Visualisierung algebraischer Zusammenhänge

Addition ungerader Zahlen

Addiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man immer eine Quadratzahl.

Addition ungerader Zahlen

Addiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man immer eine Quadratzahl.

Beispiel: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Addition ungerader Zahlen

Addiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man immer eine Quadratzahl.

Beispiel: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ist die Summe n^2.

Addition ungerader Zahlen

Addiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man immer eine Quadratzahl.

Beispiel: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ist die Summe n^2.

$$1+3+5+...+2n-1=n^2$$

Addition ungerader Zahlen

Hilfsüberlegung:
Jede ungerade Zahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Zahlen.

Addition ungerader Zahlen

Hilfsüberlegung:
Jede ungerade Zahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Zahlen.

Beispiel: 11 = 5 + 6

Addition ungerader Zahlen

Hilfsüberlegung:
Jede ungerade Zahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Zahlen.

Beispiel: 11 = 5 + 6

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
unger. Zahl	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Addition ungerader Zahlen

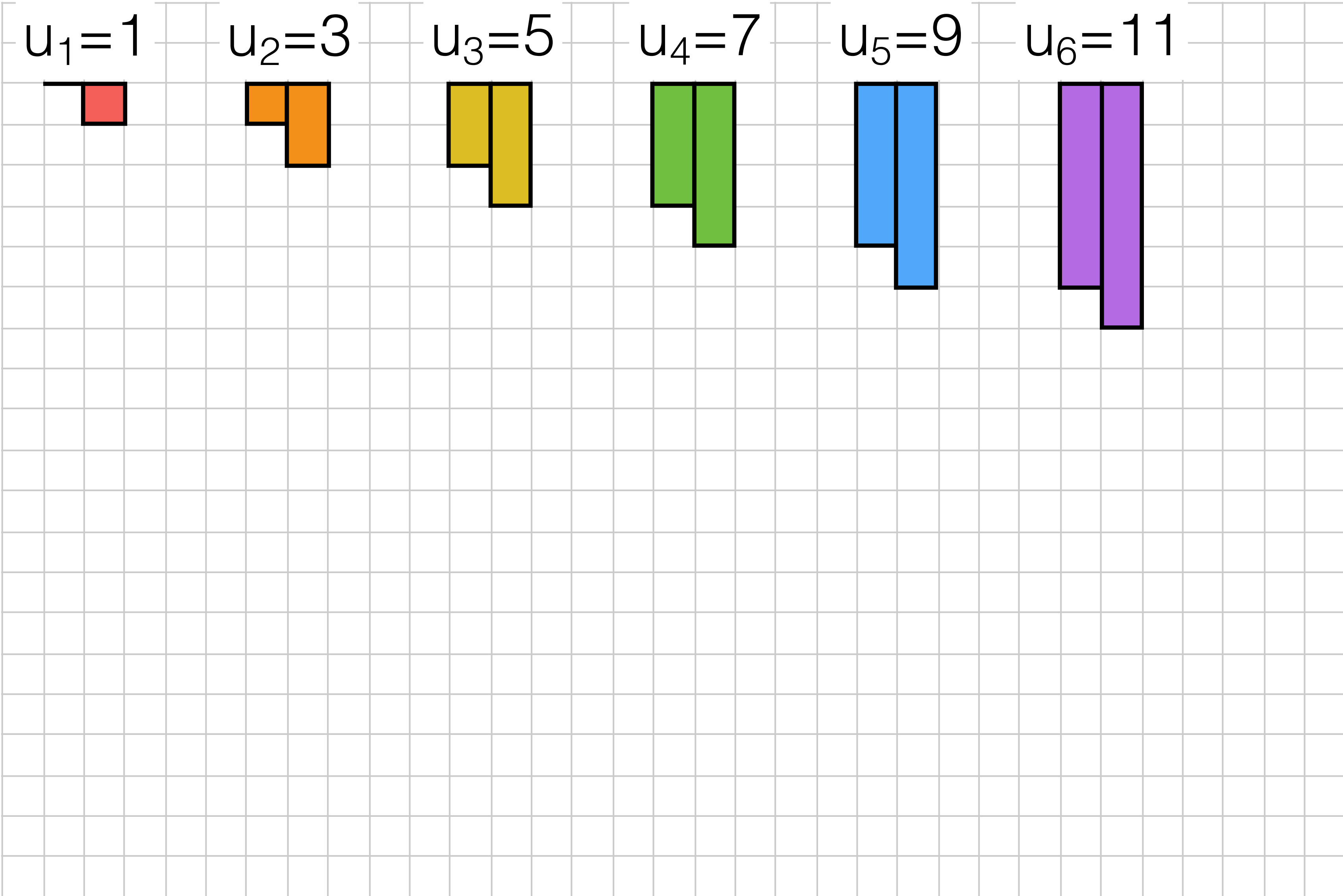
Hilfsüberlegung:
Jede ungerade Zahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Zahlen.

Beispiel: 11 = 5 + 6

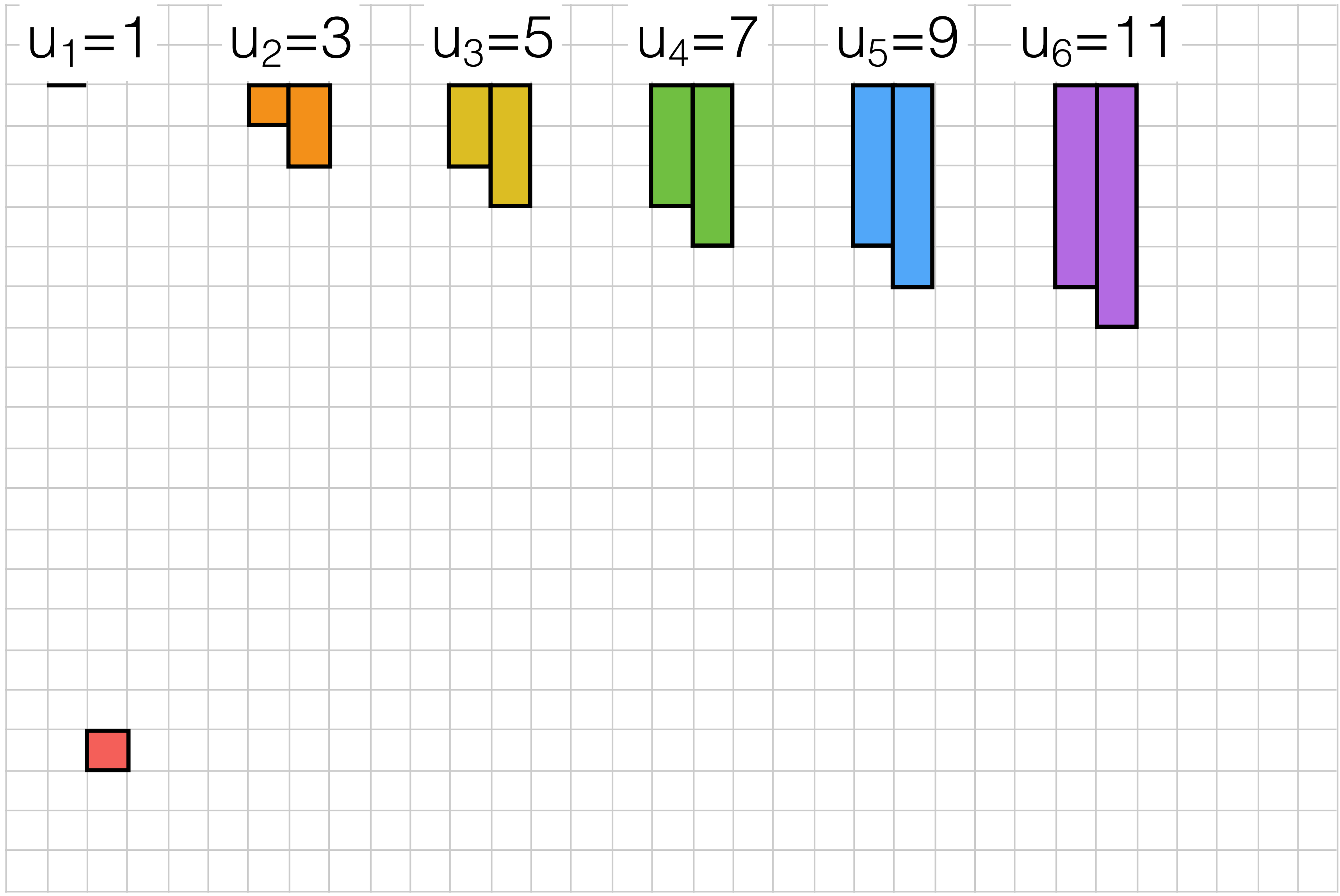
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
unger. Zahl	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Die n. ungerade Zahl kann man zerlegen in die Summe aus n und n-1.

