Dimension

Anwendung in der Natur

Warum der Eisbär nicht friert

es in der Arktis kaum wärmer als zehn Grad Celsius. Seine perfekte Anpassung an das Leben am Nordpolarmeer ermöglicht es dem Eisbären, seine Körperwärme auf verschiedene Weise zu speichern. Das führt dazu, dass er lieber langsam und gemächlich durch die Arktis streift.

Großer Körper

Der Eisbär ist von allen Bären das größte Exemplar – größer noch als der Grizzly, der auch als Braunbär bekannt ist. Selbst der Große Panda ist kleiner. Diese Tiere leben allerdings auch nicht so weit im Norden wie der Kollege aus dem Eis. Es ist ein Phänomen, das sich häufiger in der Tierwelt beobachten lässt und auch im Falle des Eisbären zu greifen scheint: Die Statur von Tieren wird größer, je näher man vom Äquator zu den Polen kommt.

Der Grund dafür: Je größer der Körper, desto geringer wird im Verhältnis dazu dessen Oberfläche, von der die Wärme abstrahlen kann. Das Phänomen beobachtete im Jahr 1847 der deutsche Arzt und Zoologe Carl Bergmann. Bekanntestes Beispiel der sogenannten Bergmannschen Regel sind die Pinguine. Auf Äquatorhöhe auf den Galapagos-Inseln sind sie mit teilweise unter 50 Zentimetern besonders klein, während in der Antarktis die bis zu 1,30 Meter großen Kaiserpinguine leben. Die speichern ähnlich wie der Eisbär am Nordpol in ihrem massigen Körper die Wärme.

Kleine Ohren, kurzer Schwanz

Anders als bei den großen Körpern verhält es sich mit den Körperanhängen: Ohren, Schwanz oder auch Arme und Beine sind in der Regel kleiner ausgeprägt, je weiter

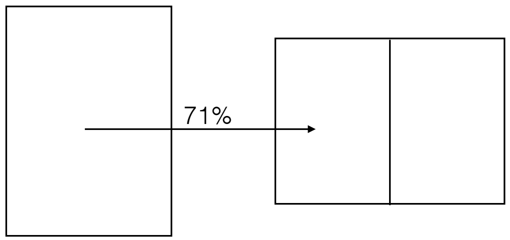
Vergrößern ist dimensionsabhängig

Mutter zum Sohn:
„Nimm mal den Topf, der ist doppelt so groß“

Architekt zum Kunden:
„Das Schwimmbecken wird so aussehen wie das hier, aber wie verabredet wird Ihres doppelt so groß.“

Verkleinern ist dimensionsabhängig

Das tägliche Wunder im Büro
Will man zwei DIN A4 Blätter auf eines kopieren, so ist der Verkleinerungsfaktor 71%. Trotzdem verringert sich der Papierverbrauch auf 50%



Einheiten umrechnen ist dimensionsabhängig

$1\ m = 100\ cm$ $\qquad$ $1\ foot = 12\ inch$

$1\ m^2 = 10.000\ cm^2$ $\qquad$ $1\ sqfoot = 144\ sqinch$

$1\ m^3 = 1.000.000\ cm^3$

Die Dimensionen

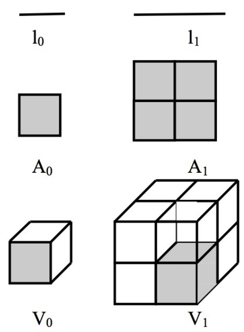
allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} · alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$

1. Dimension: Linie

2. Dimension Fläche

3. Dimension Körper



$l_1 = 2 \cdot l_0$

$A_1 = 4 \cdot A_0$
$A_1 = 2^2 \cdot A_0$

$V_1 = 8 \cdot V_0$
$V_1 = 2^3 \cdot V_0$

Die Dimensionen

allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} · alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$

