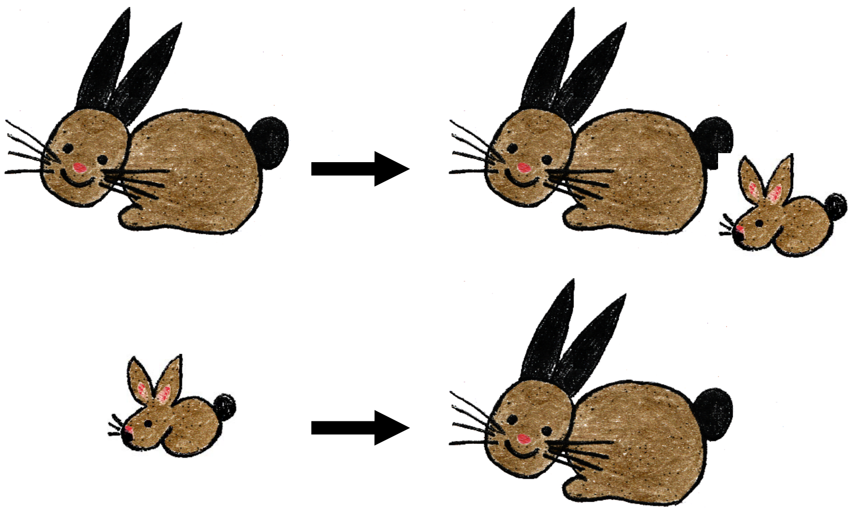
Dazu schrieb er 1202 das Werk „Liber abaci“, das in den nachfolgenden Jahren (ab ca. 1260) ein bedeutendes Werk für die Mathematikausbildung von Kaufleuten in Norditalien wurde. Insbesondere behandelte Leonardo Rechenaufgaben im Dezimalsystem und nicht im römischen Zahlsystem.

Zum Namen
Sein korrekter Name ist Leonardo Pisano, sein Vater hieß Guglielmo Bonaccio.
Leonardo bemerkte selbst in seinen Schriften, dass er der Sohn des Bonaccio ist (Lat.: filius Bonacci).
Beim Studium seiner Schriften machten Mathematiker/Historiker (u.a. Éduard Lucas, 1842-1891) daraus den Namen „Fibonacci“ und zitierten darunter mathematische Ergebnisse, u.a. die berühmte Zahlenfolge.

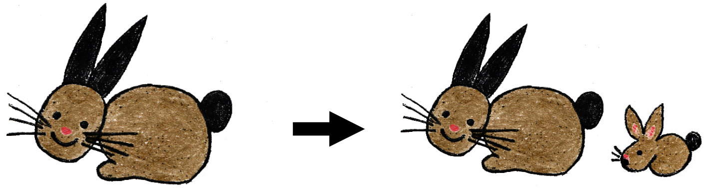
Fibonacci-Zahlen

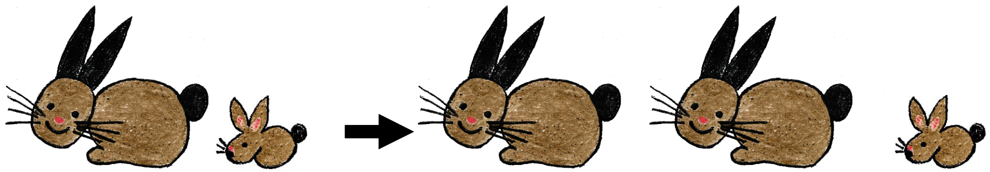
Auf Seite 124 steht im „Liber abaci“ folgende Aufgabe:

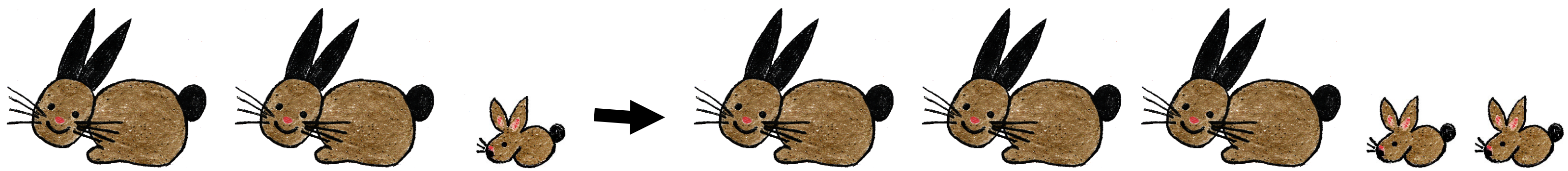
Ein Mann hielt ein Paar Kaninchen an einem Ort, der ringsum von einer Mauer umgeben war, um herauszufinden, wie viele Paare daraus in einem Jahr entstünden. Dabei ist es ihre Natur, jeden Monat ein neues Paar auf die Welt zu bringen, und sie gebären erstmals im zweiten Monat nach ihrer Geburt.

