Die Eigenschaften von Chaos

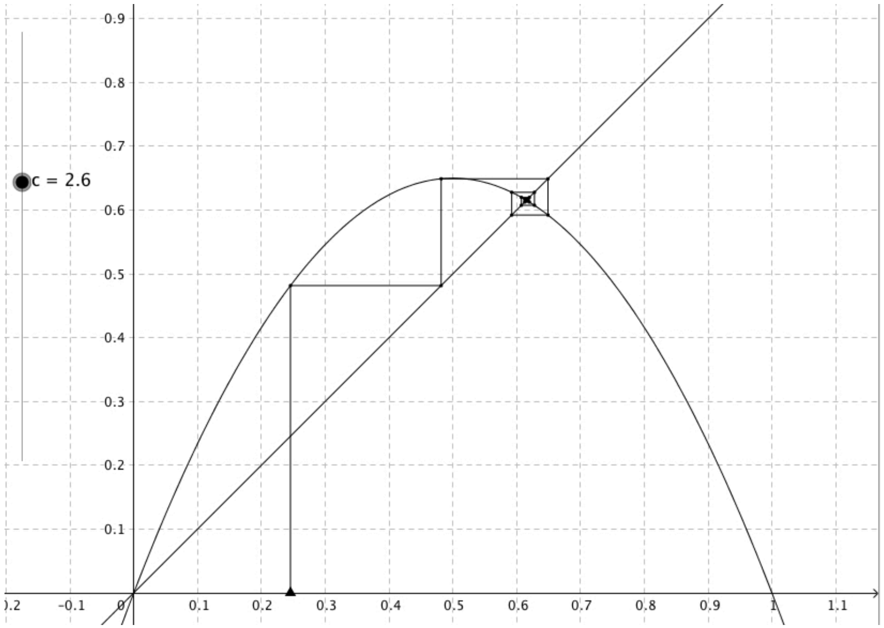
Dynamisches System

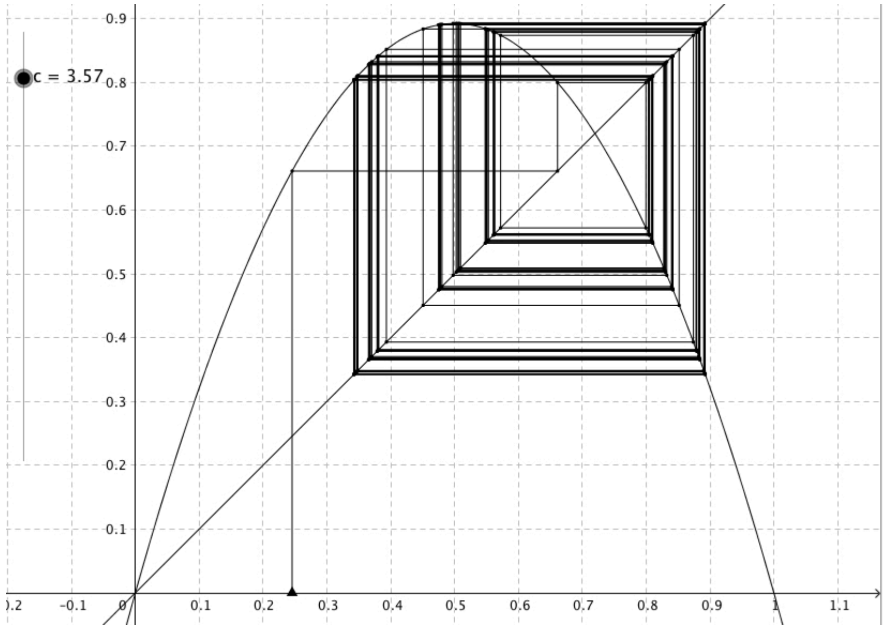
$$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) = x_1$$

$$x_1 \xrightarrow{f} f(x_1) = x_2 = f^2(x_0)$$

$$x_2 \xrightarrow{f} f(x_2) = x_3 = f^3(x_0)$$

Die Funktion f ist von Parametern abhängig, die darüber entscheiden, ob das System stabil ist oder chaotisch.





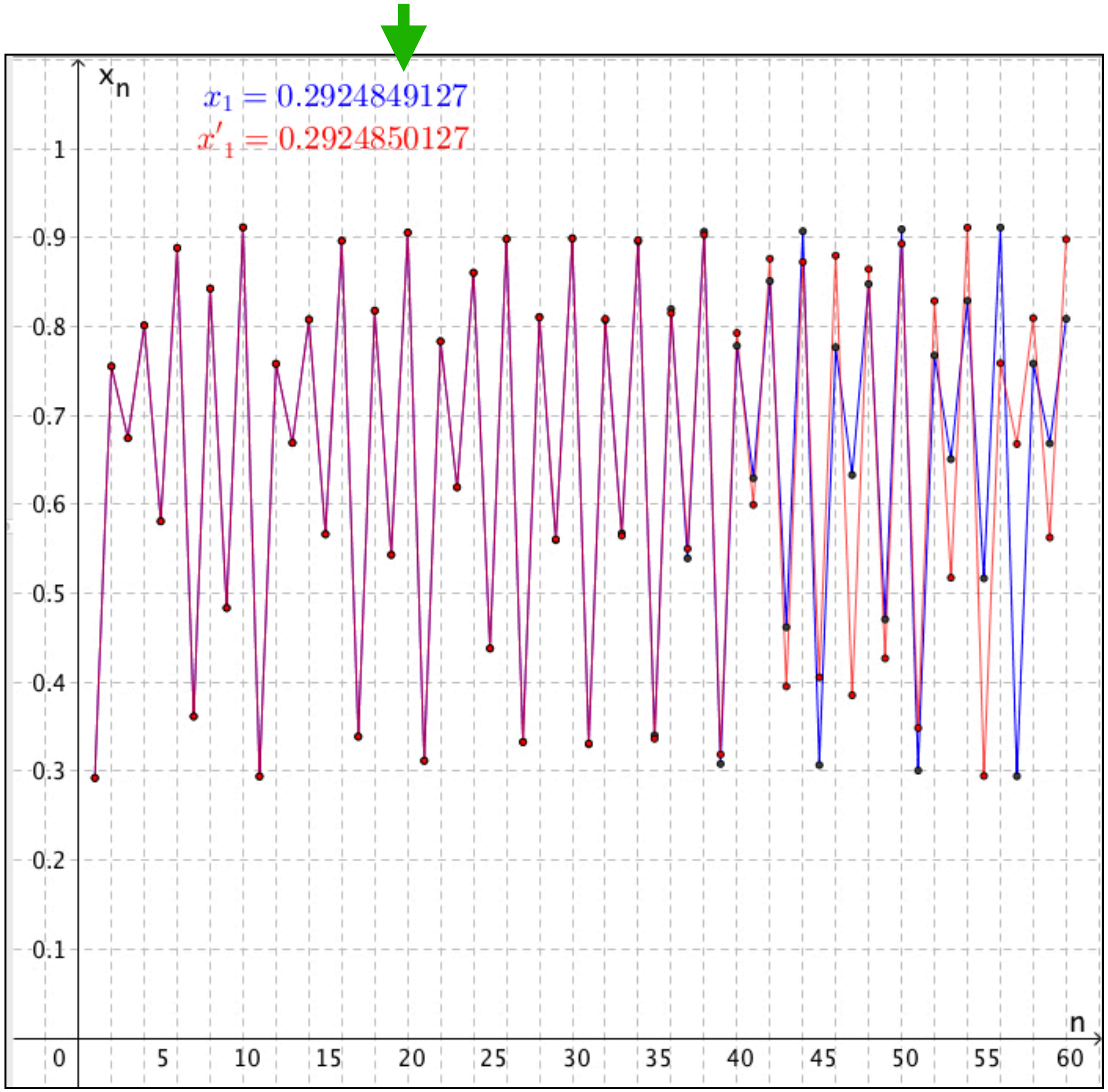
Dynamisches System

Ein dynamisches System ist chaotisch, wenn es die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1. Sensitivität
2. Mischungseigenschaft
3. Dichte periodische Punkte

1. Sensitivität

Die Werte des dynamischen Systems hängen sehr sensibel von den Anfangswerten ab.