Das tägliche Wunder im Büro
Skalierungsfaktor: s = 71% = 0,71

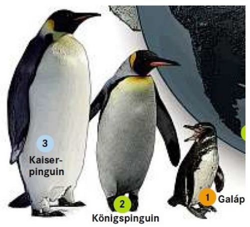
Der Papierverbrauch betrifft die zweidimensionale Fläche

$$A_{neu} \approx 0{,}71^2 A_{alt} \approx 0{,}5 A_{alt}$$

Die Dimensionen

allgemein: neue Größe = Skalierungsfaktor^{Dimension} · alte Größe

als Formel: $G_{neu} = s^D \cdot G_{alt}$



Königspinguin: ca. 1 m groß
Kaiserpinguin: ca. 1,30 m groß
Skalierungsfaktor: s = 1,3

$$A_{Kaiser} = 1{,}3^2 A_{König} \approx 1{,}7 A_{König}$$

$$V_{Kaiser} = 1{,}3^3 V_{König} \approx 2{,}2 V_{König}$$

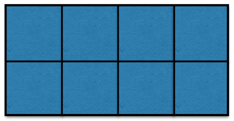
Vom Königs- zum Kaiserpinguin nimmt das (wärme-speichernde) Volumen um 120% zu, während die Oberfläche (Wärmeverlust) nur um 70% zunimmt.

Messen ist das Vergleichen mit einer Normgröße

Länge: Normgrößen sind Meter, Kilometer, Zentimeter

Fläche: Normgrößen sind Quadratmeter, Quadratzentimeter

Volumen: Normgrößen sind Kubikmeter, Liter



In diese Fläche passen 2x4=8 Quadratzentimeter, also ist die Fläche 8 cm^2 groß.

Messen in der falschen Dimension

Wenn das zu messende Objekt und der Vergleichsmaßstab nicht von derselben Dimension sind, geschehen folgende Fehler

Das Vergleichsmaß hat eine geringere Dimension als das Objekt
—> Das Objekt erscheint unendlich groß

Das Vergleichsmaß hat eine höhere Dimension als das Objekt
—> Das Objekt hat die Größe Null

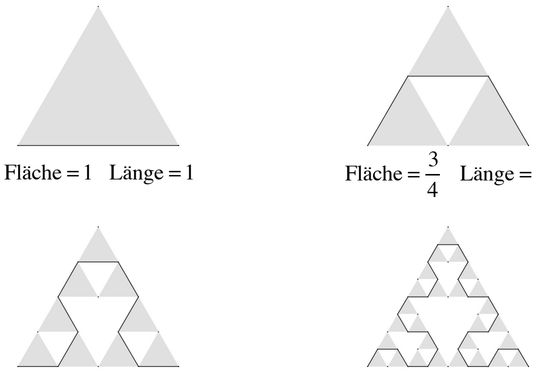
Messen in der falschen Dimension

Die Umkehrung ist nicht logisch zwingend. Sie kann aber ein Lösungsansatz sein.

Das Objekt erscheint unendlich groß
—> Das Vergleichsmaß hat eine geringere Dimension als das Objekt oder
Das Objekt hat eine größere Dimension als beim Messen angenommen.

Das Objekt hat die Größe Null
—> Das Vergleichsmaß hat eine höhere Dimension als das Objekt oder
Das Objekt hat eine kleinere Dimension als beim Messen angenommen

Ein erstes Beispiel



$\text{Fläche} = 1 \quad \text{Länge} = 1$

$\text{Fläche} = \frac{3}{4} \quad \text{Länge} = \frac{3}{2}$

$\text{Fläche} = \frac{9}{16} \approx 0{,}56 \quad \text{Länge} = \frac{9}{4} \approx 2{,}3$

$\text{Fläche} = \frac{27}{64} \approx 0{,}42 \quad \text{Länge} = \frac{27}{8} \approx 3{,}4$

Ein erstes Beispiel

$$G_{neu} = s^D G_{alt}$$

Wir betrachten eine Vergrößerung eines Teils G_{alt} zur Gesamtfigur G_{neu}.

$$G_{neu} = n \cdot G_{alt}$$

$$n = s^D$$

s ist der Vergrößerungsfaktor vom Teil zur Gesamtfigur.
n ist die Anzahl der Teile, die in der Gesamtfigur enthalten sind.