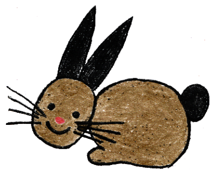
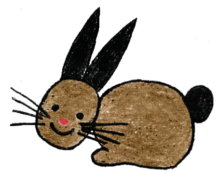
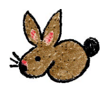


Fibonacci-Zahlen

1. Monat 

2. Monat 

3. Monat 

4. Monat 3x  2x  5x  3x 

also: 1 —> 2 —> 3 —> 5 —> 8 —> …

Fibonacci-Zahlen

Definition der Fibonacci-Zahlenfolge

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

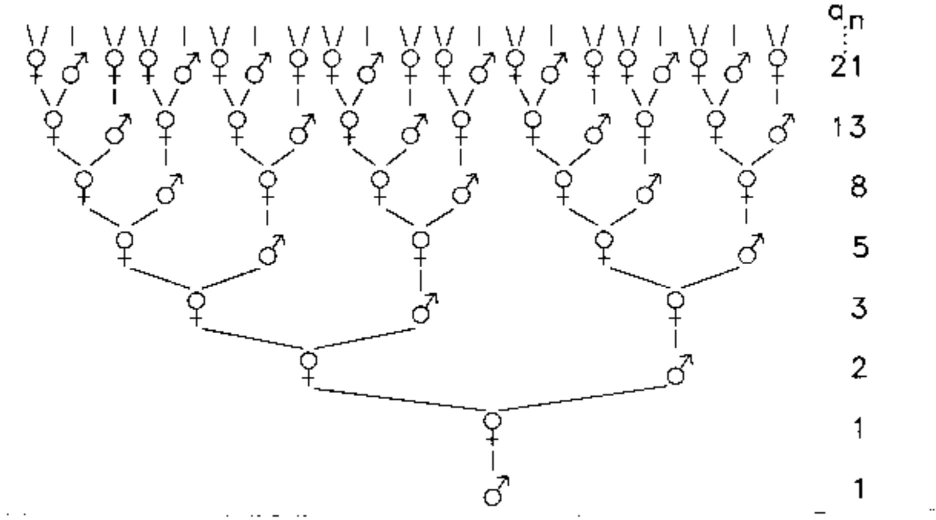
Index n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon. Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

also z.B. $F_7 = 13$ Die 7. Fibonacci-Zahl ist 13.

25 ist keine Fibonacci-Zahl,
55 ist eine Fibonacci-Zahl, nämlich die 10.

Fibonacci-Zahlen

Praktische Anwendungen



Der Stammbaum einer (Bienen-)Drohne

Wichtigste Fibonacci-Verhältnisse sind:

0,382	0,5	0,618	1,618
38,2%	50%	61,8%	161,8%

Aktien, Kursverlaufsanalyse

Bei der Technischen Analyse nutzt man nun diese Verhältnisse zum einen bei der Periodenwahl in der Indikatorenanalyse und zum anderen bei der Kurszielbestimmung. Bekannte Untergruppen dieser Zyklentechnik sind Fibonacci: -Extensions -Retracement Extenions -Pull Extensions -Time Extensions (Ratio) -Time Reverse Time Extensions -Fanlines

Es erstaunt immer wieder, wie treffsicher die Methode ist.Nuten Sie zB die FibonaccyRetracements um bereits erarbeitete Unterstützungen/Widerstände erneut zu belegen.Wo diese deckungsgleich sind, wird die Bestandskraft verstärkt. Die Fehlerquote der Fibonaccy-Technik ist jedoch nicht zu unterschätzen, da sollte man die Fibonaccy-Methode mit anderen Techniken der TA gekoppeln.