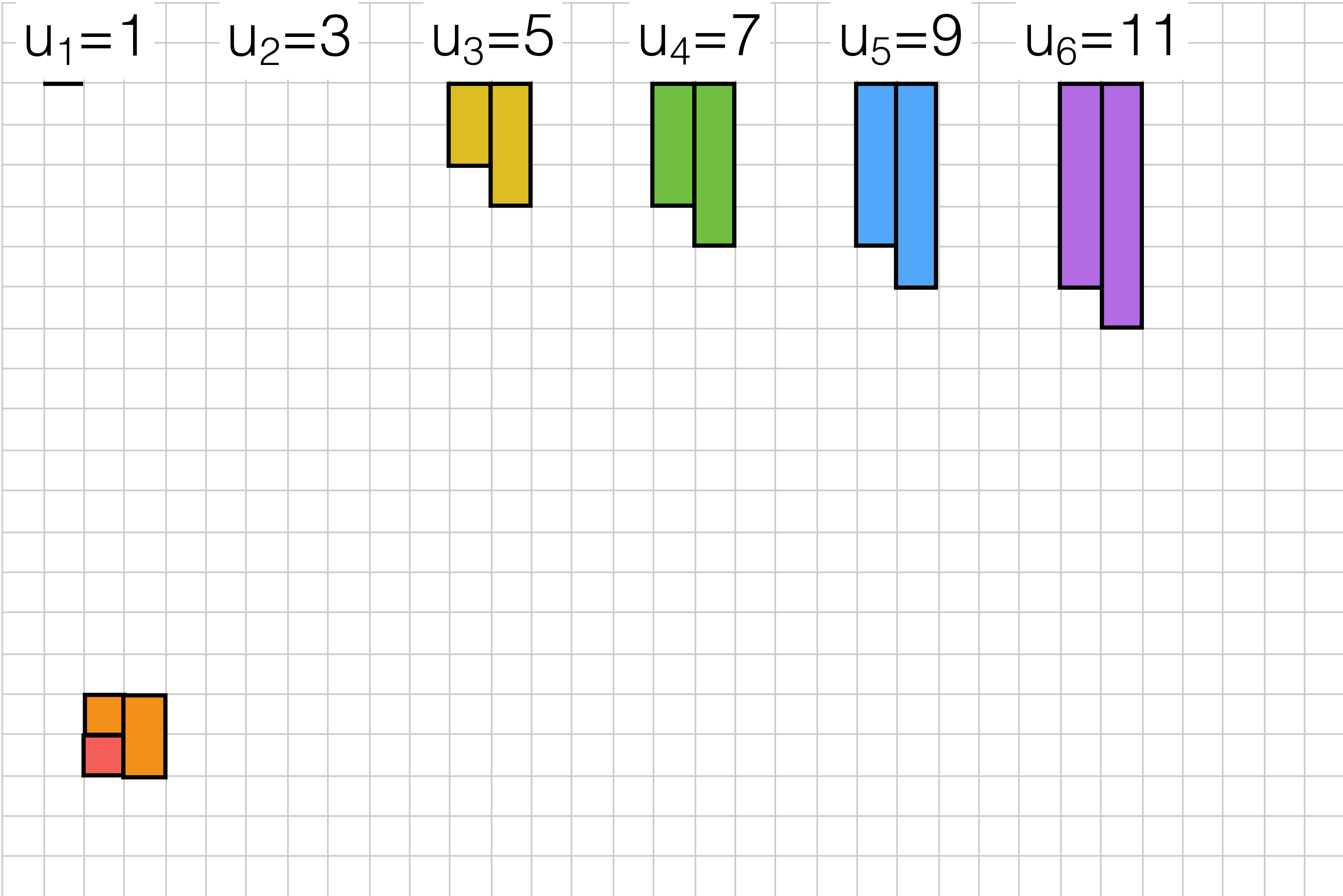
Addition ungerader Zahlen



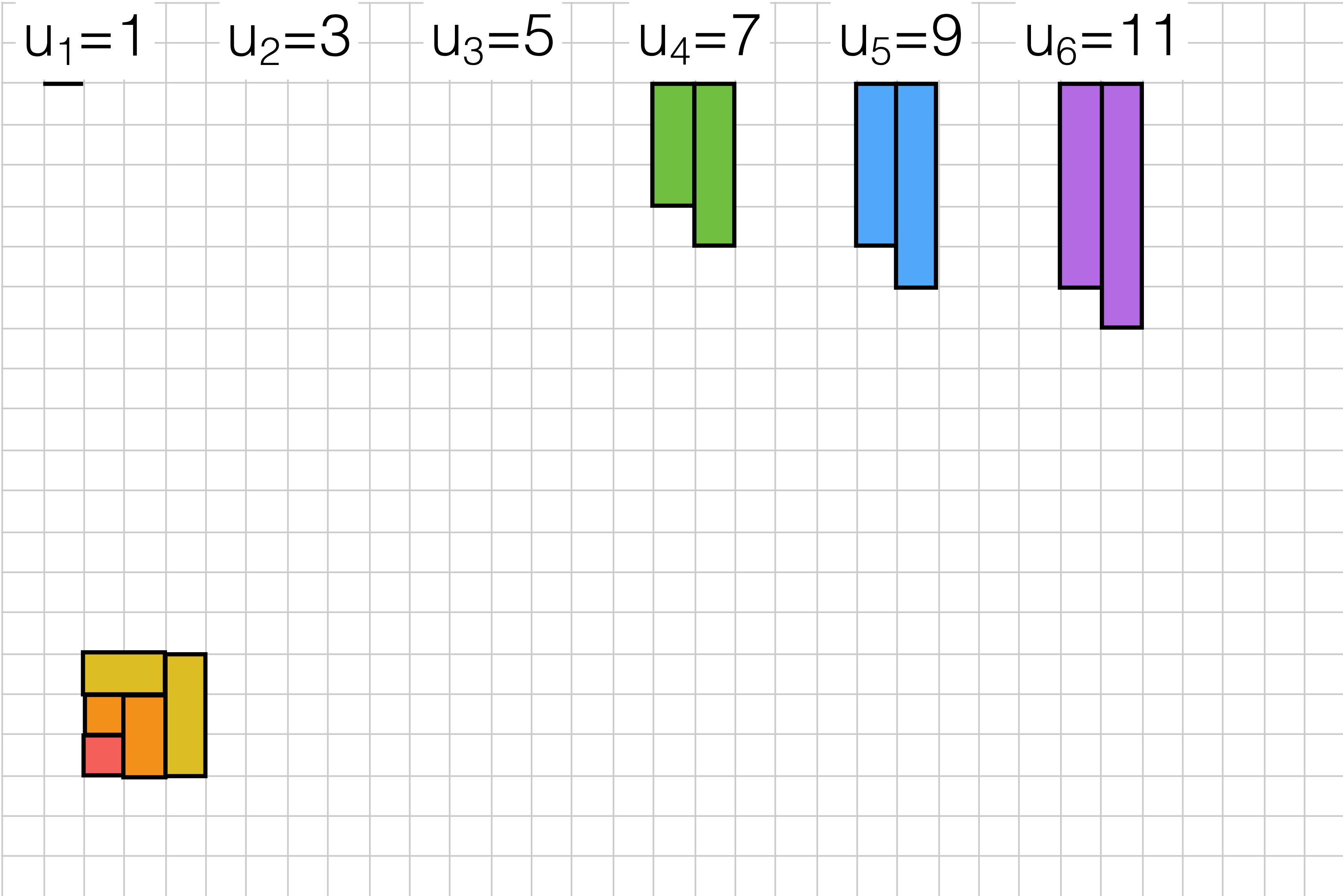
Addition ungerader Zahlen



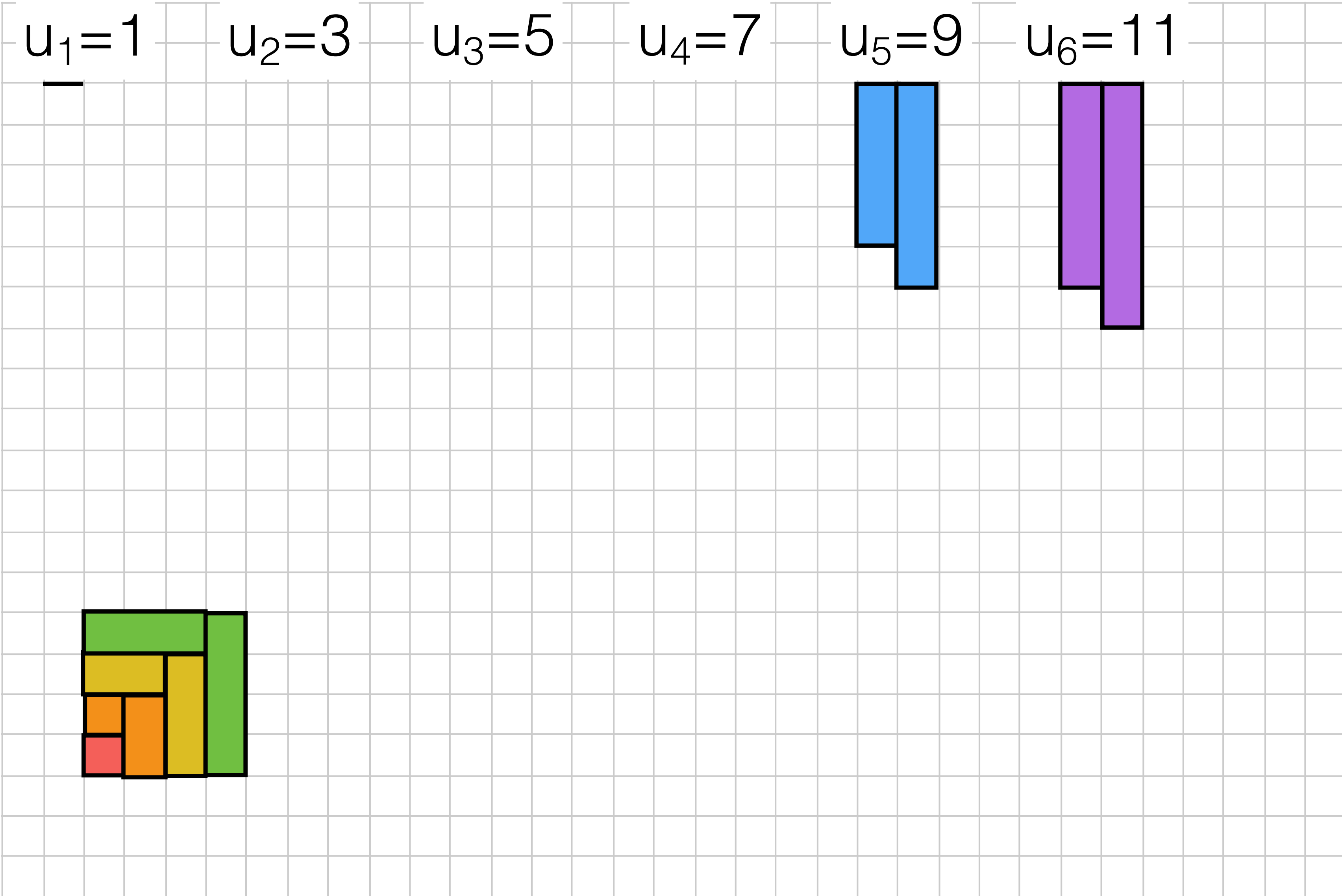
Addition ungerader Zahlen



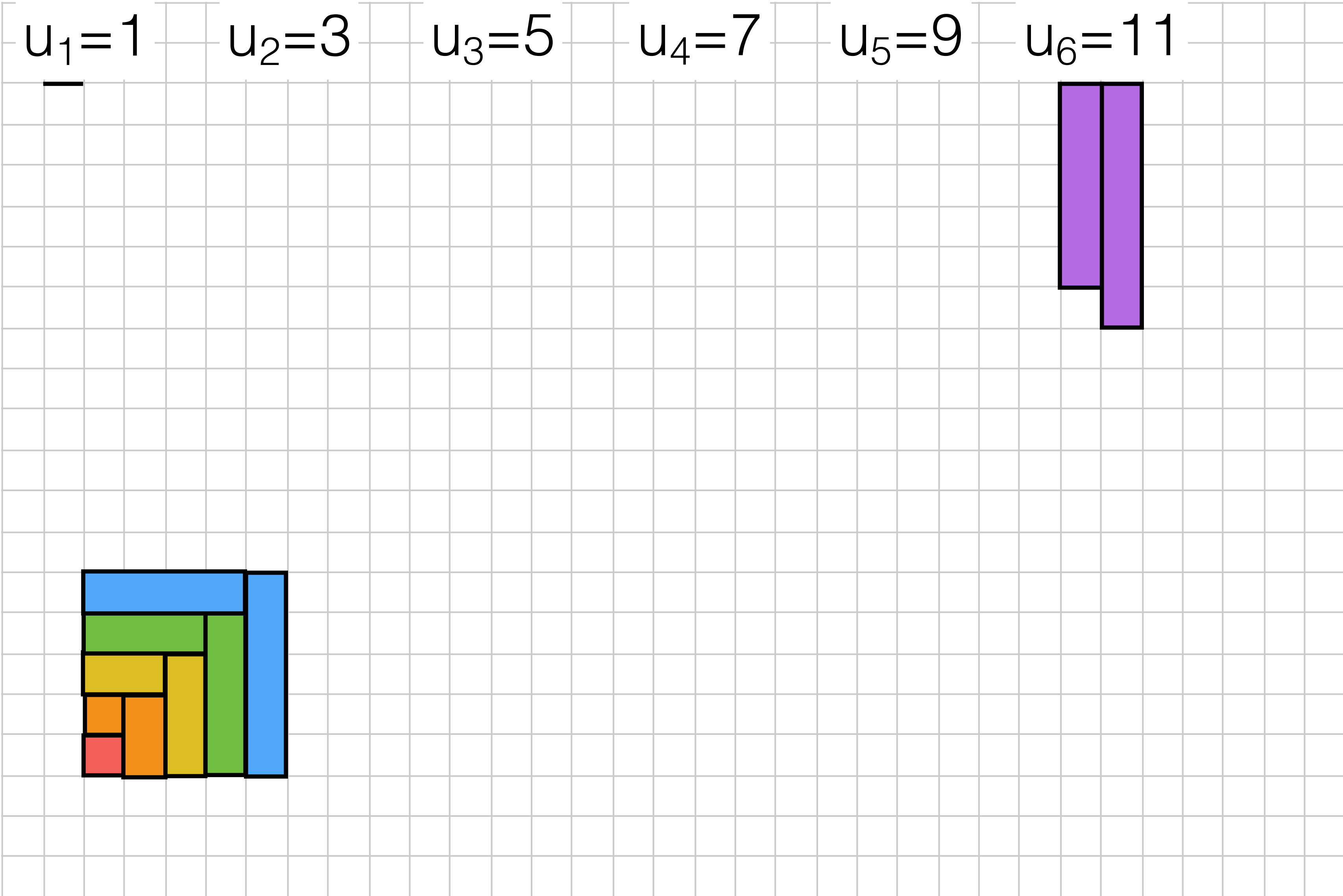
Addition ungerader Zahlen



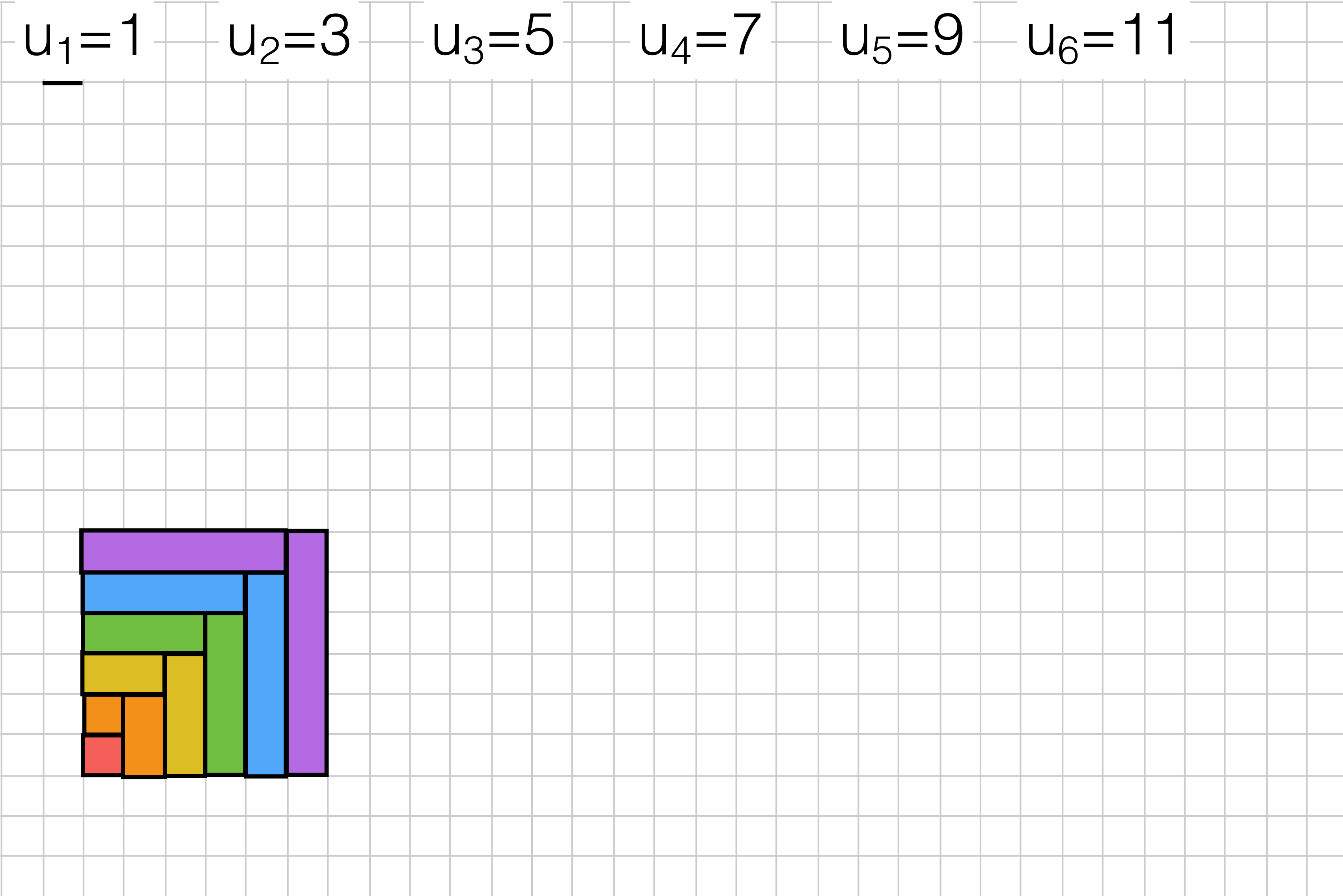
Addition ungerader Zahlen



Addition ungerader Zahlen



Addition ungerader Zahlen



Dreieckszahlen

$$1+2+3+...+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Dreieckszahlen

$$1+2+3+...+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Also:

Dreieckszahlen

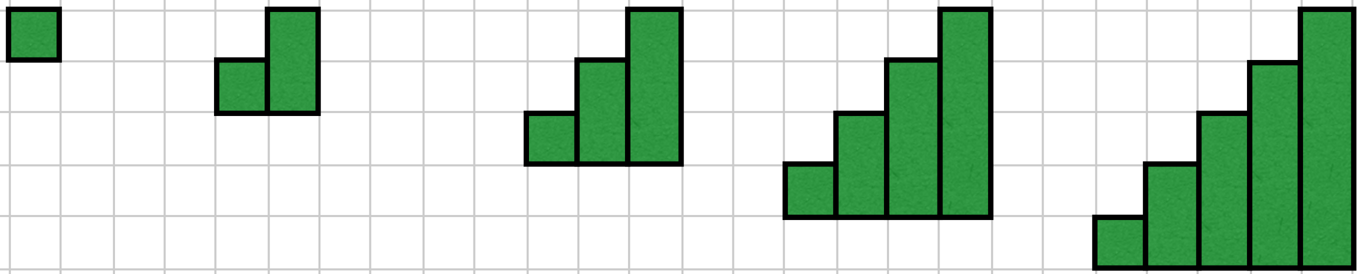
$$1+2+3+\ldots+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Also: $D_1=1$, $D_2=3$, $D_3=6$, $D_4=10$, $D_5=15$

Dreieckszahlen

$$1+2+3+...+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