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich *s* und *n* bestimmen und damit D **berechnen**.

$\text{Fläche} = \frac{9}{16} \approx 0{,}56$ $\text{Länge} = \frac{9}{4} \approx 2{,}3$ $\text{Fläche} = \frac{27}{64} \approx 0{,}42$ $\text{Länge} = \frac{27}{8} \approx 3{,}4$

Ein erstes Beispiel

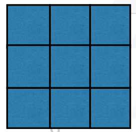
$$n = s^D$$

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich *s* und *n* bestimmen und damit *D* berechnen.

$$\log n = \log s^D$$

$$\log n = D \cdot \log s$$

$$\frac{\log n}{\log s} = D$$



$n = 9$

$s = 3$

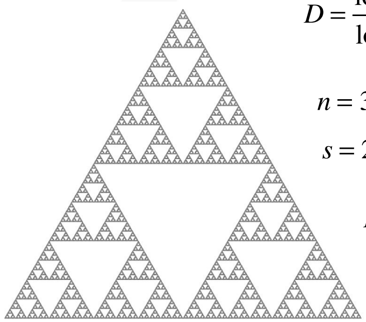
$$D = \frac{\log 9}{\log 3} \approx \frac{0{,}9542}{0{,}4771} = 2$$

$\text{Fläche} = \frac{9}{16} \approx 0{,}56$ $\text{Länge} = \frac{9}{4} \approx 2{,}3$ $\text{Fläche} = \frac{27}{64} \approx 0{,}42$ $\text{Länge} = \frac{27}{8} \approx 3{,}4$

Ein erstes Beispiel

$$n = s^D$$

In einer exakt selbstähnlichen Figur lassen sich *s* und *n* bestimmen und damit *D* berechnen.



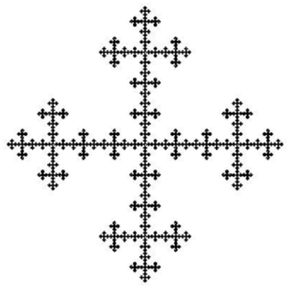
$$D = \frac{\log n}{\log s}$$

$n = 3$

$s = 2$

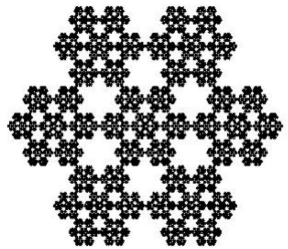
$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}585$$

Wie groß ist die Dimension?



$n = 5$ $s = 3$

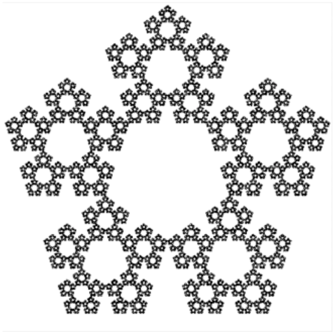
$$D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0{,}6990}{0{,}4771} \approx 1{,}465$$



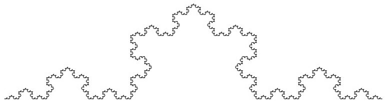
$n = 7$ $s = 3$

$$D = \frac{\log 7}{\log 3} \approx \frac{0{,}8451}{0{,}4771} \approx 1{,}771$$

Wie groß ist die Dimension?

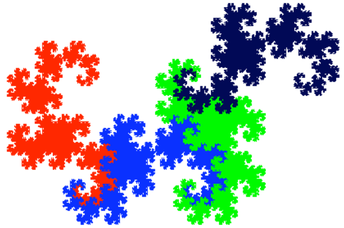


$n = 5 \quad s \approx 2{,}618$

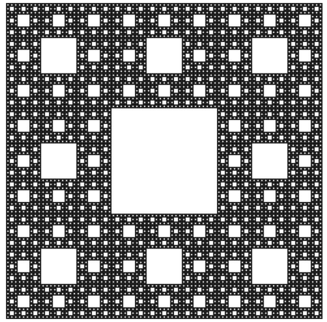


$n = 4 \quad s = 3$

Wie groß ist die Dimension?