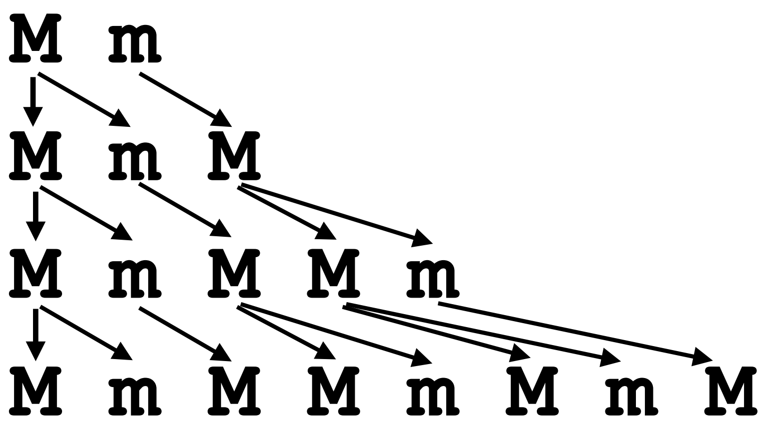
1. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

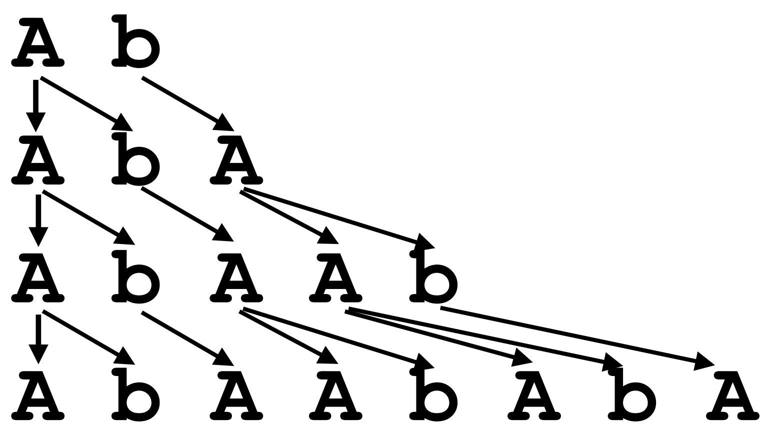
<u>Das Prinzip der stetigen Teilung</u>

Jeder Major **M** wird zerlegt in einen neuen (kleineren) Major und einen neuen Minor **m** und jeder Minor bleibt unzerteilt, wird aber zum neuen Major.

<u>Das Prinzip der Kaninchenvermehrung</u>

Jedes alte Kaninchen **A** bleibt alt, bringt aber ein Babykaninchen **b** zur Welt und jedes Baby wird zu einem alten Kaninchen.





Fibonacci-Wörter

$A \longrightarrow A\,b$
$b \longrightarrow A$

n	
1	b
2	A
3	Ab
4	AbA
5	AbAAb
6	AbAAbAbA
7	AbAAbAbAAbAAb
8	AbAAbAbAAbAAbAbAAbAbA

$$w_1 = b \quad w_2 = A$$

$$w_{n+1} = w_n \,\&\, w_{n-1}$$

Die Länge des *n*-ten Wortes ist gerade die *n*-te Fibonacci-Zahl

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

Index n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon. Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

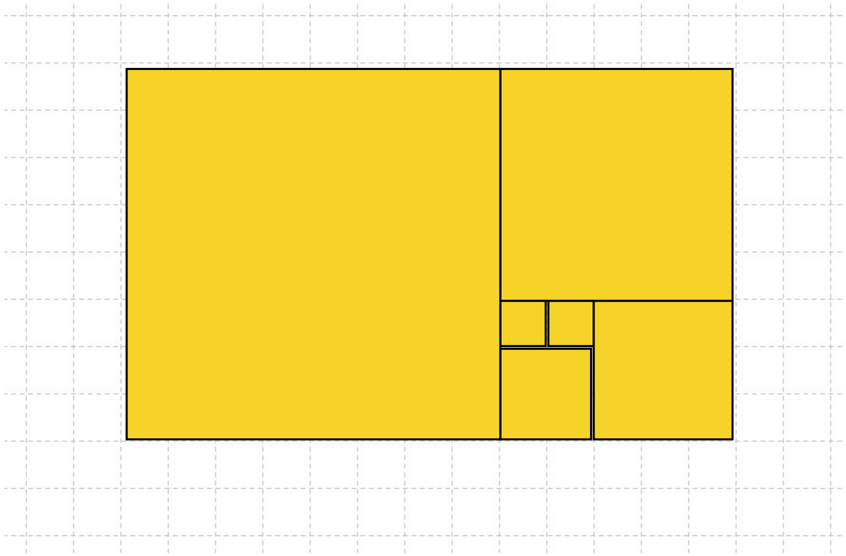
$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_u = F_{u+1}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_g = F_{g+1} - 1$$

