Über divergente Reihen

de seribus divergentibus (L. Euler)

Eine spezielle Reihe

Was ist 1+2+3+4+5+6+7+…?

a) Die Reihe ist divergent. Sie ist unendlich groß.
Keine weitere Diskussion.

b) Unter gewissen Umständen kann man der Reihe einen endlichen Wert zuweisen, nämlich $-\frac{1}{12}$.

$$1+2+3+4+5+6+\ldots=-\frac{1}{12}$$

Euler (de seribus divergentibus):
Über die Summen divergenter Reihen herrscht große Uneinigkeit unter den Mathematikern, während die einen es verneinen, bestätigen die anderen, dass sie in einer Summe erfasst werden können. …
... die Argumente, die auf beiden Seiten zur Verteidigung der eigenen Äußerungen angeführt werden, haben eine so große Überzeugungskraft, dass noch keine Partei gezwungen werden konnte, der anderen Recht zu geben.

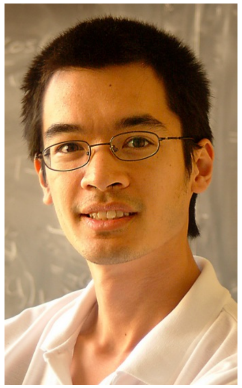
Eine spezielle Reihe

Über die Reihe 1+2+3+4+5+6+7+…

haben sich nach Euler auch noch Gedanken gemacht:

Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920)

Godfrey Hardy (1877 - 1947)



Terence Tao (1975 -)
Fields-Medaillen-Gewinner

Wenn sie einen Wert angeben, dann ist es $-\frac{1}{12}$

Erster Schritt

Die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung nähert sich keinem Wert.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

b1) Verschiebung

$$a = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

$$a = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

addieren

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Erster Schritt

Die Reihe 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1…

b) Rechnen mit bewährten Methoden

b2) Euler: Leibniz hat als erster diese Reihe betrachtet deren Summe er festgesetzt hatte gleich $^1/_2$ zu sein, und hatte das auf diese hinreichend strenge Begründung gestützt:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+\ldots=\frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad -1<q<1$$

Setzt man (gegen die Festlegung des Definitionsbereichs) $q=-1$,
so erhält man:

$$1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+\ldots=\frac{1}{1-(-1)}$$

$$1-1+1-1+1-1+1\ldots=\frac{1}{2}$$

Grenzwertbetrachtung

$$1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+\ldots=\frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad -1<q<1$$

zulässige Werte

$q=-0{,}99$ $$\frac{1}{1-(-0{,}99)}=0{,}5025125\ldots$$

$q=-0{,}999$ $$\frac{1}{1-(-0{,}999)}=0{,}5002501\ldots$$

$q=-0{,}9999$ $$\frac{1}{1-(-0{,}9999)}=0{,}50002500\ldots$$

Im Grenzwert für $q = -1$ erhält man:

$$1-1+1-1+1-1+1\ldots=\frac{1}{2}$$

Zweiter Schritt

Die Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \ldots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung nähert sich keinem Wert.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

Verschiebung

$$
\begin{array}{l}
b = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \ldots \\
b = \phantom{1 - 2 +{}} 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \ldots \\
\hline
2b = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots
\end{array}
$$

addieren

$$2b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{4}$$

Dritter Schritt

Die Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7\ldots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung wächst über alle Grenzen.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7\ldots$$

$$b = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7\ldots$$

subtrahieren

$$c - b = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0\ldots$$

$$c - b = 4\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots) = 4\cdot c$$

$$-3c = b = \frac{1}{4}$$

$$c = -\frac{1}{12}$$

Hokuspokus

All die gezeigten Rechnungen sind <u>nicht</u> im Rahmen klassischer, „vernünftiger“ Mathematik.

Solider Umgang mit Reihen (Cauchy):

1. Man muss erst die Konvergenz nachweisen (und den endlichen Wert ermitteln) und nur mit konvergenten Reihen darf man rechnen.

2. Man nimmt alle Summanden positiv. Konvergiert auch dann die (neue) Reihe, so darf man die Reihenfolge der Summierung verändern, ohne dass das den Reihenwert ändert.

(Gegen-)Beispiel: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-+\ldots$)

Bekannte Situation

Im Rahmen der bekannten, vertrauten Mathematik stehen wir vor einem „GEHT NICHT“.