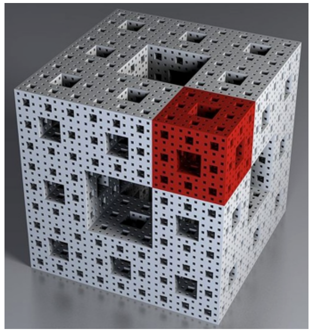


$n = 4 \quad s = 2$

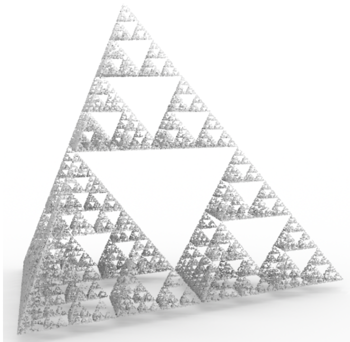


$n = 8 \quad s = 3$

Wie groß ist die Dimension?

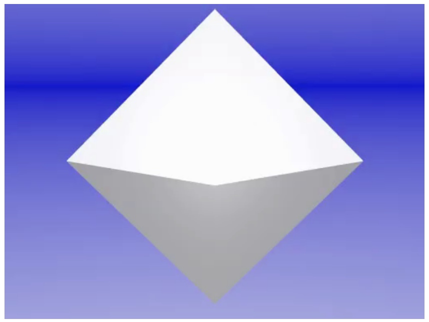


$n = 20 \quad s = 3$



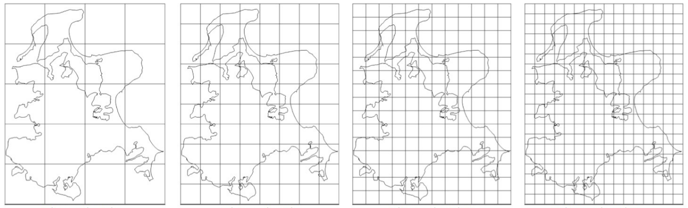
$n = 4 \quad s = 2$

Wie groß ist die Dimension?

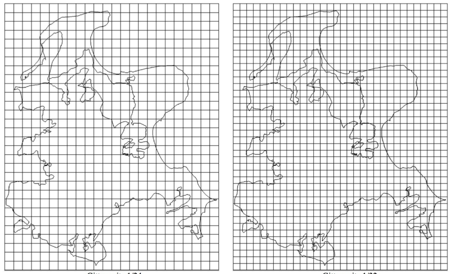


$n = 6 \quad s = 2$

Die Boxcounting-Dimension

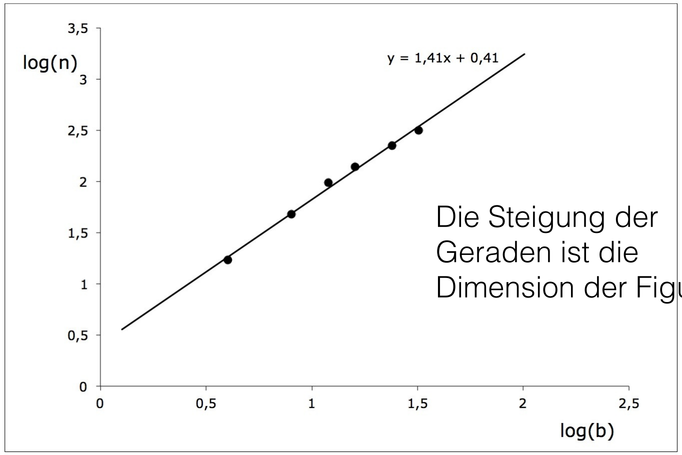


Gitterweite 1/4 Gitterweite 1/8 Gitterweite 1/12 Gitterweite 1/16



Gitterweite 1/24 Gitterweite 1/32

Die Boxcounting-Dimension



Die Steigung der Geraden ist die Dimension der Figur