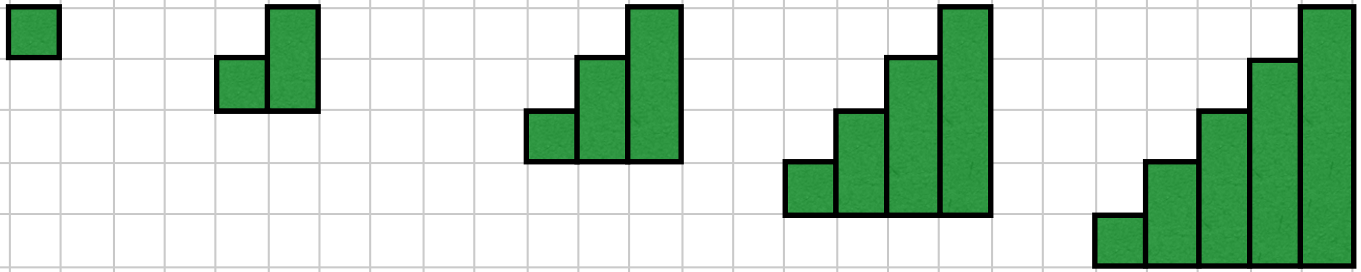
Also: $D_1=1\ ,\quad D_2=3\ ,\quad D_3=6\ ,\quad D_4=10\ ,\quad D_5=15$



Dreieckszahlen

$$1+2+3+...+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Also: $D_1=1\ ,\ \ D_2=3\ ,\ \ D_3=6\ ,\ \ D_4=10\ ,\ \ D_5=15$

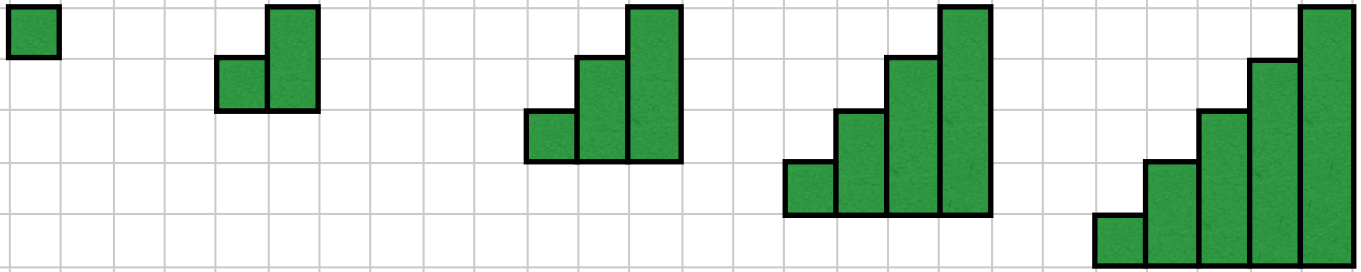


$$2\cdot D_n=n(n+1)$$

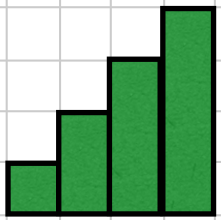
Dreieckszahlen

$$1+2+3+\ldots+n = D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Also: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10$, $D_5 = 15$



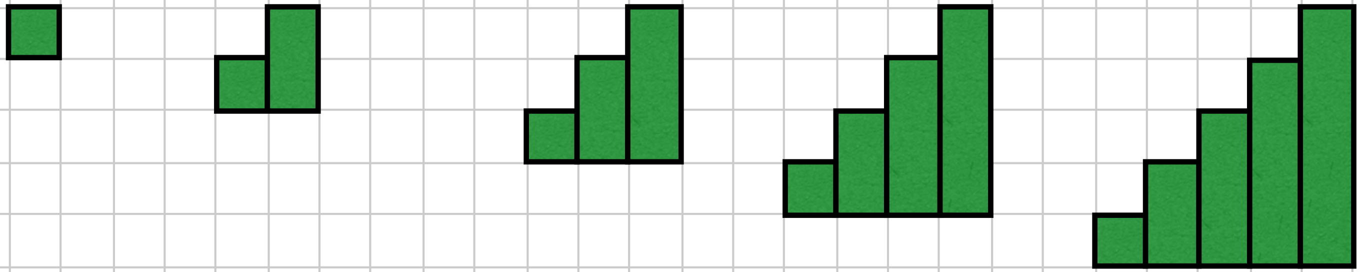
$$2 \cdot D_n = n(n+1)$$



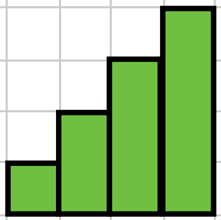
Dreieckszahlen

$$1+2+3+...+n = D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Also: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10$, $D_5 = 15$