Das ist nicht neu und begleitet die (persönliche/allgemeine) Entwicklung von Mathematik.

Kenntnis	Problem	Lösung
Zählen, natürliche Zahlen, einfache Rechnungen	5 - 8	negative Zahlen
Multiplikation und Division	7 : 13	Brüche
Quadrieren, Potenzieren	$x^2 = 2$	Wurzeln, irrationale Zahlen
	$x^2 = -1$	komplexe Zahlen

Bei jedem Schritt wurde die Menge der Zahlen konsistent erweitert.
Das bisher Bekannte konnte unverändert weiterverwendet werden.

Konsistente Erweiterung

von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen

Addition ganzer Zahlen:

Zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden addiert, indem die Zahlen ohne Vorzeichen (Betrag) addiert werden und das gemeinsame Vorzeichen gesetzt wird.

Zwei Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen werden addiert, indem die Beträge subtrahiert werden und das Vorzeichen des größeren Betrags gesetzt wird.

Für die natürlichen Zahlen gelten die Regeln für + + .

von den ganzen Zahlen zu den Brüchen

Ganze Zahlen sind als „Eintel" oder entsprechenden Erweiterungen enthalten. Rechnungen mit Bruchrechenregeln liefern das richtige Ergebnis.

$$2+3=\frac{4}{2}+\frac{15}{5}=\frac{20+30}{10}=\frac{50}{10}=5$$

Konsistente Erweiterung

von den Brüchen zu den reellen Zahlen

Sind die reellen Zahlen die allgemeinen Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen nach dem Komma, so sind

- die ganzen Zahlen diejenigen mit (ausschließlich) unendlich vielen Nullen nach dem Komma
- die rationalen Zahlen diejenigen mit einer letztlich unendlich periodischen Dezimalzahlfolge nach dem Komma

Konsistente Erweiterung

Potenzrechnung

Die Potenzrechnung ist als verkürzte Multiplikation gleicher Zahlen zunächst nur für natürliche Exponenten erklärt.

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Daraus ergibt sich die Rechenregel

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Unter Beibehaltung dieser Rechenregel kann man die Potenzen konsistent erweitern auf den Exponenten Null: a^0

$$\begin{aligned} a^n \boxed{\cdot a^0} &= a^{n+0} = a^n \\ a^n \boxed{\cdot 1} &= \phantom{a^{n+0}} = a^n \end{aligned}$$

$$a^0 = 1$$

Konsistente Erweiterung

Unter Beibehaltung dieser Rechenregel kann man die Potenzen konsistent erweitern auf negative Exponenten: a^{-m}

$$a^5 \cdot \boxed{a^{-3}} = a^{5+(-3)} = a^2$$

$$a^5 \cdot \boxed{\frac{1}{a^3}} = \frac{a \cdot a \cdot \cancel{a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a \cdot a}} = a^2$$

allgemein $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

Unter Beibehaltung dieser Rechenregel kann man die Potenzen konsistent erweitern auf gebrochene Exponenten: $a^{\frac{1}{m}}$

$$\boxed{a^{\frac{1}{3}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1$$

$$\boxed{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

allgemein $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

Unsere Situation

$1-1+1-1+1-1+-\ldots$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$1+2+3+4+5+6+\ldots$

konvergent ✔

geht

$1+4+9+16+25+36+49\ldots$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\ldots$

$1-2+3-4+5-6+-\ldots$

nicht

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$

$1+2+4+8+16+32+\ldots$

1. Erweiterung

Cesaro-summierbar

Man betrachtet den Mittelwert der Partialsummen.