1Sensitiv.ggb

1. Sensitivität

Ein dynamisches System heißt sensitiv, wenn folgendes Vorgehen immer erfolgreich ist:

Man wählt ein Intervall im zulässigen Bereich.
Dann gibt es darin einen Startwert und einen passenden Nachbarwert,
so dass die Iteration mit dem Startwert und die mit dem Nachbarwert
nach einer genügenden Anzahl von Schritten
weiter auseinander liegen als ein einheitlicher Abstand.

$f : I \to I$ dynamisches System

Es gibt ein $\delta > 0$

so dass es für alle $J \subseteq I$ ein $x_0 \in J$ und ein $x'_0 \in J$

und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so dass $\left| f^n(x_0) - f^n(x'_0) \right| > \delta$

1. Sensitivität

Folgen der Sensitivität:

Rundungen von Zahlen verändern das langfristige Ergebnis einer Iteration. Andere Rundungen (da z.B. anderer Computer oder andere Software) führen zu verschiedenen Ergebnissen.

Andere Formeln führen zu anderen Ergebnissen.

Beispiel:

$$f(x) = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$$

A	B
$4x(1-x)$	$4x-4x^2$
0.1	0.1
0.36	0.36
0.9216	0.9216
0.28901376	0.28901376
0.82193922612265	0.82193922612265
0.585420538734197	0.585420538734198
0.970813326249438	0.970813326249438
0.113339247303761	0.113339247303763
0.401973849297512	0.401973849297517
0.961563495113813	0.961563495113816
0.147836559913285	0.147836559913273
0.503923645865164	0.503923645865129

(Chaos) Sensitivität bedeutet das ***praktische*** *Zusammenbrechen der Vorhersagbarkeit, obwohl ein streng deterministisches Gesetz vorliegt.*

1. Sensitivität

Folgen der Sensitivität:

~~Laplacescher Dämon~~

~~„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.“~~

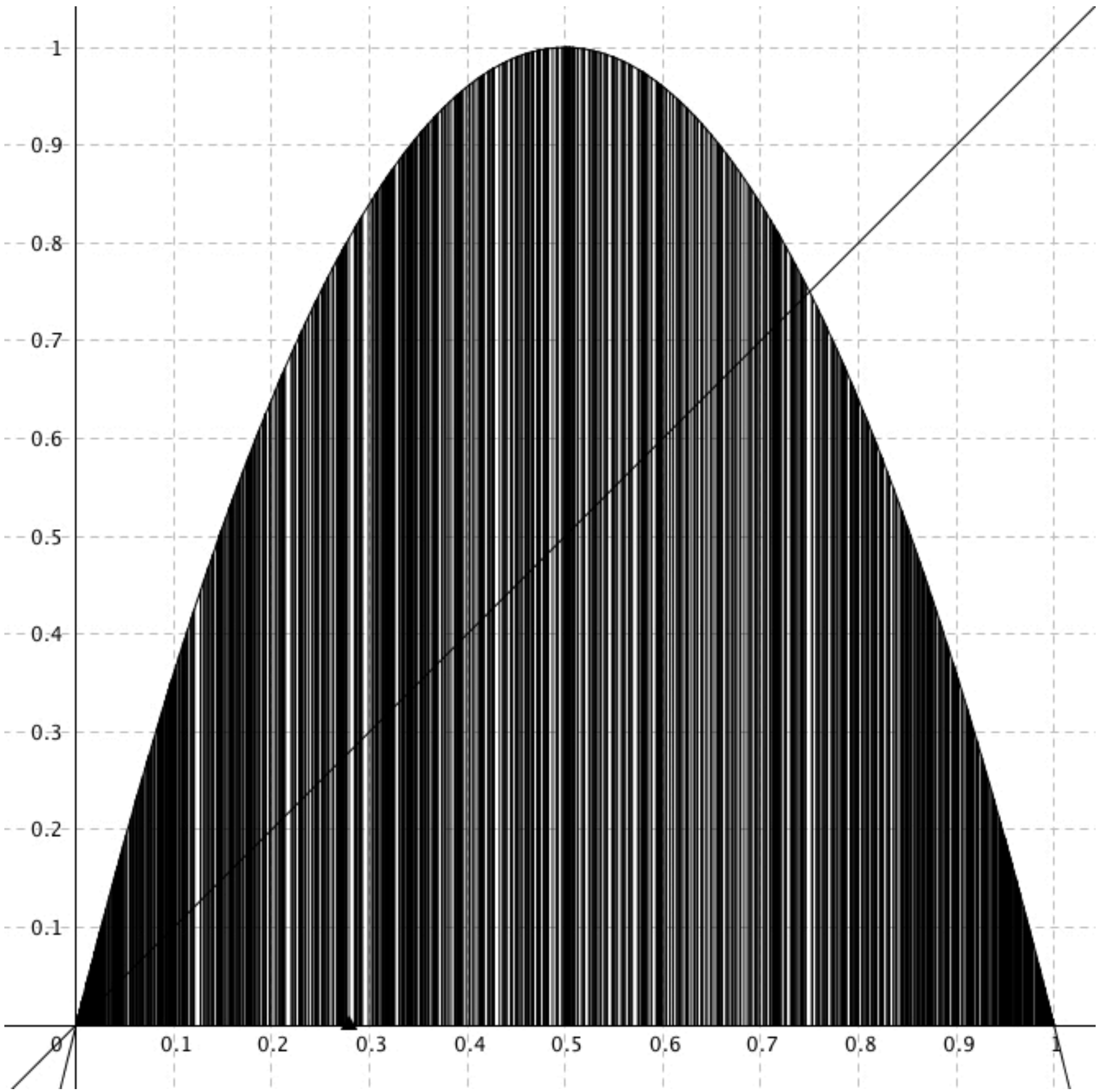
(Laplace, 1814)

ca. 1920 Quantenphysik

ca. 1980 Chaostheorie

2. Mischungseigenschaft

Jede Iteration erreicht letztlich jeden möglichen Wert.



2Mischen.ggb

2. Mischungseigenschaft

Ein dynamisches System erfüllt die Mischungseigenschaft, wenn folgendes Vorgehen immer erfolgreich ist:

Man wählt zwei beliebige Intervalle im zulässigen Bereich.

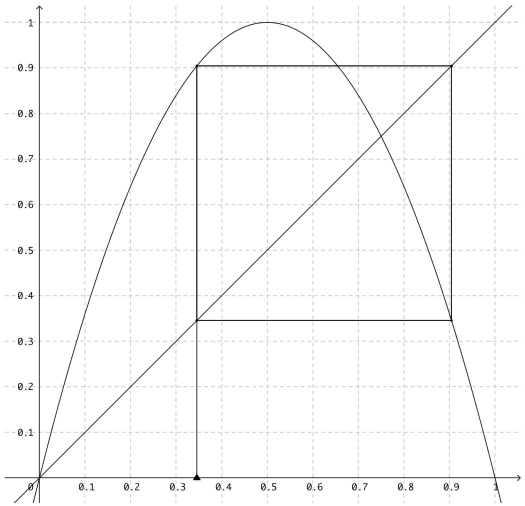
Dann gibt es im ersten Intervall einen Startwert, so dass nach einer genügenden Anzahl von Schritten das zweite Intervall getroffen wird.