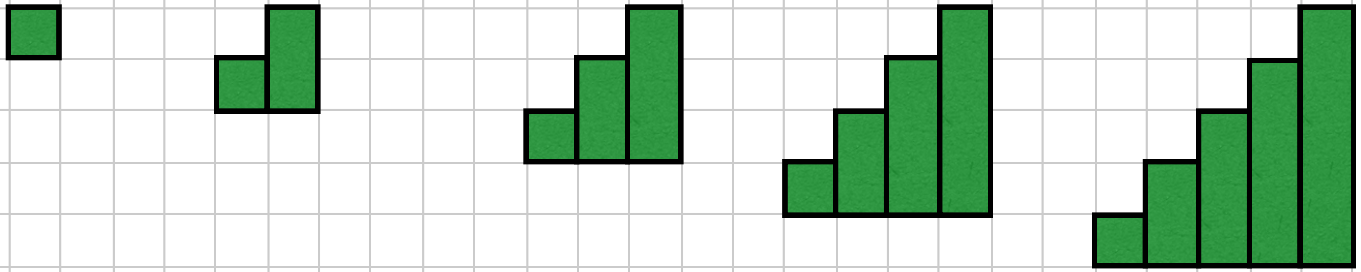
$$2 \cdot D_n = n(n+1)$$



Dreieckszahlen

$$1+2+3+\ldots+n=D_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Also: $D_1=1$, $D_2=3$, $D_3=6$, $D_4=10$, $D_5=15$



$$2\cdot D_n=n(n+1)$$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Beispiel: $36=6^2 = 15 + 21 = D_5 + D_6$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Beispiel: $36 = 6^2 = 15 + 21 = D_5 + D_6$

$$n^2 = D_n + D_{n-1}$$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Beispiel: $36=6^2 = 15 + 21 = D_5 + D_6$

$$n^2 = D_n + D_{n-1}$$

$$D_n + D_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = ... = n^2$$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Beispiel: $49=7^2 = 21 + 28 = D_6 + D_7$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

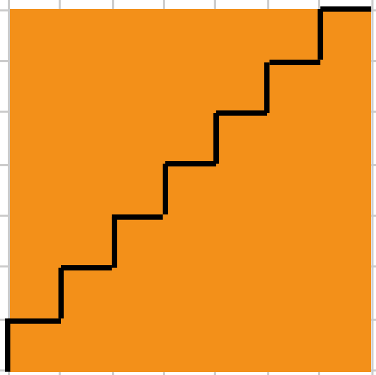
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Beispiel: $49 = 7^2 = 21 + 28 = D_6 + D_7$

Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen

Jede Quadratzahl kann man zerlegen in zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen.

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100



Beispiel: $49=7^2 = 21 + 28 = D_6 + D_7$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

zweidimensional

dreidimensional

Summe der Quadratzahlen

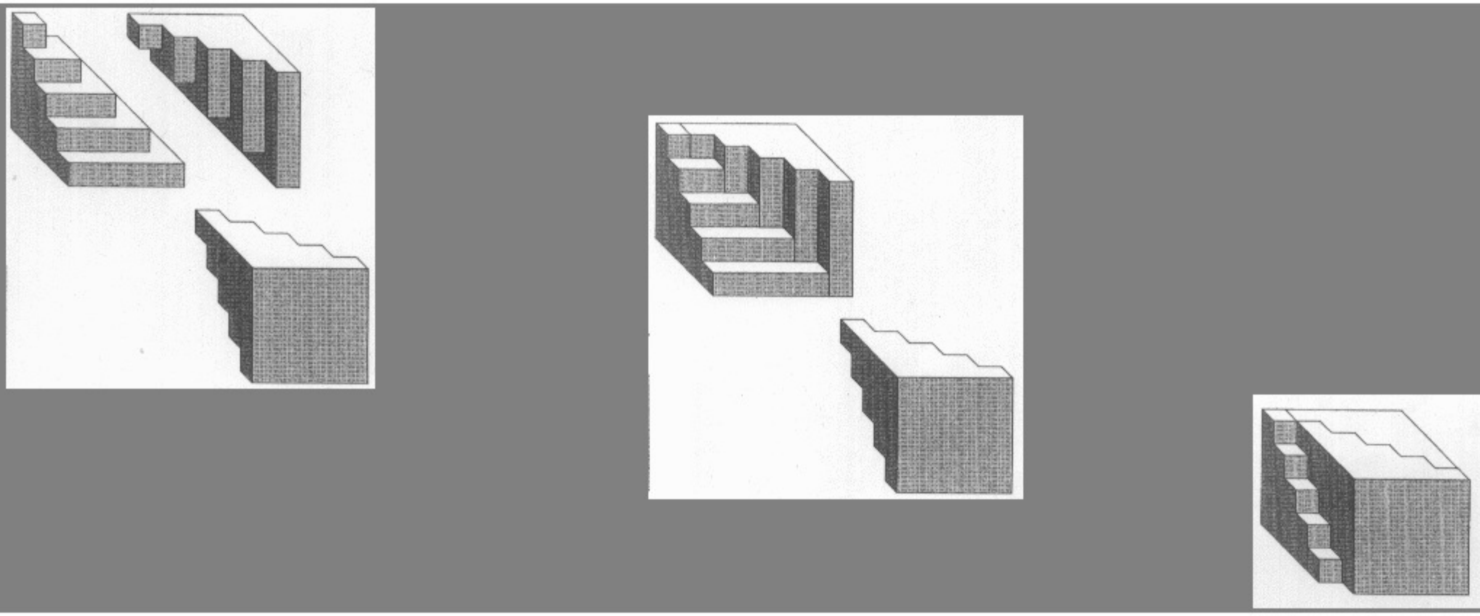
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

zweidimensional dreidimensional

Folgerung für die Visualisierung:
quadratische Platten, die geschickt zu einem Körper zusammengesetzt werden

Summe der Quadratzahlen

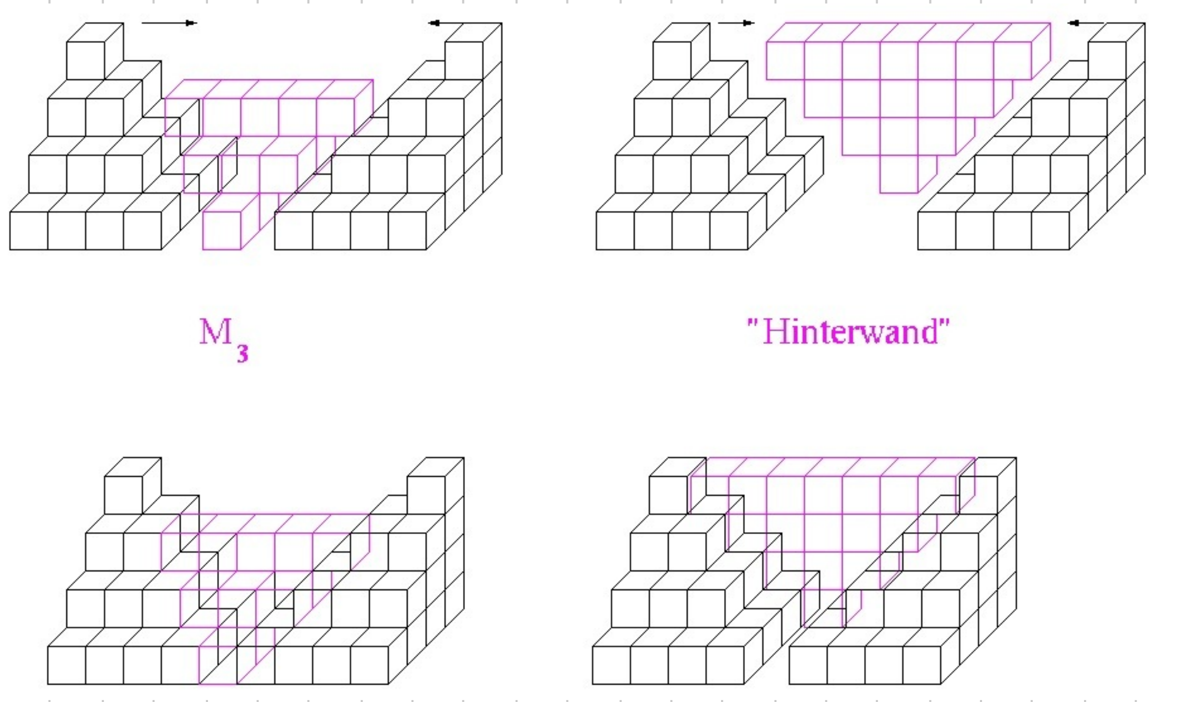
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$



Bielefelder Lösung

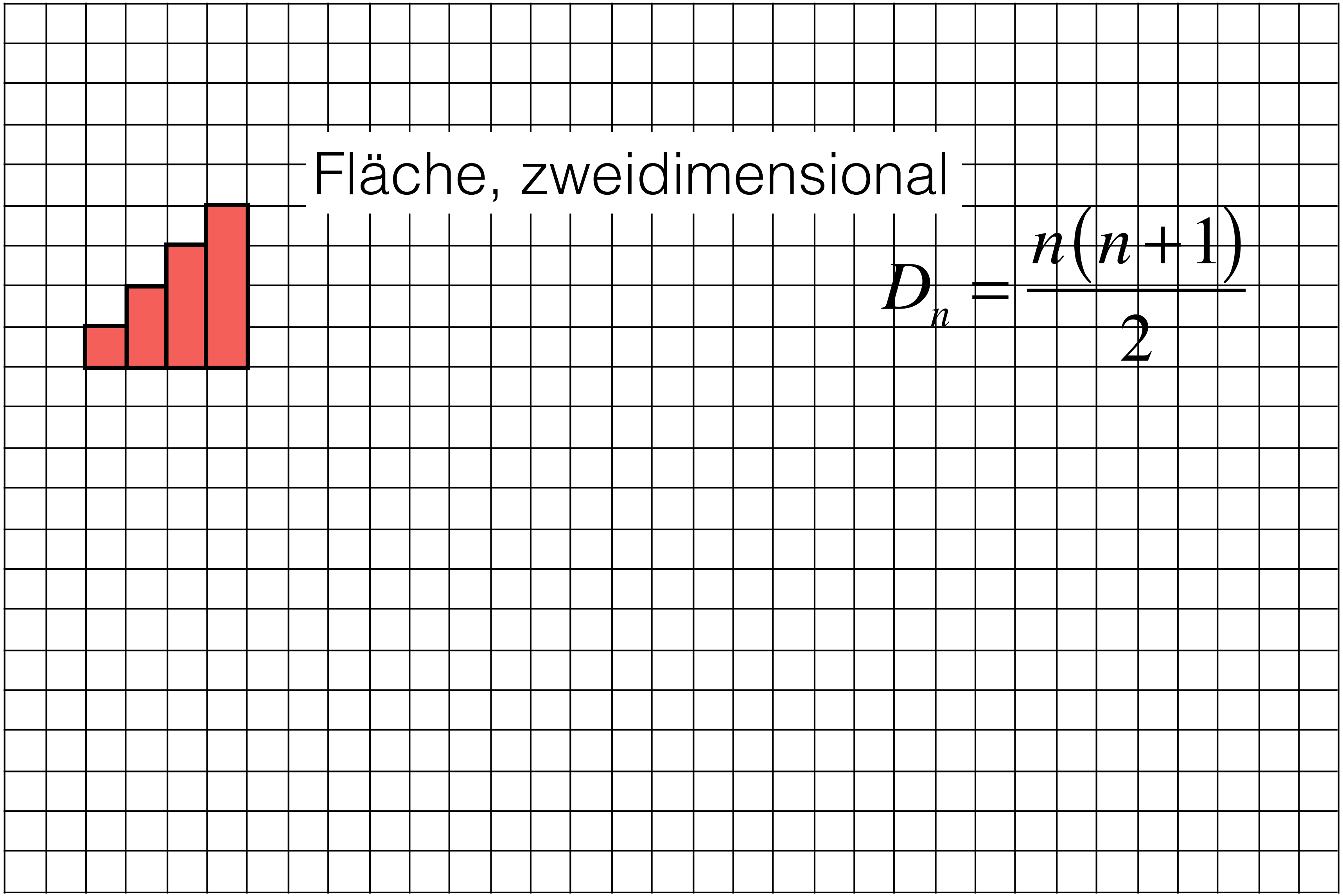
Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$