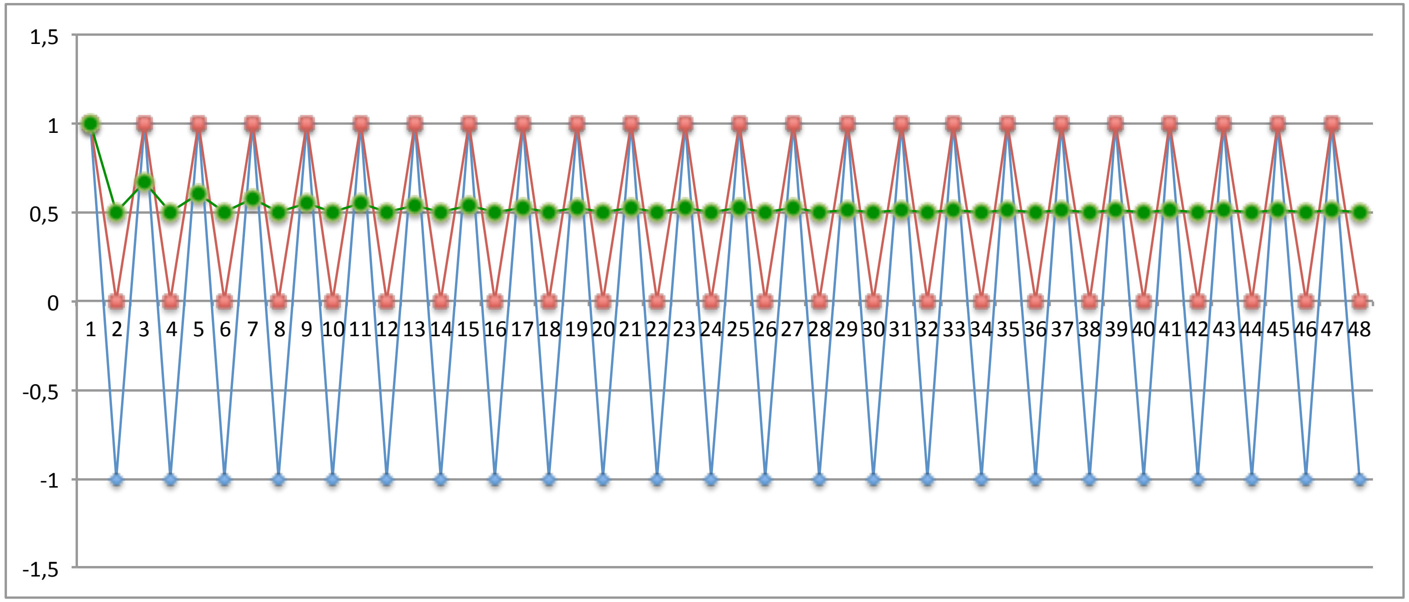
Beispiel: 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 –+…