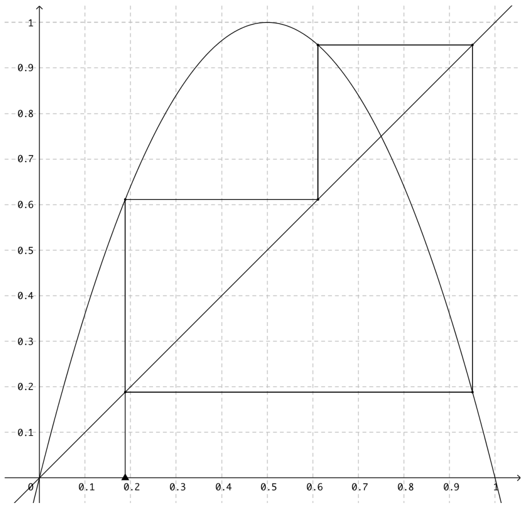
$f: I \to I$ dynamisches System

Dann gibt es für alle Intervalle $I_1 \subseteq I$ und $I_2 \subseteq I$ einen Startwert $x_0 \in I_1$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n\left(x_0\right) \in I_2$

3. dichte periodische Punkte

Es gibt überall Startwerte, die in periodische Iterationsverläufe münden

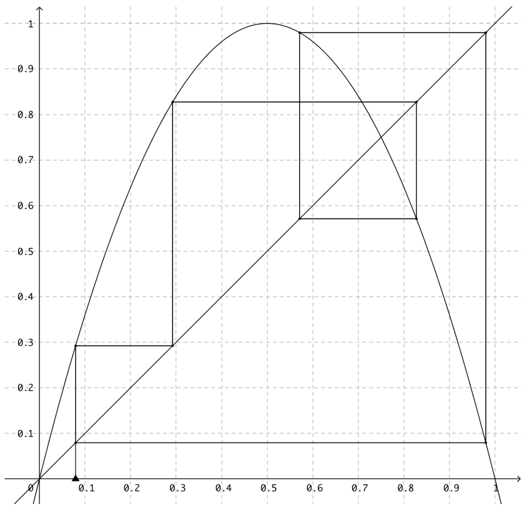


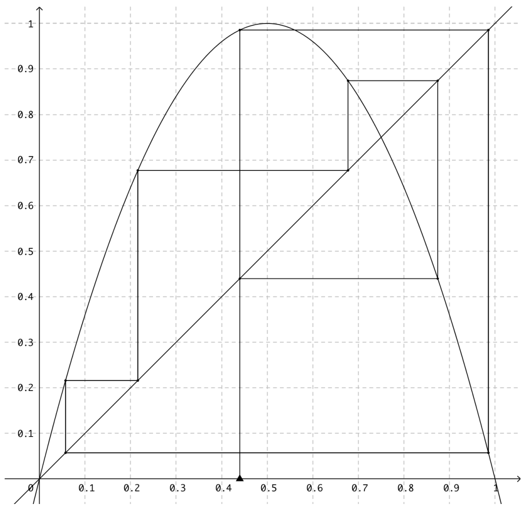


Eine Iteration heißt (sofort) periodisch, wenn nach n Schritten der Anfangswert exakt wieder erreicht wird.

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$

so dass $f^n\left(x_0\right) = x_0$





3. dichte periodische Punkte

Ein dynamisches System hat dichte periodische Punkte, wenn folgendes Vorgehen immer erfolgreich ist:

Man wählt ein beliebiges Intervall im zulässigen Bereich.

Dann gibt es darin einen Startwert, der nach einer bestimmten Anzahl von Schritten wieder getroffen wird.

$f: I \to I$ dynamisches System

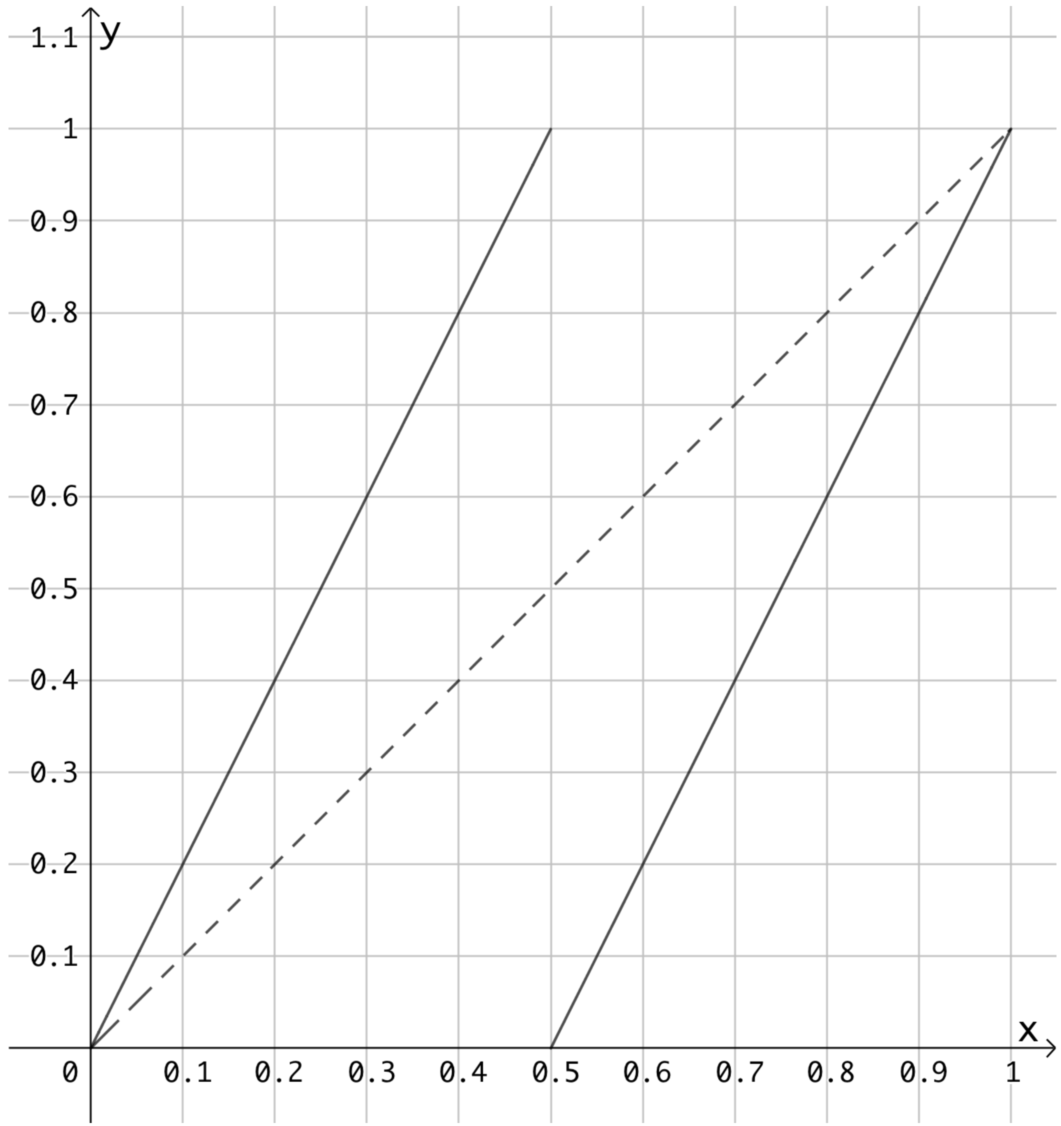
Dann gibt es zu jedem Intervall $J \subseteq I$ einen Startwert $x_0 \in J$

und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n\left(x_0\right) = x_0$

Ein nachweislich chaotisches System

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x < 0{,}5 \\ 2x - 1 & \text{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases}$$

Die Funktion heißt nach ihrem Graph „Sägezahn-Funktion“, der Graph „Sägezahn-Kurve“.