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F-Zahl	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921	20736

$$F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} + F_3^{\ 2} + F_4^{\ 2} + F_5^{\ 2} + \ldots + F_n^{\ 2} = F_n \cdot F_{n+1}$$



Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

Index n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Fibon. Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Gesetzmäßigkeiten zur Teilbarkeit

z.B. Ist der Index n durch 5 teilbar,
so ist auch die Fibonacci-Zahl F_n durch 5 teilbar.

ab n=5 gilt: Ist die Fibonacci-Zahl F_n eine Primzahl, so ist auch der Index n eine Primzahl.
Nicht umgekehrt, denn F_{19} = 4181 = 37·113

ab n=3 gilt: Ist m ein Vielfaches von n, so ist auch F_m ein Vielfaches von F_n.

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

„Sprünge“ beim Berechnen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_{2n} = \left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) F_n$$

rechts vom Gleichheitszeichen stehen drei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen

Beispiel: In der Tabelle oben haben wir für n = 11 noch alle Zahlen für die Formel stehen.

$$F_n = F_{11} = 89 \qquad F_{n-1} = F_{10} = 55 \qquad F_{n+1} = F_{12} = 144$$

$$F_{2n} = F_{22} = \left(55 + 144\right) \cdot 89 = 199 \cdot 89 = 17711$$

2. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
k		1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,6190	1,6176	1,6181	1,617977

Wachstumsfaktor: Um welchen Faktor k wird eine Fibonacci-Zahl vergrößert, um die nächste zu erhalten? $F_{n+1} = k_n \cdot F_n$

Der Wachstumsfaktor nähert sich offenbar immer genauer $\Phi \approx 1{,}6180\ldots$
Beweis:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad | \quad : F_n \qquad \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Beide Brüche sind jeweils eine Fibonacci-Zahl geteilt durch die vorhergehende F-Zahl.

setze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = x + 1$$

Das ist die charakteristische Gleichung für Φ.

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

„Sprünge“ beim Berechnen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$F_{n+k} \approx F_n \cdot \Phi^k$ Man kann um k Schritte weiterspringen.

Beispiel: $F_7 = 13$ Zu F_{12} ist ein Sprung um $k = 5$ Positionen.

$$F_{12} = F_{7+5} \approx F_7 \cdot \Phi^5 \approx 13 \cdot 1{,}618^5 \approx 144{,}157$$

$$F_{22} = F_{12+10} \approx 144 \cdot \Phi^{10} \approx 144 \cdot 1{,}618034^{10} \approx 17710{,}83$$

Achtung: Je größer die Sprünge sind, desto genauer muss Φ sein.

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

„Sprünge“ beim Berechnen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Das ist eine rekursive Formel. (Leonardo Pisano, 1202)
recurrere (lat.) zurücklaufen

Es dauerte über 500 Jahre, bis die Mathematiker eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen gefunden haben.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{(\Phi)^n} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{(-\varphi)^n}\right]$$

Formel von Binet (1843)
Moivre (1718), Daniel Bernoulli (1728)

Gesetzmäßigkeiten für die Fibonacci-Zahlen

„Sprünge“ beim Berechnen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fibon.Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Da φ^n mit wachsende
(z.B. $\varphi^{10} \approx 0{,}00813$) ka
den hinteren Teil verr
dann als Näherungsf

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n \approx 0{,}447136 \cdot 1{,}618033989^n$$

Auch hier muss man für größere n mit sehr genauen Näherungen für Φ und $\sqrt{5}$ rechnen.

n	F	Näherung
1	1	0,723570
2	1	1,170736
3	2	1,894250
4	3	3,064897
5	5	4,959003
6	8	8,023667
7	13	12,982293
8	21	21,005351
12	144	143,960717

3. Zusammenhang
Goldener Schnitt - Fibonacci-Zahlen

Wenn die Quotienten (Fibonacci-Zahl : vorhergehende Fibonacci-Zahl) im Grenzwert gegen Φ konvergieren, dann konvergieren die umgekehrten Quotienten (vorhergehende Fibonacci-Zahl : Fibonacci-Zahl) gegen den Kehrwert von Φ, das ist φ.

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \Phi \quad \text{also} \quad \frac{F_{n-1}}{F_n} \to \frac{1}{\Phi} = \varphi$$

Die Fibonacci-Zahlen liefern gute Näherungen für φ

$$\frac{2}{3}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{5}{8}, \ \frac{8}{13}, \ \frac{13}{21}, \ \frac{21}{34}, \ \ldots$$