$$\underset{\text{Cesaro}}{=} \frac{1}{2}$$

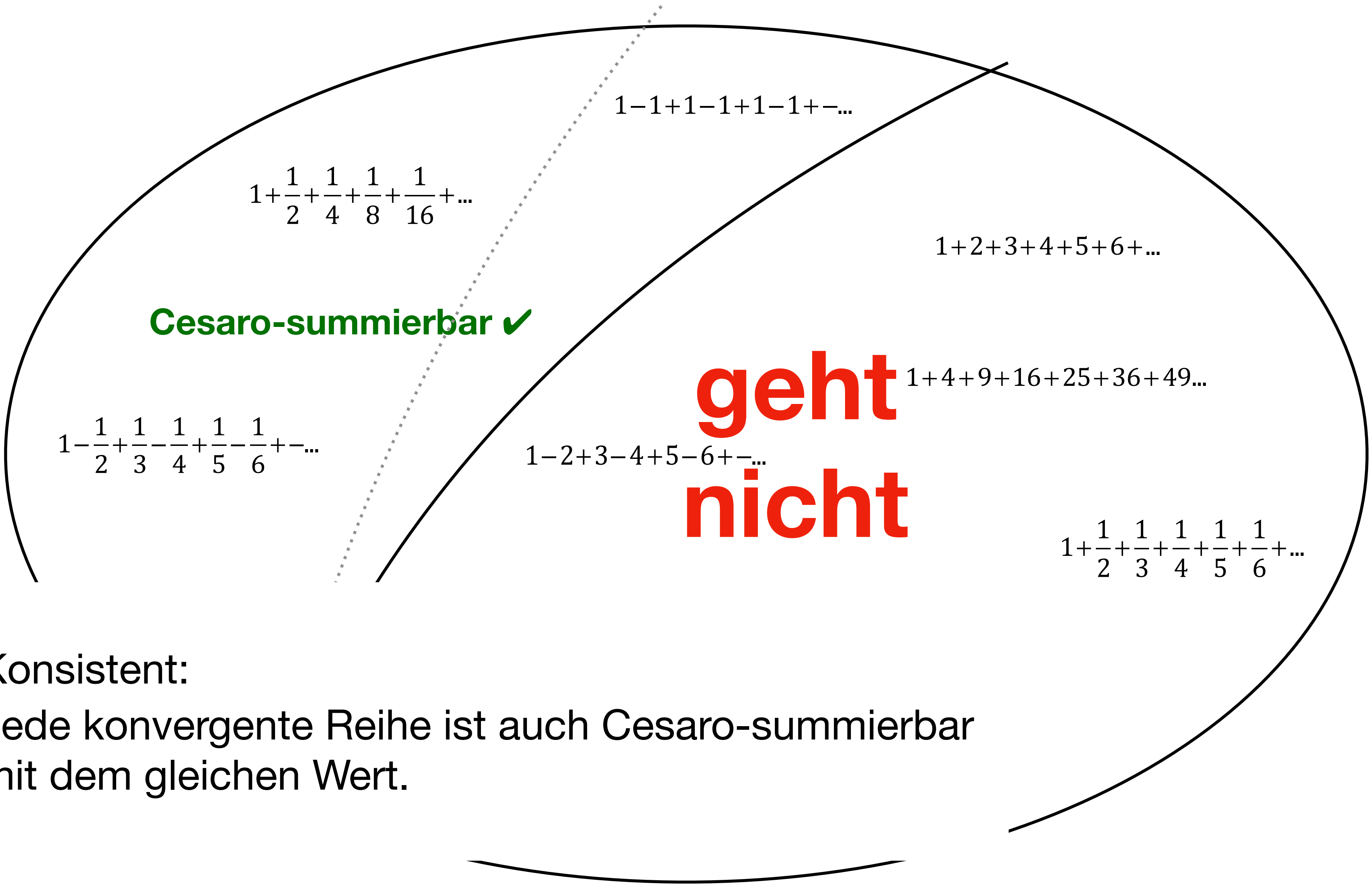
Summand	Summe	Mittelwert
1	1	1,0000
-1	0	0,5000
1	1	0,6667
-1	0	0,5000
1	1	0,6000
-1	0	0,5000
1	1	0,5714
-1	0	0,5000
1	1	0,5556
-1	0	0,5000
1	1	0,5455
-1	0	0,5000
1	1	0,5385
-1	0	0,5000
1	1	0,5333
-1	0	0,5000
1	1	0,5294

Diesen Wert hatten wir auch vorher mit der „Hokuspokus-Rechnung“ erhalten.

Ernesto Cesàro 1859 - 1906



Unsere Situation



Konsistent:

Jede konvergente Reihe ist auch Cesaro-summierbar mit dem gleichen Wert.

2. Erweiterung

Euler-summierbar

Leonhard Euler 1707 - 1783

Man betrachtet zur Reihe eine Potenzreihe.
Beispiel:

$$1-2+3-4+5-6+-\ldots$$

$$f(x)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+-\ldots$$

Das ist hilfreich, wenn man diese Funktion geschlossen darstellen kann.

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

Ist diese Funktion für $x = 1$ definiert, so heißt die Ausgangsreihe Euler-summierbar mit dem Wert $f(1)$.

$$f(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

Diesen Wert hatten wir auch vorher mit der „Hokuspokus-Rechnung“ erhalten.

2. Erweiterung

Euler-summierbar

Weitere Beispiele:

$$1-1+1-1+1-1+-\ldots \qquad q=-x$$

$$f(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+-\ldots=\frac{1}{1+x} \qquad f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$1+2+4+8+16+32+\ldots \qquad q=2x$$

$$f(x)=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\ldots=\frac{1}{1-2x} \qquad f(1)=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

Also $1+2+4+8+16+32+\ldots \underset{\text{Euler}}{=} -1$ was total unsinnig erscheint.