Zahlen im Dualsystem

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es besonders vorteilhaft, die Zahlen von 0 bis 1 im Zweiersystem zu schreiben.

Stelle hinter dem Komma	0.	1	2	3	4	5	6	7	8
Wertigkeit		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

$$\text{Beispiel: } 0.10011 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{16+2+1}{32} = \frac{19}{32} = 0{,}59375$$

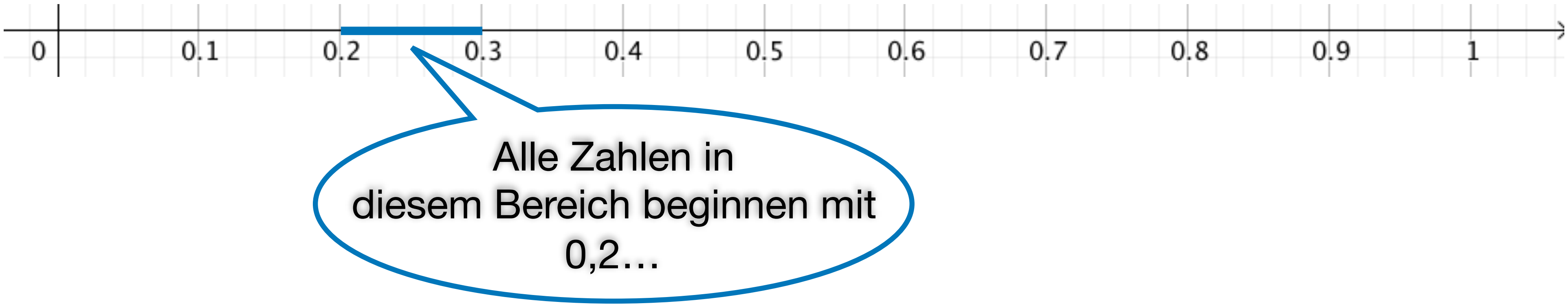
Die Multiplikation mit 2 ist eine Verschiebung des Punktes um eine Stelle nach rechts.

$$\text{Beispiel: } 2 \cdot 0.10011 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32}$$

$$= 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1.0011$$

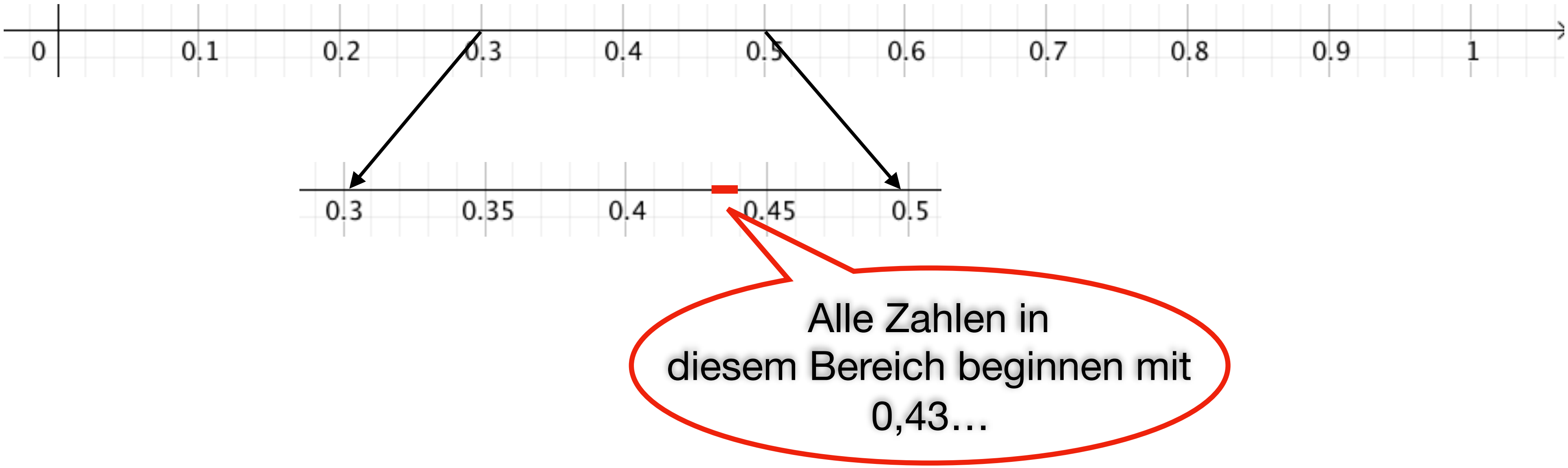
Zahlbereiche im Dualsystem

Das Zehner-System



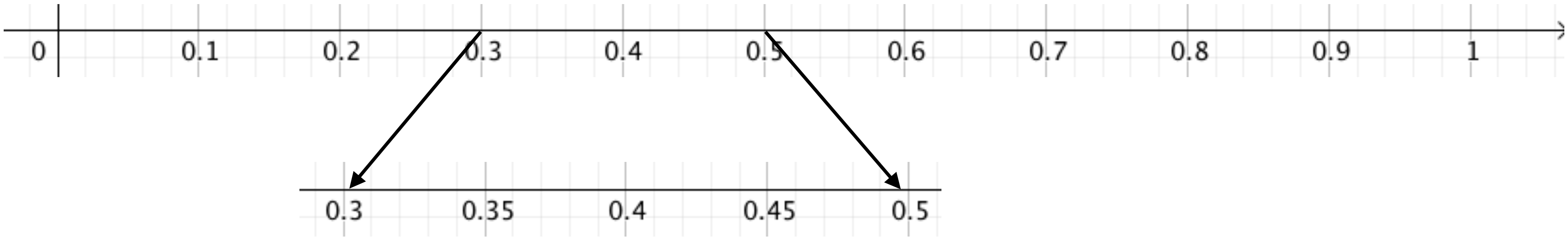
Zahlbereiche im Dualsystem

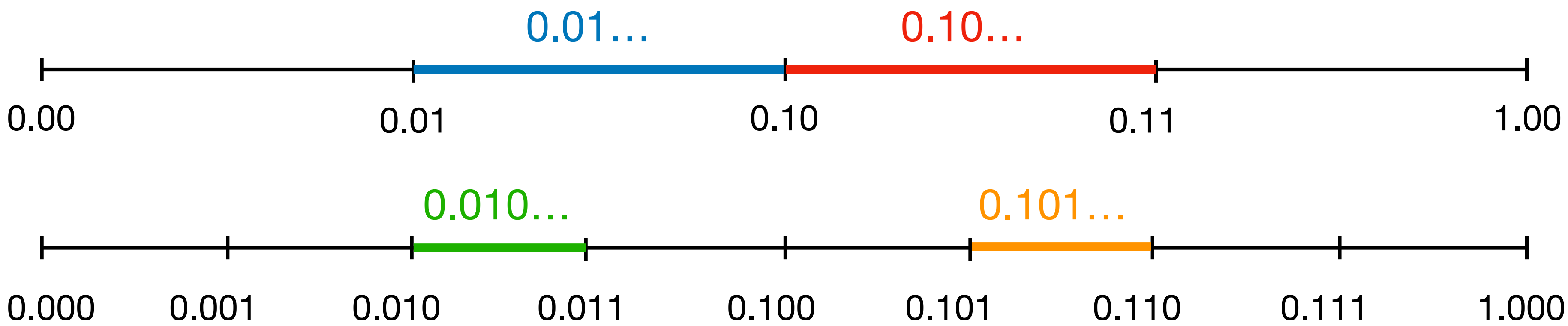
Das Zehner-System



Zahlbereiche im Dualsystem

Das Zehner-System

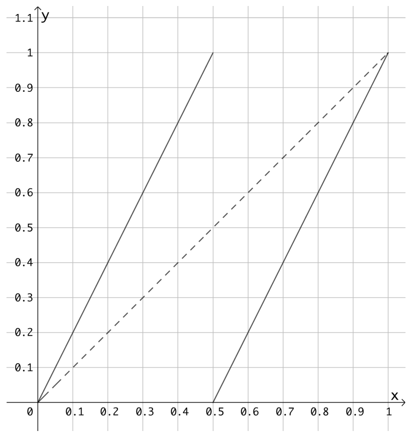




Ein nachweislich chaotisches System

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x < 0{,}5 \\ 2x - 1 & \text{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{(dezimal)}$$