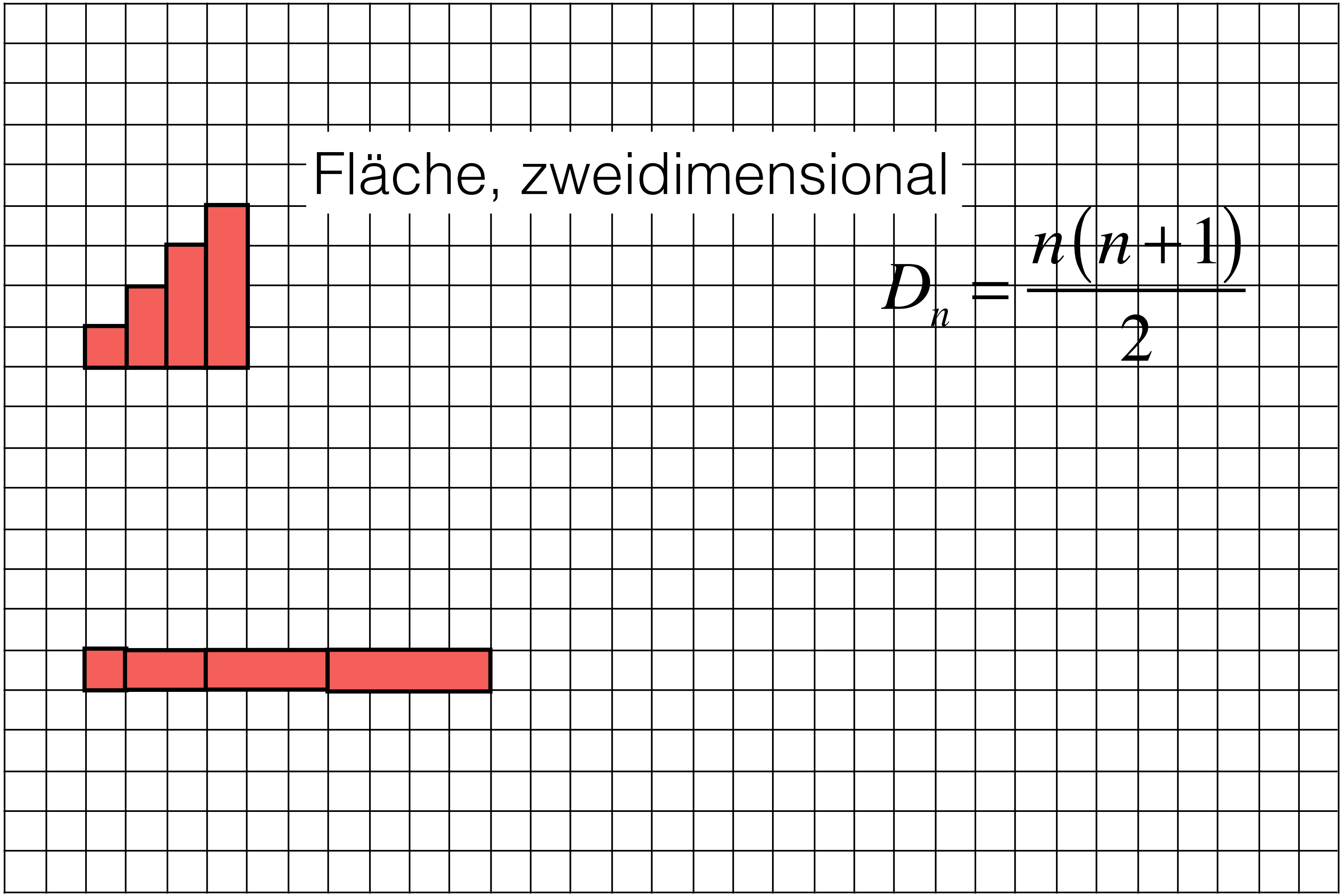
Bayreuther Lösung

Die Dreieckszahlen als Dimensionswandler



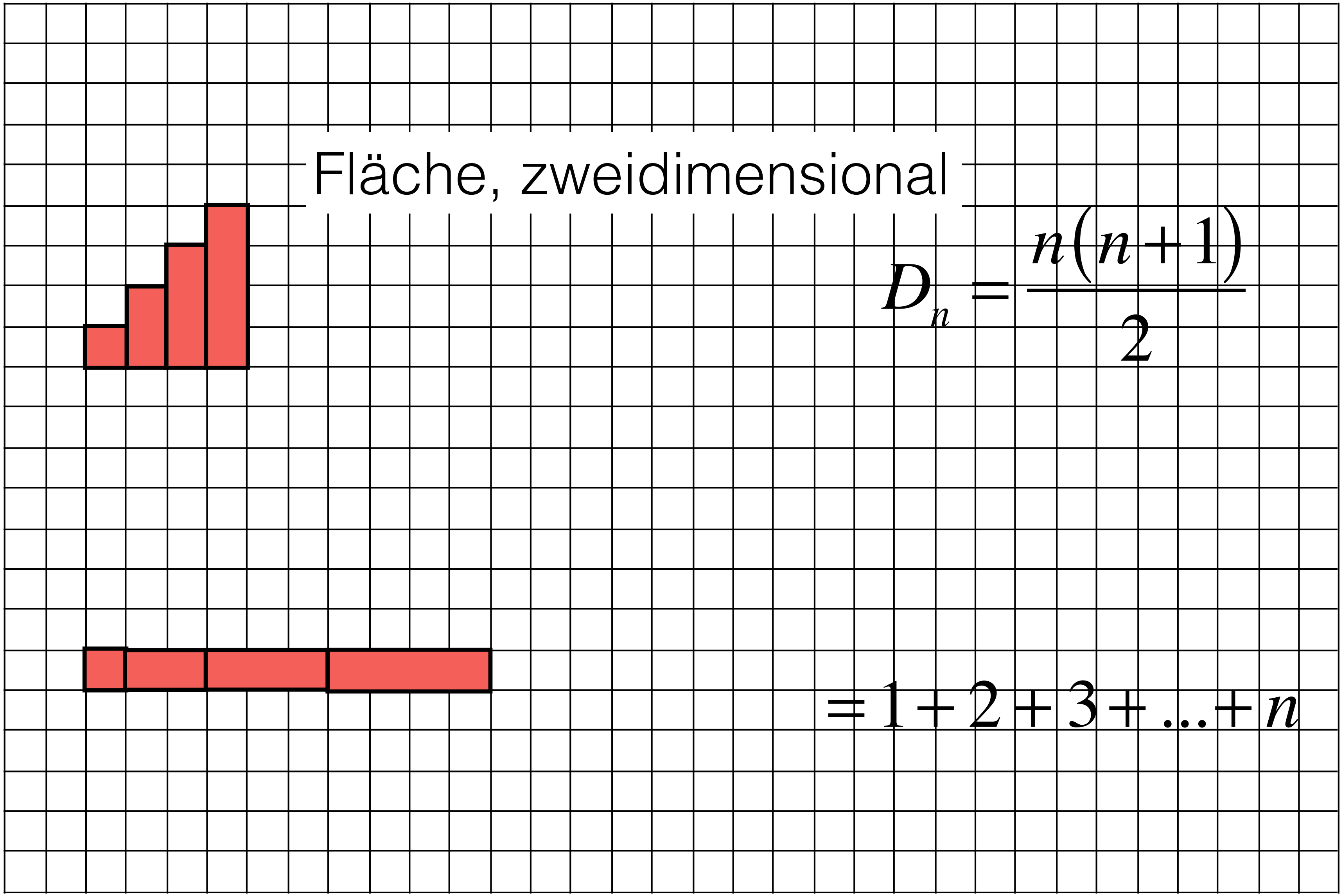
$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Dreieckszahlen als Dimensionswandler



$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Dreieckszahlen als Dimensionswandler

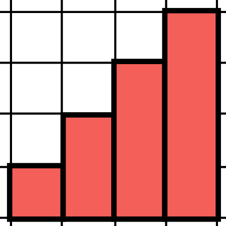


Fläche, zweidimensional

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Die Dreieckszahlen als Dimensionswandler



Fläche, zweidimensional

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

aneinander gelegte Längen, eindimensional

$$= 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3 \cdot 2} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n+1)$$

Länge

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n+1)$$

Länge Länge

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n+1)$$

Länge   Länge

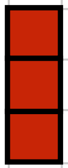
zweidimensional!

Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot 1^2 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$$

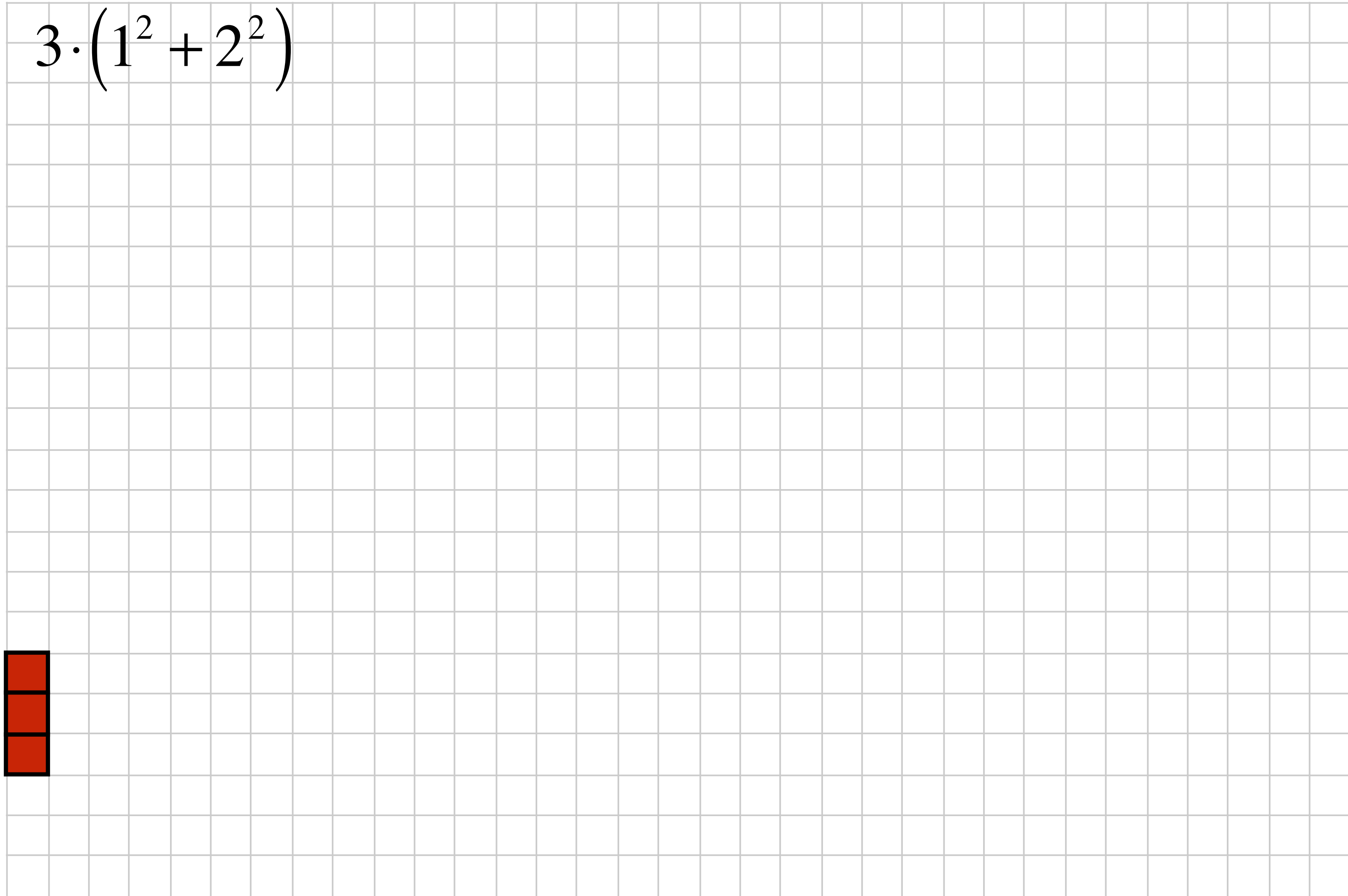
Das ist für $n = 1$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n + 1)$$



Summe der Quadratzahlen

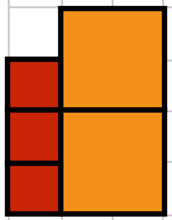
$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

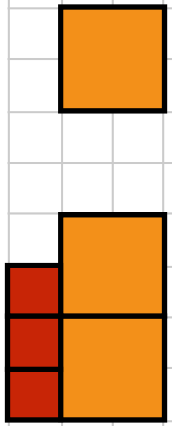


Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…



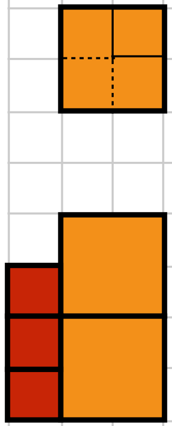
Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .



Summe der Quadratzahlen

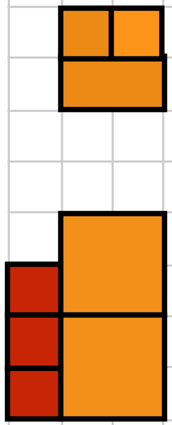
$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

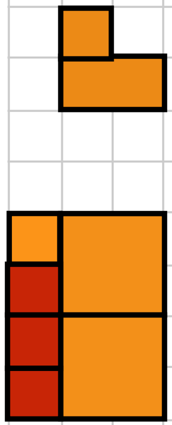
Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.

D_1 füllt die Lücke links.



Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

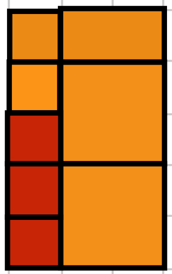
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.

D_1 füllt die Lücke links.

D_2 ergibt eine neue Schicht.



Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

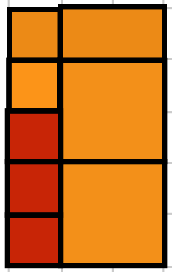
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.

D_1 füllt die Lücke links.

D_2 ergibt eine neue Schicht.



$$3\cdot\left(1^2+2^2\right)=3\cdot 5=3\cdot(2\cdot 2+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

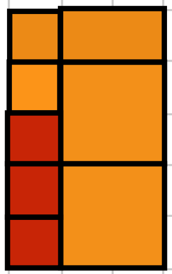
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.

D_1 füllt die Lücke links.

D_2 ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right) = 3 \cdot 5 = {\color{blue}3} \cdot (2 \cdot {\color{magenta}2} + 1)$$

Das ist für $n = 2$

Summe der Quadratzahlen

$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

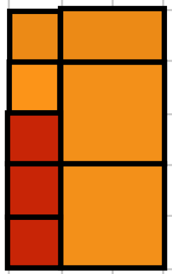
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_2 und D_1 .

D_2 wird in Streifen geschnitten.

D_1 füllt die Lücke links.

D_2 ergibt eine neue Schicht.



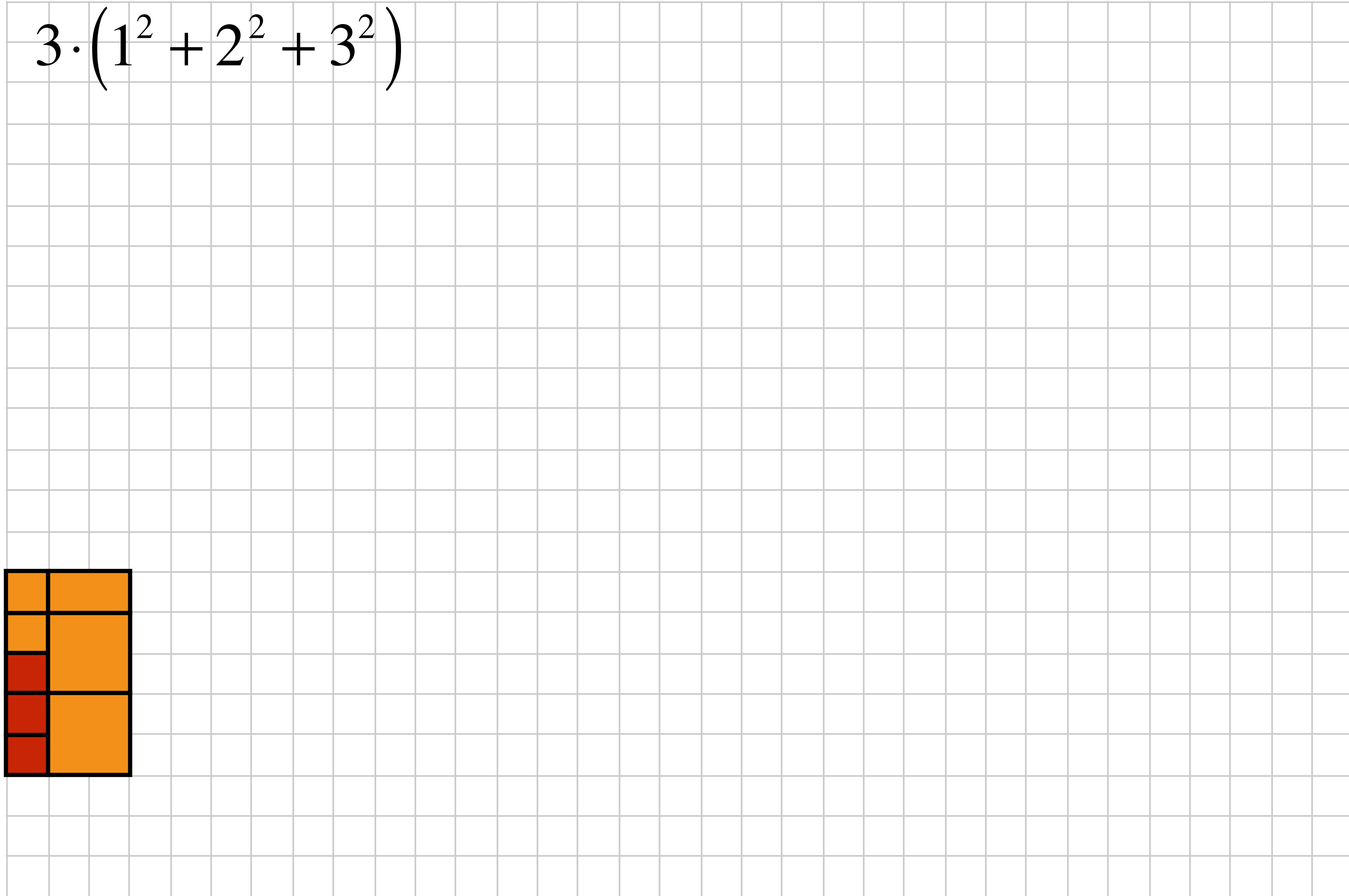
$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right) = 3 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 2 + 1)$$

Das ist für $n = 2$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n + 1)$$

Summe der Quadratzahlen

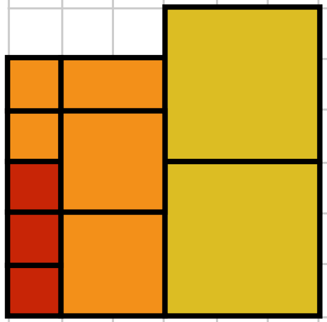
$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

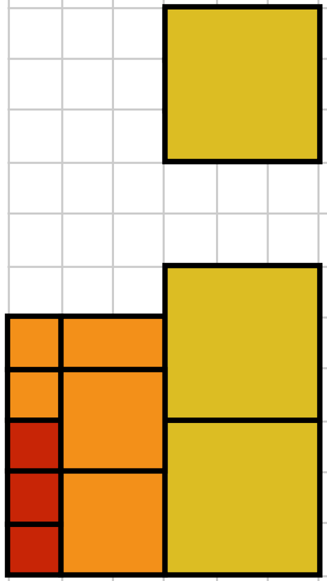


Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…



Summe der Quadratzahlen

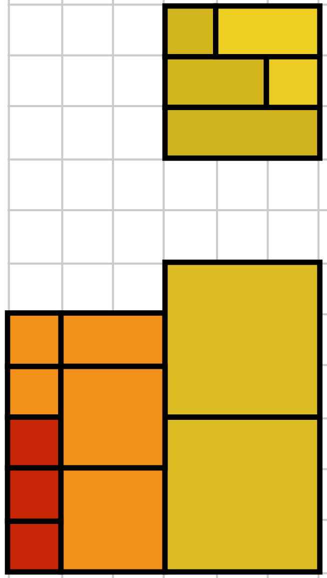
$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.



Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2\right)$$

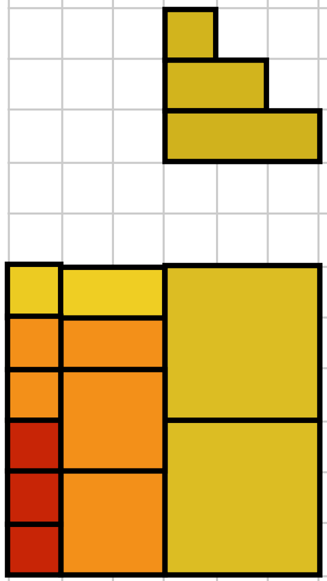
Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_2 füllt die Lücke links.



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

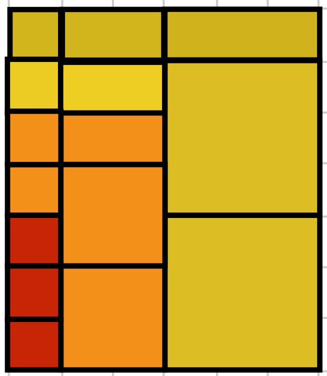
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_2 füllt die Lücke links.

D_3 ergibt eine neue Schicht.



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

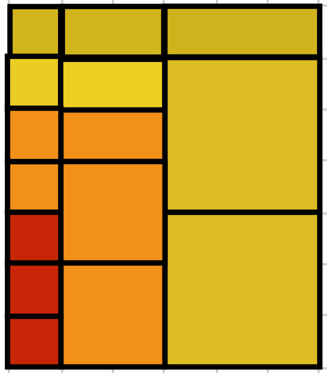
…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_2 füllt die Lücke links.

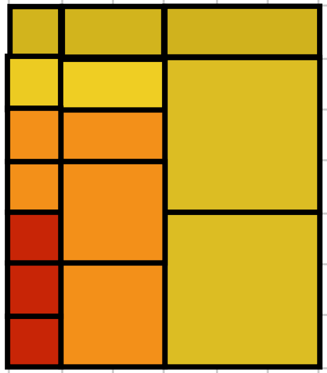
D_3 ergibt eine neue Schicht.

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = \color{blue}{6} \cdot (2 \cdot \color{magenta}{3} + 1)$$



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$



Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_2 füllt die Lücke links.

D_3 ergibt eine neue Schicht.

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = 6 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

Das ist für $n = 3$

Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

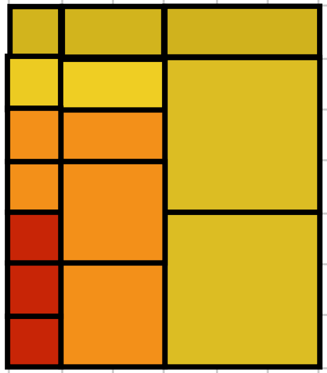
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_3 und D_2 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_2 füllt die Lücke links.

D_3 ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = 6 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

Das ist für $n = 3$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = D_n \cdot (2n + 1)$$

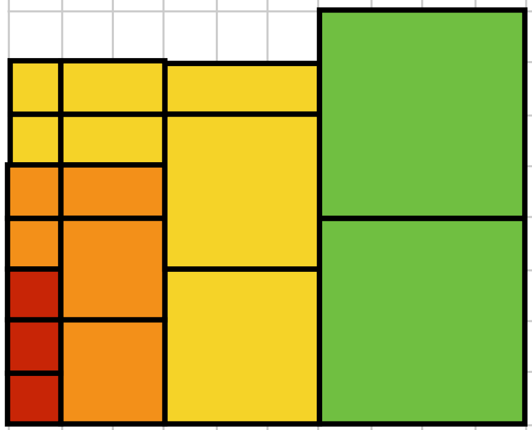
Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

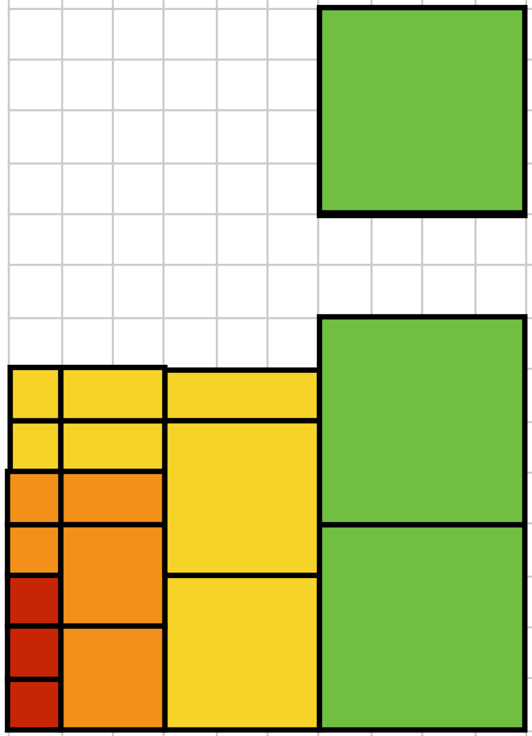


Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…



Summe der Quadratzahlen

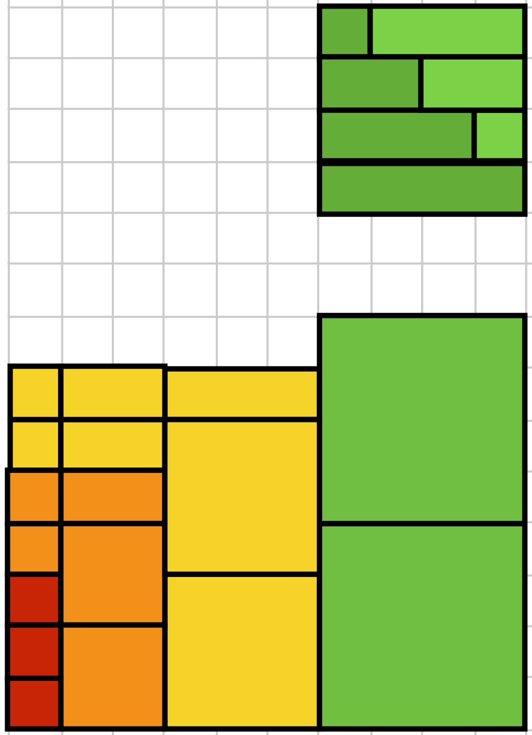
$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

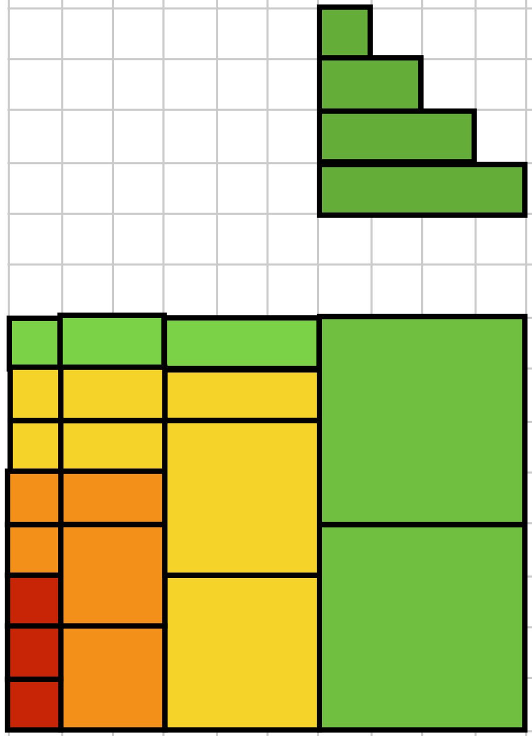
Beide werden in Streifen geschnitten.



Summe der Quadratzahlen

$$3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.



Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_3 füllt die Lücke links.

Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

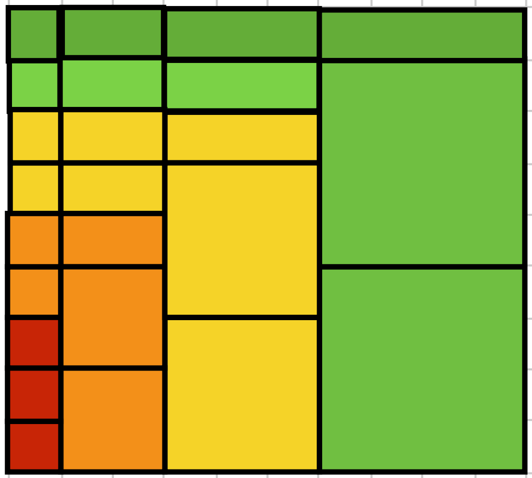
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_3 füllt die Lücke links.

D_4 ergibt eine neue Schicht.



Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

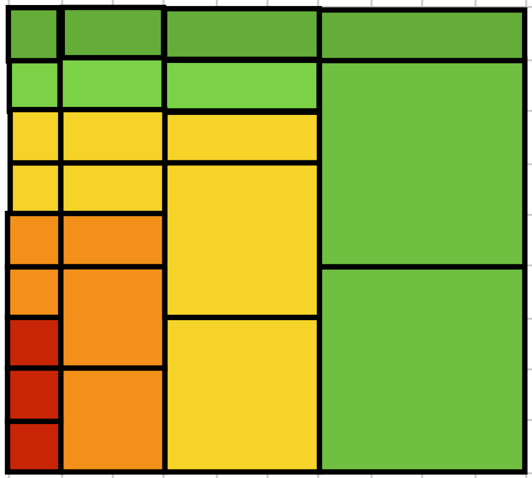
Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_3 füllt die Lücke links.

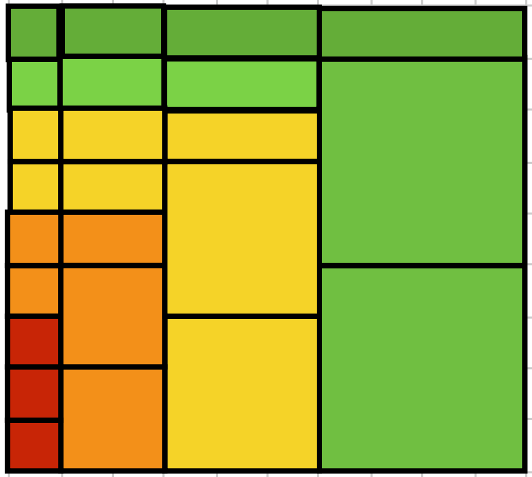
D_4 ergibt eine neue Schicht.



$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=3\cdot 30=10\cdot 9=10\cdot(2\cdot 4+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$$



Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.

Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_3 füllt die Lücke links.

D_4 ergibt eine neue Schicht.

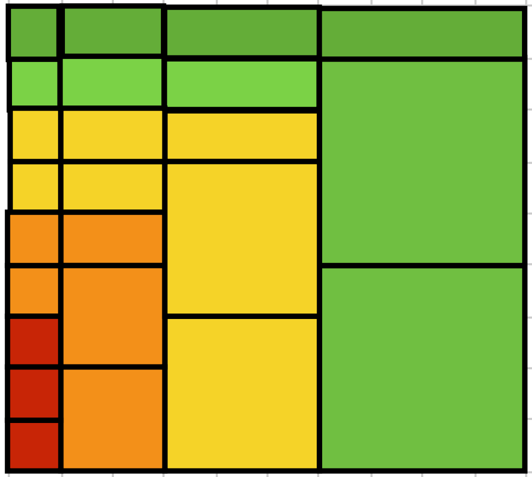
$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=3\cdot 30=10\cdot 9=10\cdot(2\cdot 4+1)$$

Das ist für n = 4

Summe der Quadratzahlen

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$$

Zu den bisherigen Quadraten werden zwei neue dazugelegt.