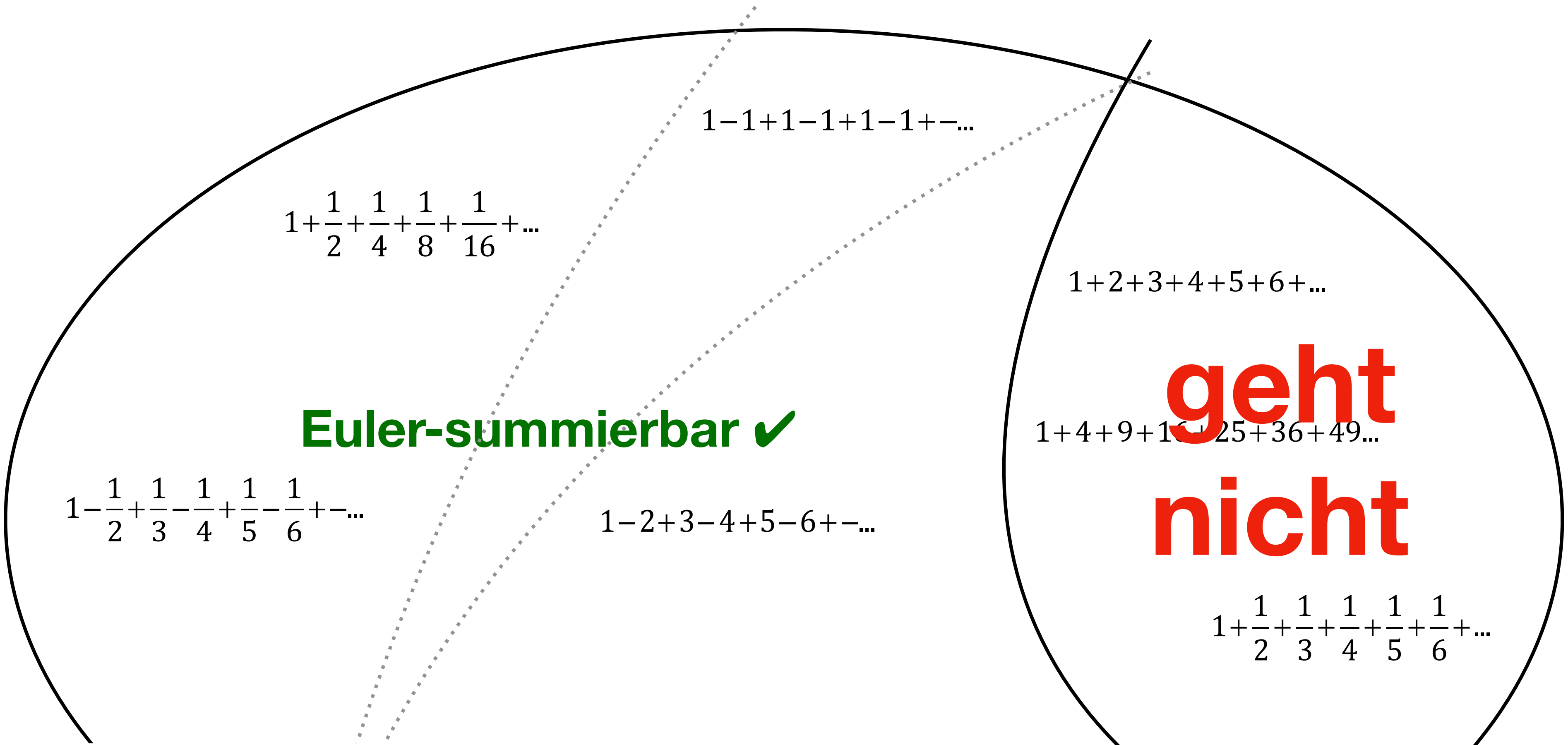
Euler selbst argumentiert dazu in „de seribus divergentibus“:

… um dieses außergewöhnliche Paradoxon zu erklären, (machen die Befürworter) einen feinen, mehr als wahren Unterschied zwischen den negativen Größen fest; sie erklären, dass, während die einen kleiner als 0 sind, die anderen aber größer als unendlich oder mehr als unendlich sind.

n	1		2		3		4		5		6		7		8
$\frac{1}{5-n}$	$\frac{1}{4}$	$<$	$\frac{1}{3}$	$<$	$\frac{1}{2}$	$<$	$\frac{1}{1}$	$<$	∞	$<$	$\frac{1}{-1}$	$<$	$\frac{1}{-2}$	$<$	$\frac{1}{-3}$

… auf diese Weise weisen sie jene sich ergebende Absurdität genügt geistreich von sich.

Unsere Situation



Konsistent:

Jede Cesaro-summierbare Reihe ist auch Euler-summierbar mit dem gleichen Wert.