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x < 0.1 \\ 2x - 1 & \text{für } 0.1 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{(dual)}$$



Iteration mit der Sägezahnfunktion:

Alle Zahlen, die mit 0.0… beginnen sind kleiner als $0{,}5 = 0.1$, also werden sie lediglich mit 2 multipliziert. D.h. der Punkt rutscht eine Stelle nach rechts. Dann beginnt die neue Zahl wieder mit 0. … .

Alle Zahlen, die mit 0.1… beginnen sind $0{,}5 = 0.1$ oder größer. Also werden sie zunächst mit 2 multipliziert. D.h. der Punkt rutscht eine Stelle nach rechts und die verdoppelte Zahl beginnt mit 1. … . Mit dem „–1“ wird diese 1 subtrahiert. Dann beginnt das Endergebnis wieder mit 0. … .

Beispiel: $S(0.10011) = 0.0011$

$S(0.0011) = 0.011$

1. Sensitivität

Man wählt ein zulässiges Intervall. Dann gibt es darin einen Startwert und einen passenden Nachbarwert, so dass die Iteration mit dem Startwert und die mit dem Nachbarwert nach einer genügenden Anzahl von Schritten weiter auseinander liegen als ein vorgegebener Abstand.

Ein Beispiel, um das allgemeine Vorgehen zu zeigen.

Wir wählen das Intervall, in dem alle Zahlen mit 0.0101… beginnen.

Dann ist x_0 =0.$\underline{0101}$10 ein Startwert aus dem Intervall und x'_0 =0.$\underline{0101}$01 ein Nachbarwert.

Dann ist die Iteration für beide Werte:

0.010110	0.010101
0.10110	0.10101
0.0110	0.0101
0.110	0.101
0.10	0.01
0.0	0.1

Der Unterschied beider Werte ist nun 0,5.

2. Mischungseigenschaft

Man wählt zwei beliebige Intervalle im zulässigen Bereich.

Dann gibt es im ersten Intervall einen Startwert, so dass nach einer genügenden Anzahl von Schritten das zweite Intervall getroffen wird.

Beispiel:

Es sei I_1 das Intervall, in dem alle Zahlen mit 0.1011 beginnen.

Und das Intervall I_2, in dem alle Zahlen mit 0.0111 beginnen.

Dann liegt die Zahl 0.101101111 im Intervall I_1.

Vier Iterationsschritte beseitigen die ersten vier Stellen.

Dann lautet das Ergebnis 0.01111 und liegt im Intervall I_2.

3. dichte periodische Punkte

Es gibt in jedem beliebigen Intervall einen Startwert, der nach einer bestimmten Anzahl von Schritten wieder getroffen wird.

Betrachten wir z.B. das Intervall, in dem die Zahlen mit 0.0111 beginnen.

Dann gibt es darin den Startwert $x_0 = 0.\overline{011110}$ (periodische Zahl).

Wegen der Periodenlänge 6 wird nach 6 Iterationen die Periode einmal abgeschnitten und die ursprüngliche Startzahl wieder hergestellt.

$$S^6\left(0.\overline{011110}\right) = 0.\overline{011110}$$

Analog dazu gibt es in jedem Intervall periodische Zahlen, die unter der Iteration die periodischen Punkte ausmachen.

3. dichte periodische Punkte

Periodische Punkte lassen sich auch sehr gut als Brüche verfolgen.

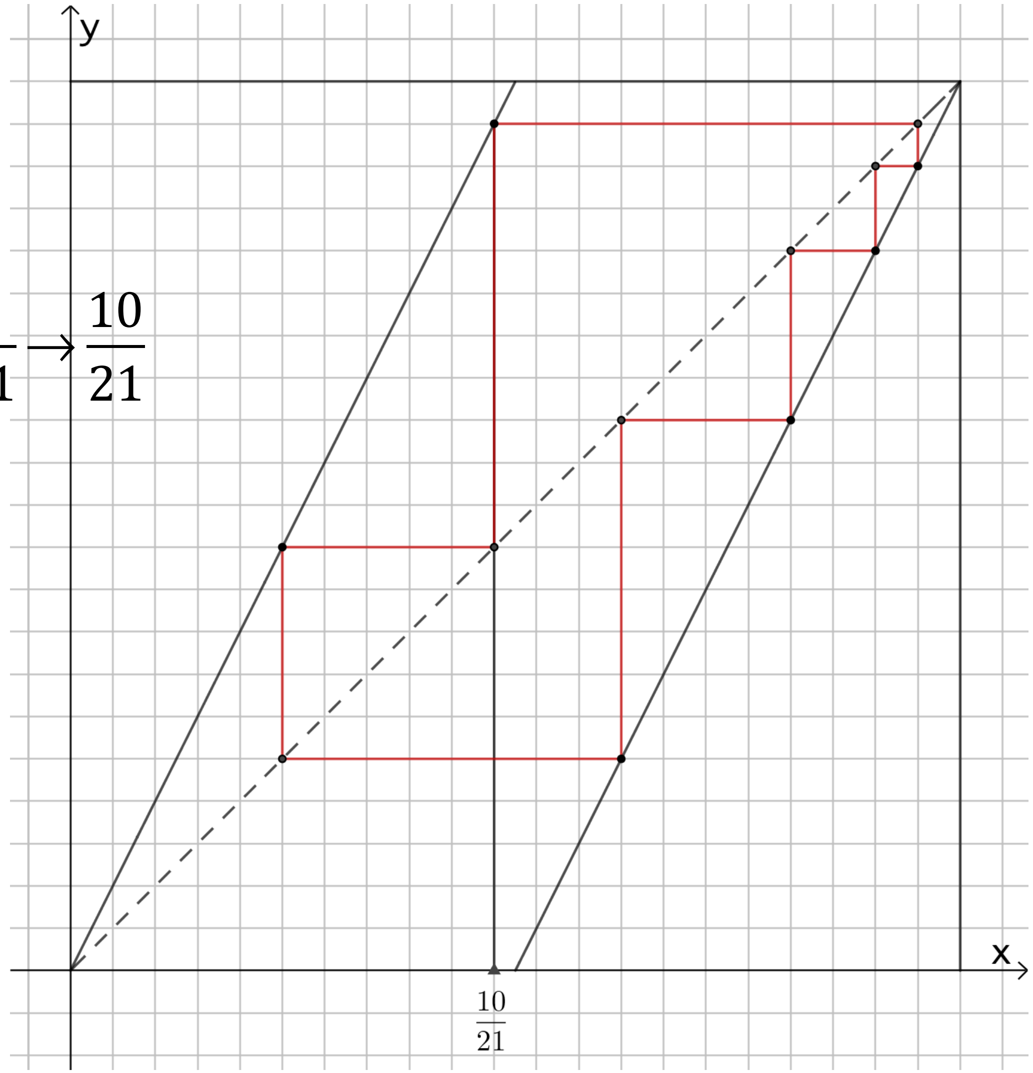
Beispiel:

$$x_0 = 0.\overline{011110} = \frac{10}{21}$$

Die Iteration verläuft dann:

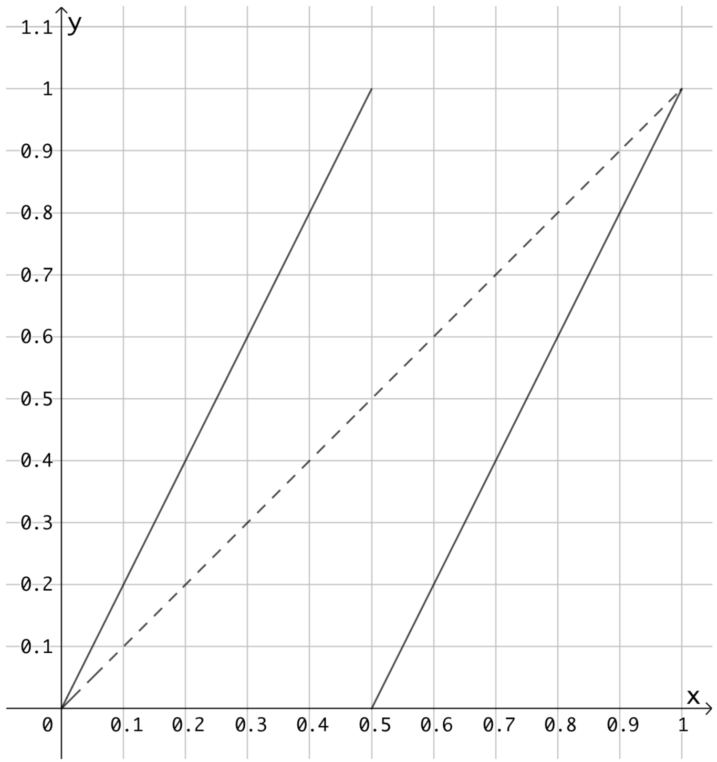
$$\frac{10}{21} \to \frac{20}{21} \to \frac{19}{21} \to \frac{17}{21} \to \frac{13}{21} \to \frac{5}{21} \to \frac{10}{21}$$

Nach 6 Iterationsschritten gelangt man zur Ausgangszahl.



Ein nachweislich chaotisches System

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x < 0{,}5 \\ 2x - 1 & \text{für } 0{,}5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Die Iteration mit der Sägezahn-Funktion erfüllt also die drei Eigenschaften für Chaos

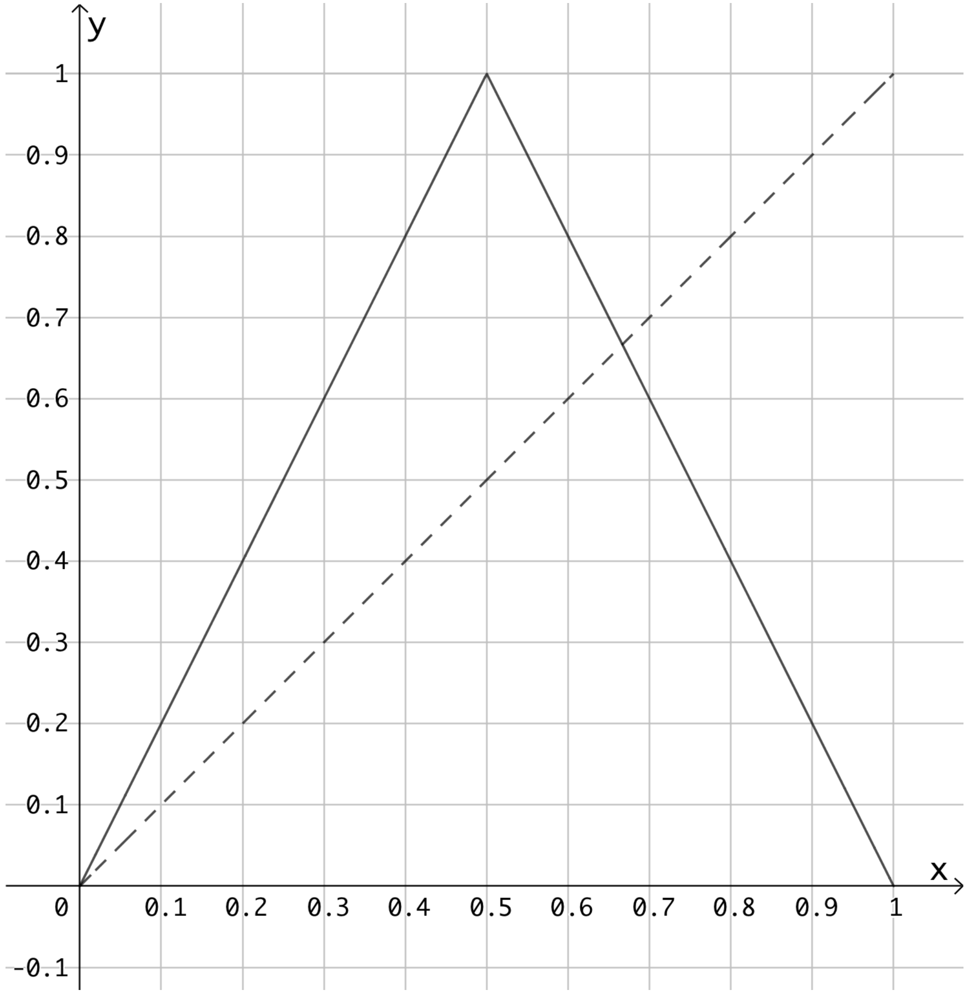
Sensitivität, Mischungseigenschaft und dichte, periodische Punkte

und ist damit ein chaotisches, dynamisches System.

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

$$Z(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x < 0{,}5 \\ 2-2x & \text{für } 0{,}5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{(dezimal)}$$

$$Z(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x < 0.1 \\ 2-2x & \text{für } 0.1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{(dual)}$$



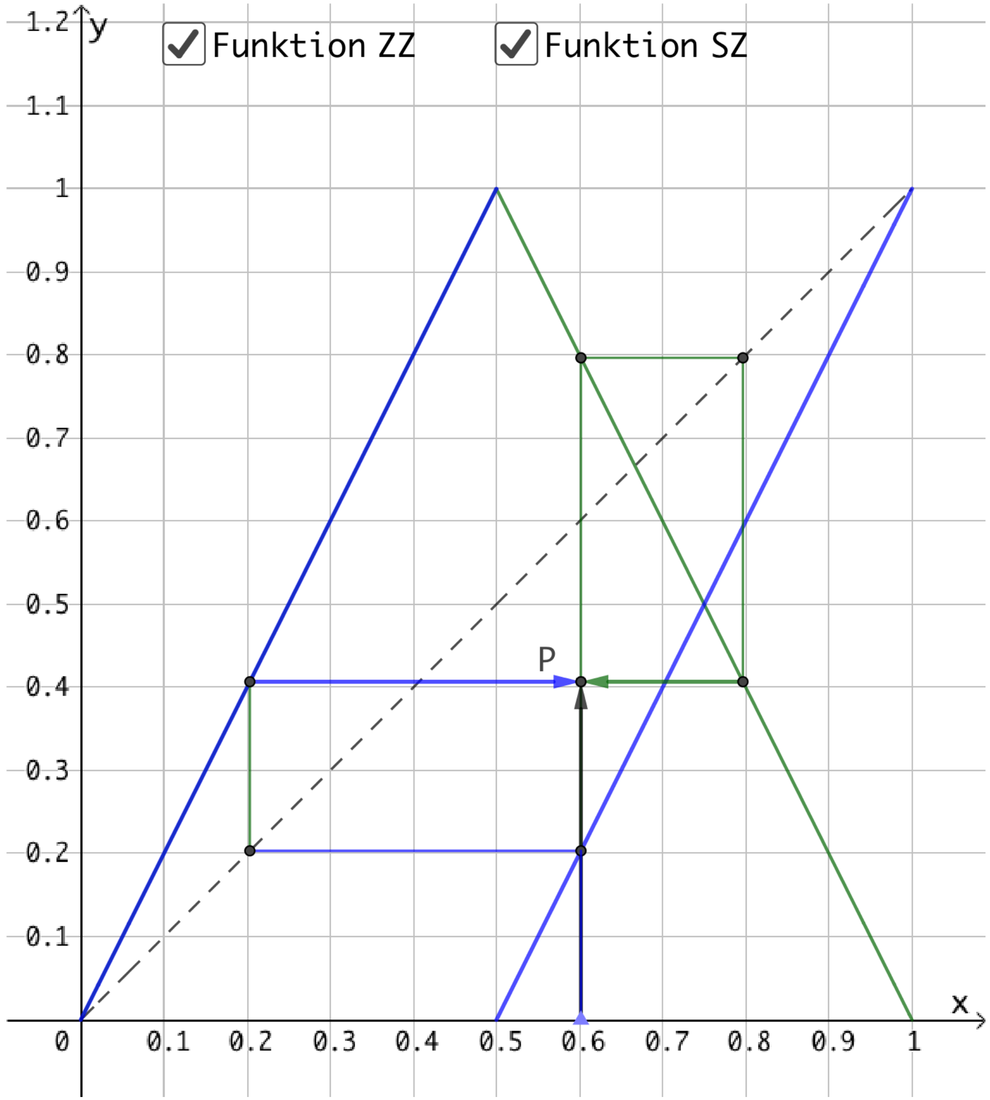
Die Funktion heißt nach ihrem Graph „Zelt-Funktion“.