3. Erweiterung

analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion

Bernhard Riemann 1826 - 1866

Die Riemannsche Zeta-Funktion ist zunächst definiert durch:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

So ist

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \\ &= \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645 \end{aligned}$$

Mit Konvergenz im klassischen Sinn

Oder

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{6^1} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \end{aligned}$$

, was die harmonische Reihe ist.

3. Erweiterung

analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots$$

Formal ist

$$\zeta(-1)=1+\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{3^{-1}}+\frac{1}{4^{-1}}+\frac{1}{5^{-1}}+\ldots$$

$$=1+2+3+4+5+\ldots$$ was klassisch nicht konvergiert.

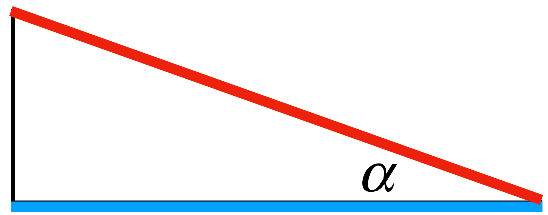
Konvergenz ist für alle $s > 1$ gegeben, so dass die oben gegebenen Definition der Riemannschen Zeta-Funktion nur für $s > 1$ gültig ist.

Nun gibt es zur Zeta-Funktion eine analytische Fortsetzung, um Werte für negative s zu berechnen.

Die Kosinusfunktion

Beispiel einer analytischen Fortsetzung

Der Kosinus ist zunächst geometrisch im rechtwinkligen Dreieck definiert.

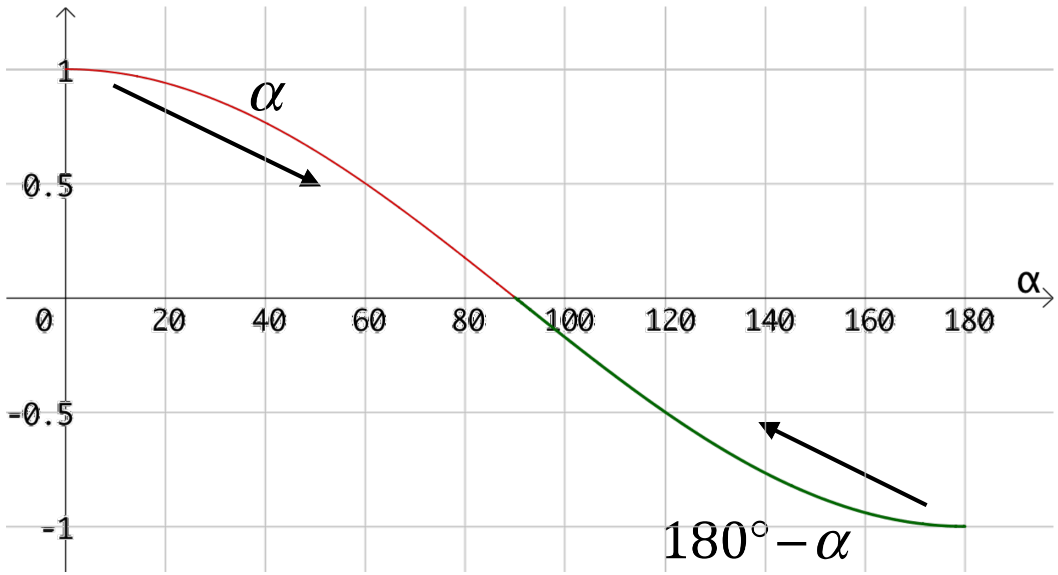


$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Damit ist die Kosinusfunktion für Winkel von 0° bis 90° definiert.

Nun kann man den Definitionsbereich der Kosinusfunktion erweitern. Das kann z.B. durch eine analytische Fortsetzung erfolgen.

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$



3. Erweiterung

analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \qquad \zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Die analytische Fortsetzung dazu lautet:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos(s \cdot 90°) \, \Gamma(s) \, \zeta(s)$$

$$\Gamma(s) = (s-1)!$$

, wenn s eine natürliche Zahl ist.

Um $\zeta(-1)$ zu berechnen, muss man s = 2 einsetzen.

$$\zeta(1-2) = \frac{2}{(2\pi)^2} \cdot \cos(2 \cdot 90°) \cdot (2-1)! \cdot \zeta(2)$$

$$\zeta(-1) = \frac{2}{4\pi^2} \cdot (-1) \cdot (1) \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

In diesem Sinn ist

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

3. Erweiterung

analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cdot\cos(s\cdot 90°)\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s)$$

Wir berechnen damit $\zeta(-2)$.
Dazu muss $s = 3$ in die analytische Fortsetzung eingesetzt werden.

$$\zeta(1-3)=\zeta(-2)=\frac{2}{(2\pi)^3}\cdot\cos(3\cdot 90°)\cdot\Gamma(3)\cdot\zeta(3)$$

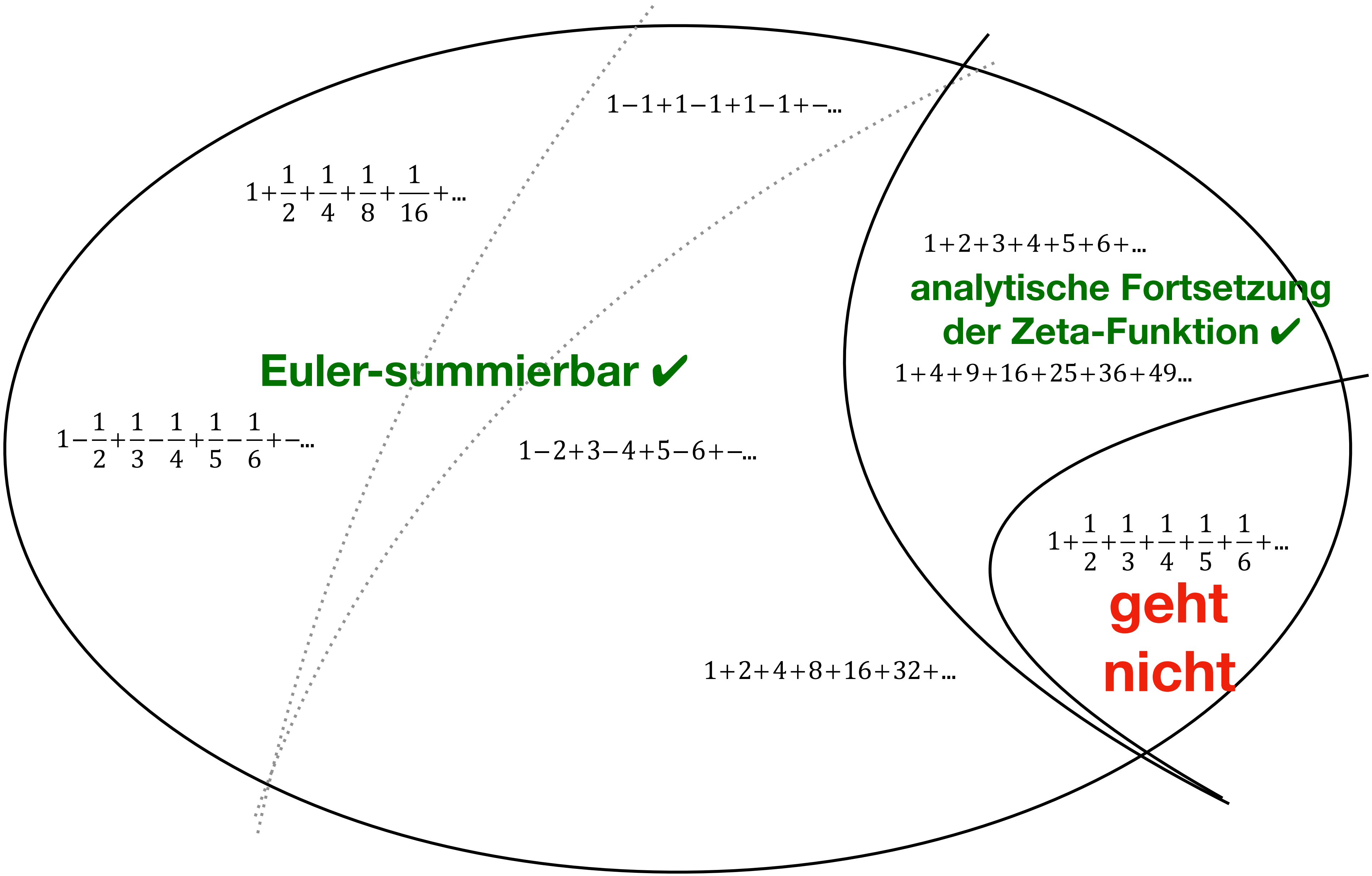
$$\cos(270°)=0$$

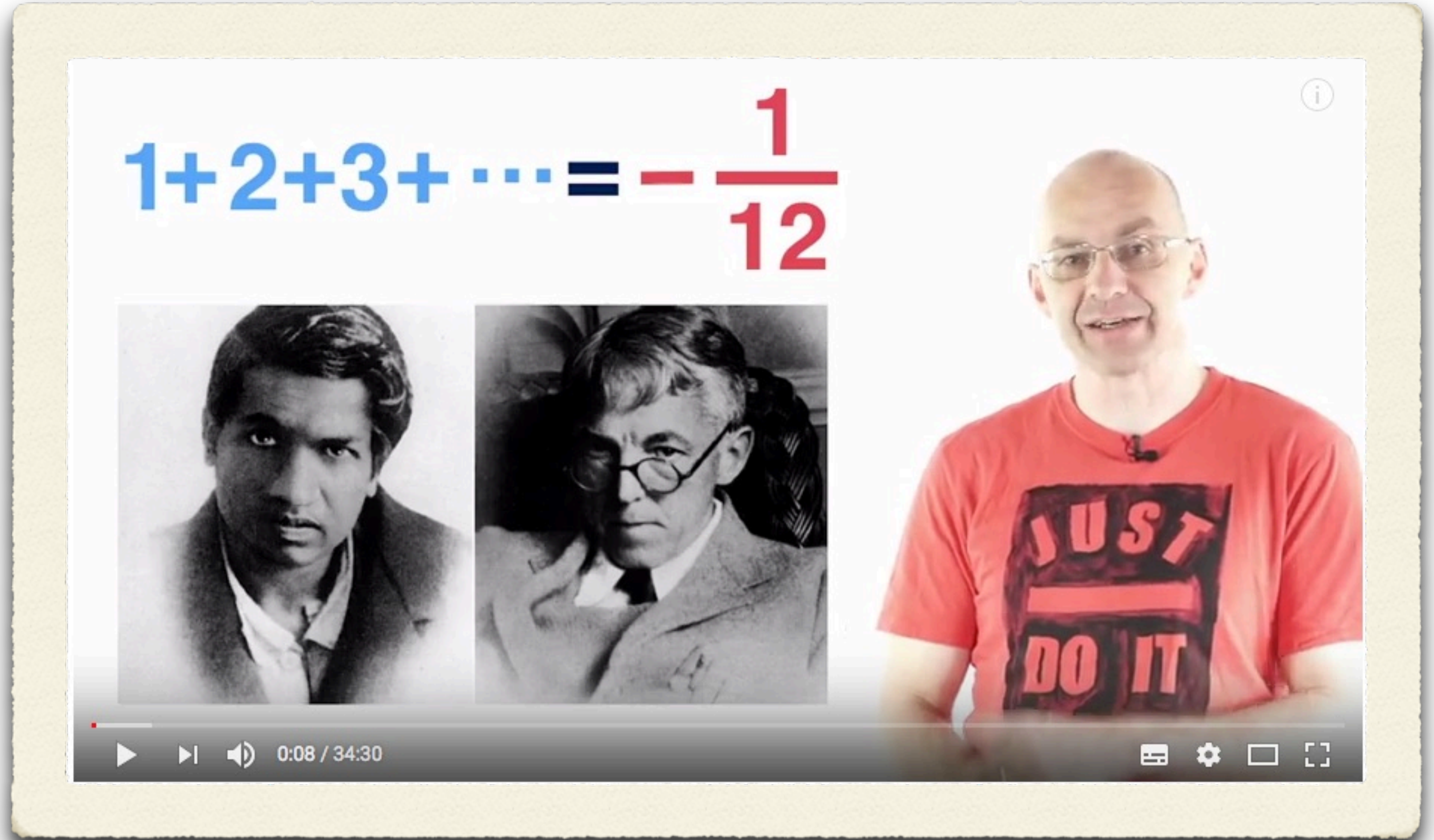
$$=0$$

In diesem Sinn ist

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots=\zeta(-2)=0$$

Unsere Situation





https://www.youtube.com/watch?v=jcKRGpMiVTw

MathoLoger Burkard Polster