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

Für den Nachweis der drei Chaos-Eigenschaften nutzt man den Zusammenhang aus:

$$Z\left(Z\left(x\right)\right)=Z\left(S\left(x\right)\right)$$

D.h. wenn man zwei Mal hintereinander den Funktionswert mit Z nimmt, erhält man das gleiche Ergebnis als wenn man den Funktionswert erst mit S bildet und dann mit Z.

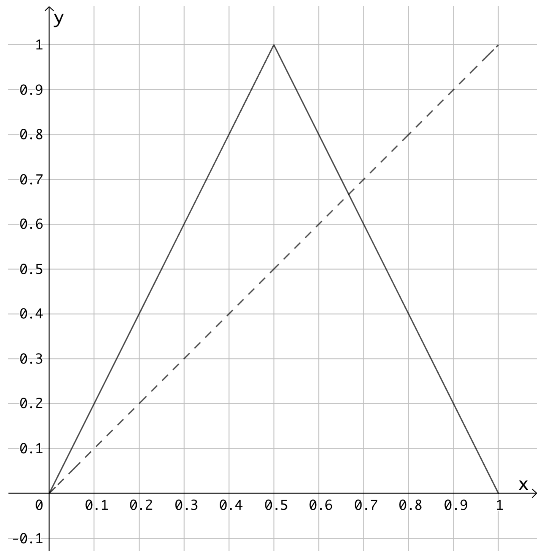


ZeltundSaege.ggb

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

$$Z(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x < 0{,}5 \\ 2 - 2x & \text{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{(dezimal)}$$

$$Z(Z(x)) = Z(S(x))$$



Mit diesem Zusammenhang kann man die Iterationen mit der Zelt-Funktion auf die mit der Sägezahn-Funktion zurückführen und vereinfachen.

$$\begin{aligned} Z^n(x) &= Z\Big(Z\Big(Z\ldots\Big(Z\Big(Z\Big(Z\big(Z(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\ &= Z\Big(Z\Big(Z\ldots\Big(Z\Big(Z\Big(Z\big(S(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\ &= Z\Big(Z\Big(Z\ldots\Big(Z\Big(Z\Big(S\big(S(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\ &= Z\Big(Z\Big(Z\ldots\Big(Z\Big(S\Big(S\big(S(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \\ &\ldots \\ &= Z\Big(S\Big(S\ldots\Big(S\Big(S\Big(S\big(S(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) = Z\big(S^{n-1}(x)\big) \end{aligned}$$

D.h. das n-fache Anwenden der Zeltfunktion lässt sich umformen in ein n-1-faches Anwenden der Sägezahn-funktion (Abschneiden) und dann ein einmaliges Anwenden der Zeltfunktion.

Damit lassen sich die drei Chaos-eigenschaften auch für die Zeltfunktion Z beweisen.

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

Mit einer verzerrenden Funktion

$$h(x)=\left(\sin(90°\cdot x)\right)^2$$

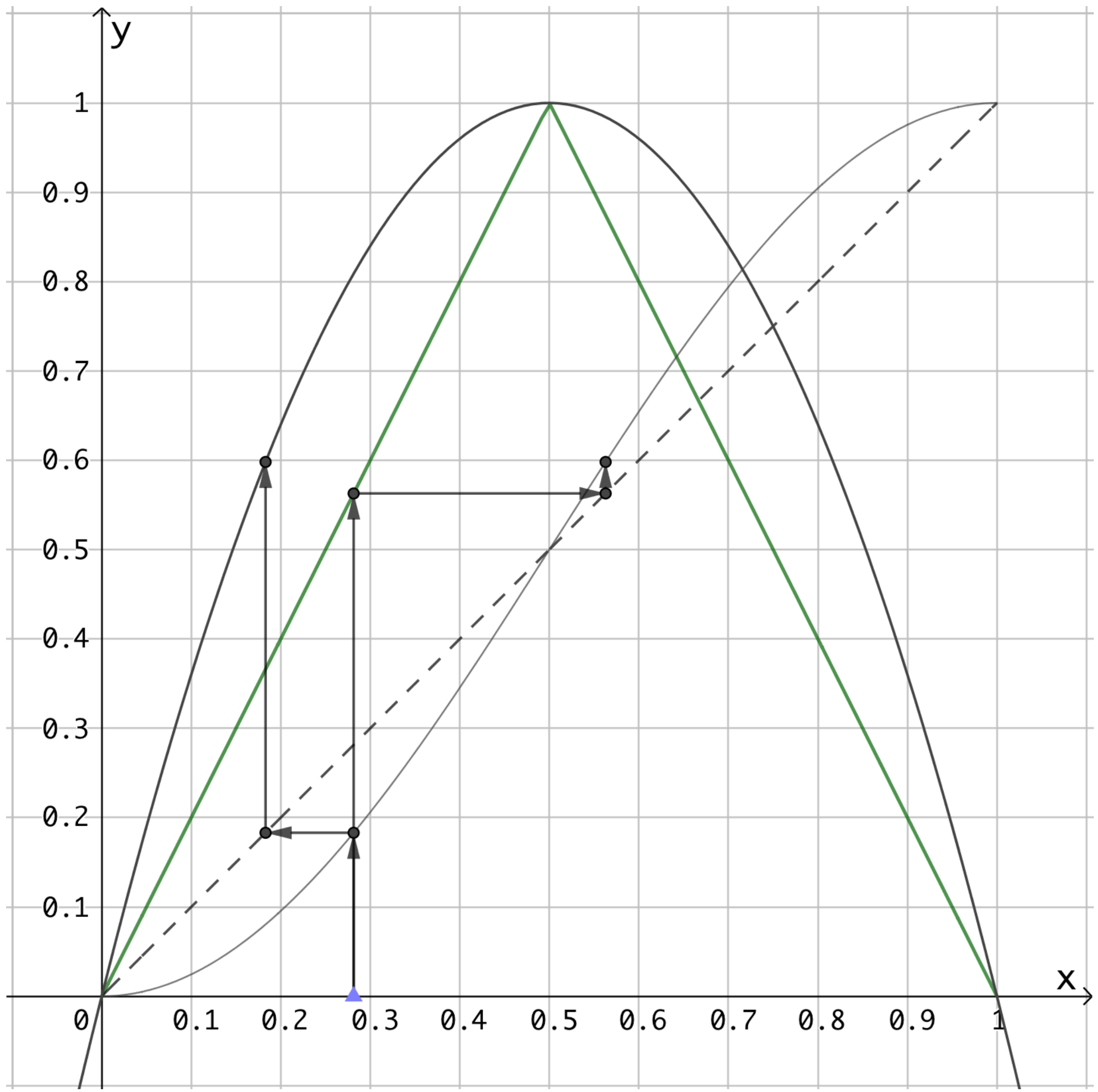
kann man die Eigenschaften der Zelt-Funktion auf die quadratische Funktion

$$Q(x)=4x(1-x)$$

übertragen.

$$h\left(Z(x)\right)=Q\left(h(x)\right)$$

$$\begin{tikzcd}
x_1=Z(x_0) \arrow[r, "h"] & y_1=Q(y_0) \\
x_0 \arrow[u, "Z"] \arrow[r, "h"] & y_0 \arrow[u, "Q"]
\end{tikzcd}$$



ZeltundQuadrat.ggb

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \\
x_4=Z(x_3) \arrow[r, "h"] & y_4=Q(y_3) \\
x_3=Z(x_2) \arrow[r, "h"] \arrow[u, "Z"'] & y_3=Q(y_2) \arrow[u, "Q"'] \\
x_2=Z(x_1) \arrow[r, "h"] \arrow[u, "Z"'] & y_2=Q(y_1) \arrow[u, "Q"'] \\
x_1=Z(x_0) \arrow[r, "h"] \arrow[u, "Z"'] & y_1=Q(y_0) \arrow[u, "Q"'] \\
x_0 \arrow[r, "h"] \arrow[u, "Z"'] & y_0 \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}
$$

Die Funktion h verknüpft in eindeutiger Weise die Werte der Folge x, gebildet mit Z, mit den Werten der Folge y, gebildet mit Q.

Daher werden die Chaoseigenschaften der Iteration mit Z

- Sensitivität
- Mischungseigenschaft
- Periodizität

auf die Iteration mit Q übertragen.

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

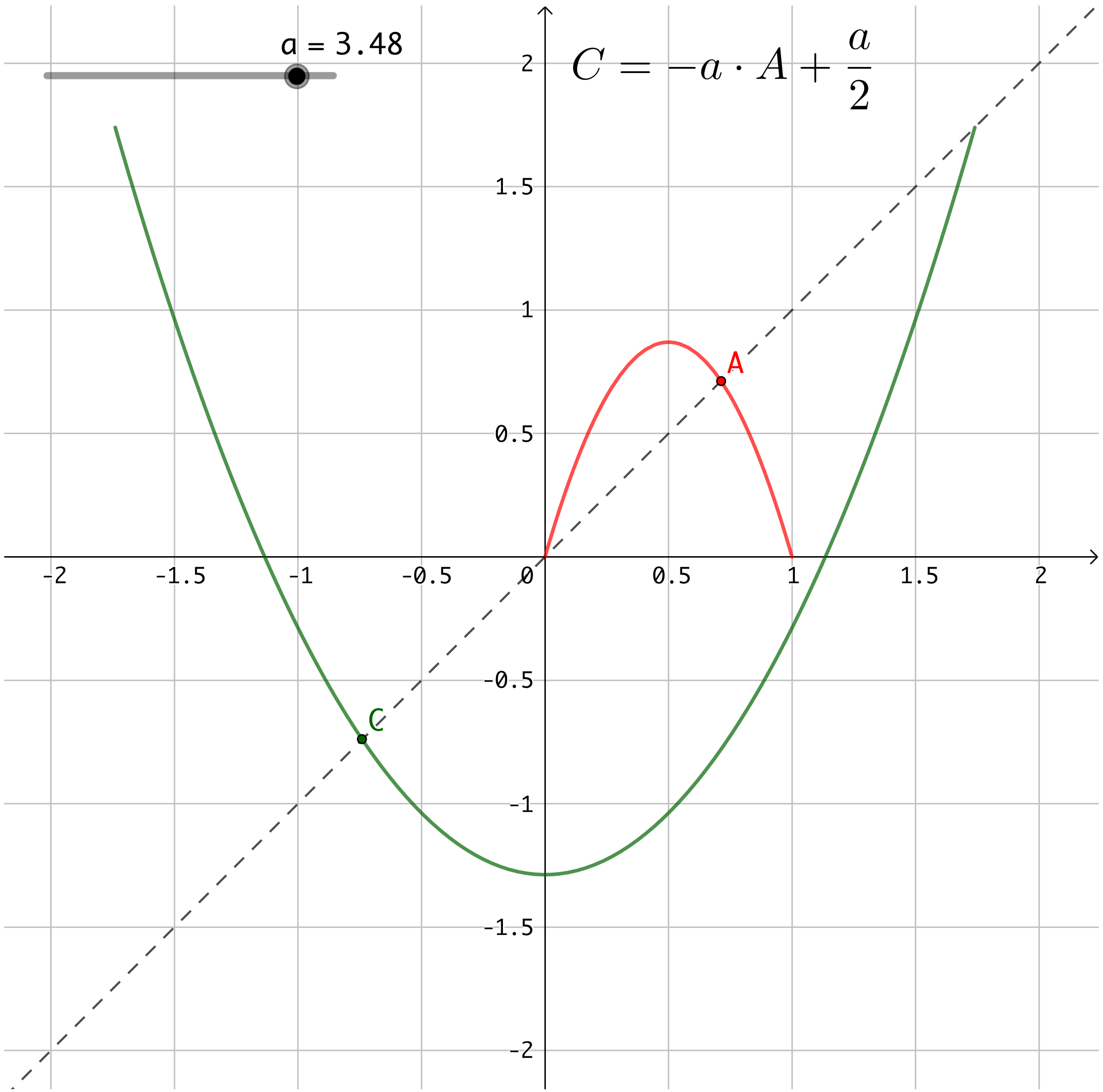
Mit einer linearen Transformation

$$t:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=-a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{a}{2}$$

kann man die Eigenschaften der Funktion Q_a auf die Funktion Q_c übertragen.

$$Q_a(x)=ax(1-x)\xrightarrow{t}Q_c(x)=x^2+c$$

$$\text{mit } c=-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}$$



aQuadrat_cQuadrat.ggb

Weitere Chaos erzeugende Funktionen

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \\
y_4=Q_a(y_3) \arrow[r, "t"] & z_4=Q_c(z_3) \\
y_3=Q_a(y_2) \arrow[r, "t"] \arrow[u, "Q_a"'] & z_3=Q_c(z_2) \arrow[u, "Q_c"'] \\
y_2=Q_a(y_1) \arrow[r, "t"] \arrow[u, "Q_a"'] & z_2=Q_c(z_1) \arrow[u, "Q_c"'] \\
y_1=Q_a(y_0) \arrow[r, "t"] \arrow[u, "Q_a"'] & z_1=Q_c(z_0) \arrow[u, "Q_c"'] \\
y_0 \arrow[r, "t"] \arrow[u, "Q_a"'] & z_0 \arrow[u, "Q_c"']
\end{tikzcd}
$$

Die Transformation t verknüpft in eindeutiger Weise die Werte der Folge y, gebildet mit Q_a, mit den Werten der Folge z, gebildet mit Q_c.

Daher werden die Chaoseigenschaften der Iteration mit Q_a

- Sensitivität
- Mischungseigenschaft
- Periodizität

auf die Iteration mit Q_c übertragen.