Das dritte Quadrat…

…wird zerlegt in D_4 und D_3 .

Beide werden in Streifen geschnitten.

D_3 füllt die Lücke links.

D_4 ergibt eine neue Schicht.

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=3\cdot 30=10\cdot 9=10\cdot(2\cdot 4+1)$$

Das ist für $n = 4$

$$3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2=D_n\cdot(2n+1)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4:

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{3 \cdot 2} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beispiel für $n = 4$: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{6} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (n+2)$$

Beispiel für n = 4: $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

$$\frac{1}{\cancel{6}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} = 20$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{2} n \cdot \left(n+1\right) \cdot (n+2)$$

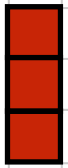
$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = D_n \cdot (n+2)$$

Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot D_1 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot (1 + 2)$$

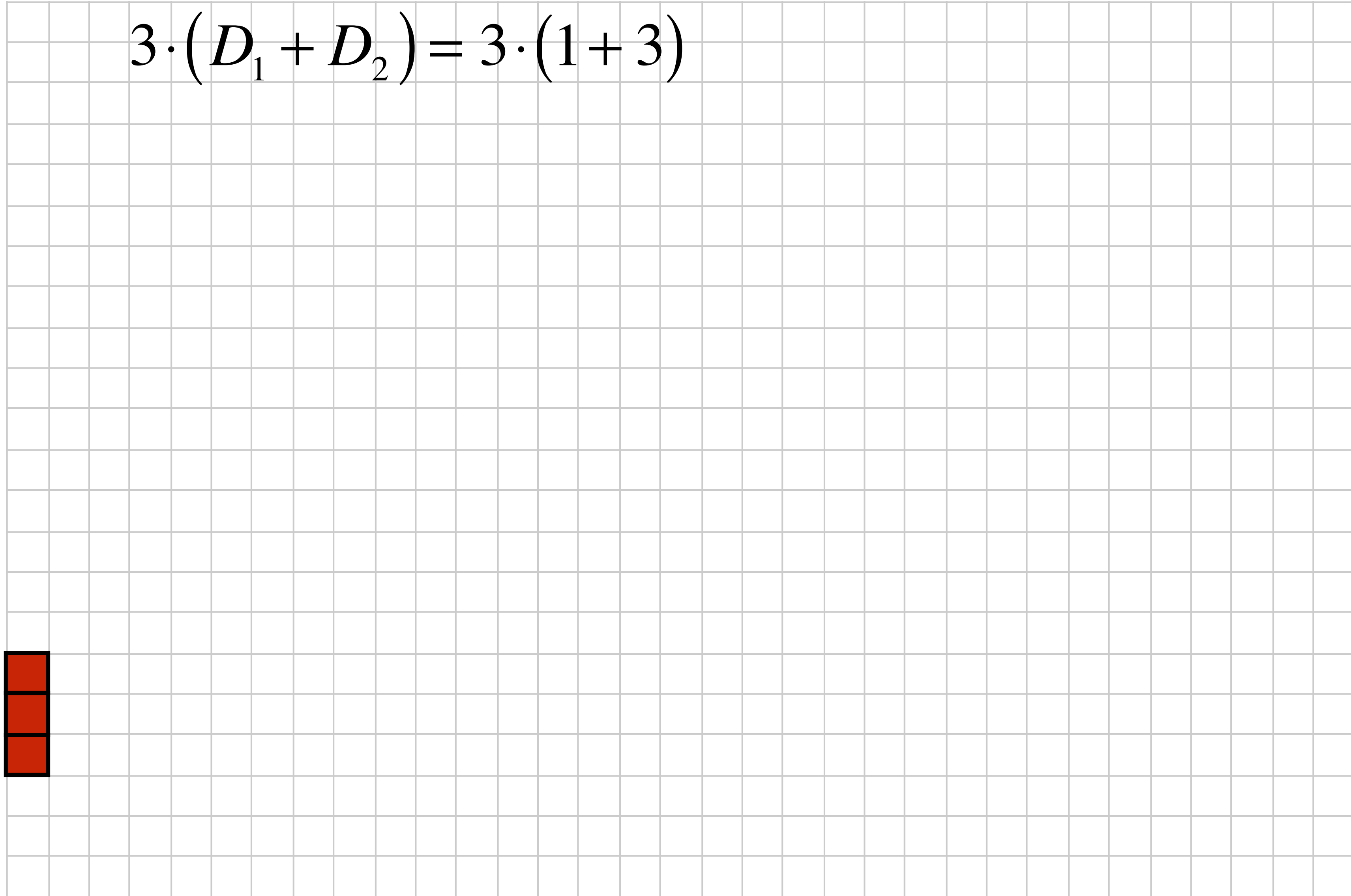
Das ist für $n = 1$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = D_n \cdot (2n + 1)$$



Summe der Dreieckszahlen

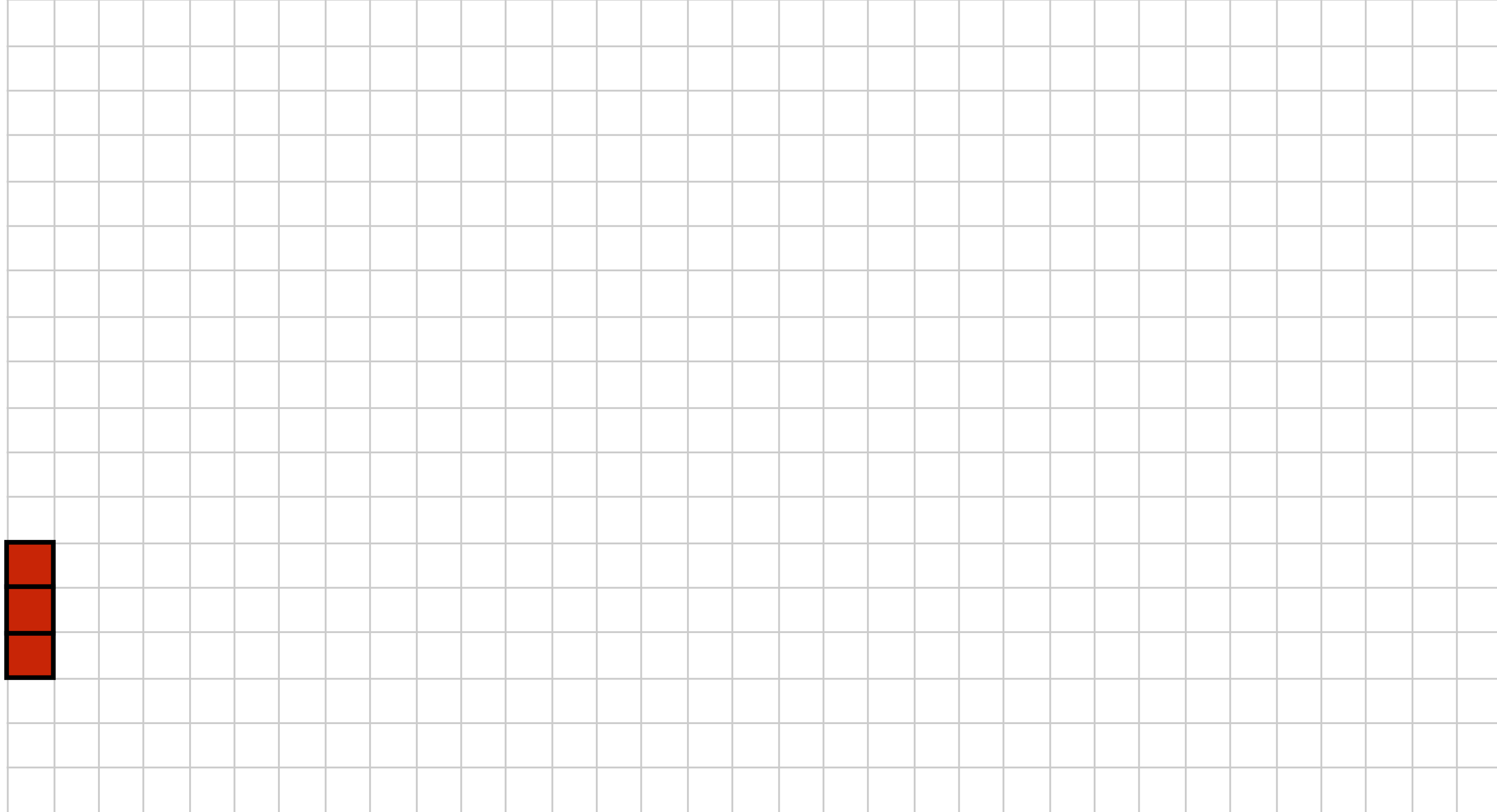
$$3 \cdot (D_1 + D_2) = 3 \cdot (1 + 3)$$



Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot (D_1 + D_2) = 3 \cdot (1 + 3)$$

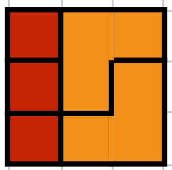
Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.



Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2\right)=3\cdot\left(1+3\right)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

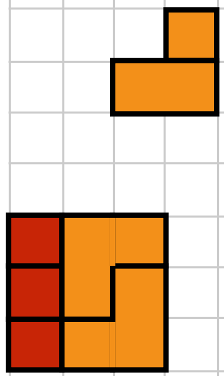


Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2\right) = 3 \cdot (1 + 3)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…



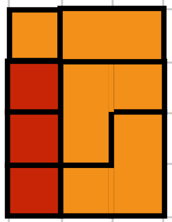
Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2\right)=3\cdot(1+3)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



Summe der Dreieckszahlen

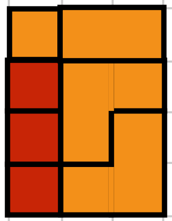
$$3 \cdot \left(D_1 + D_2\right) = 3 \cdot (1 + 3)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.

$$3 \cdot \left(1 + 3\right) = 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 + 2)$$



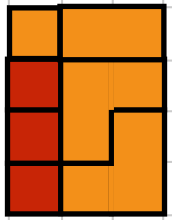
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2\right) = 3 \cdot (1 + 3)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot \left(1 + 3\right) = 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 + 2)$$

Das ist für $n = 2$

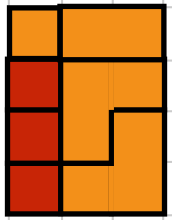
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot (D_1 + D_2) = 3 \cdot (1 + 3)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



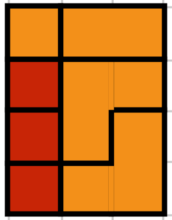
$$3 \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 + 2)$$

Das ist für $n = 2$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = D_n \cdot (n + 2)$$

Summe der Dreieckszahlen

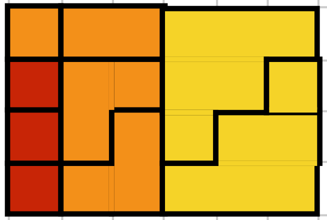
$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$



Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3 \right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

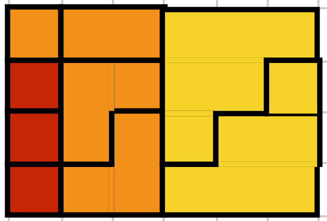


Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2+D_3\right)=3\cdot(1+3+6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

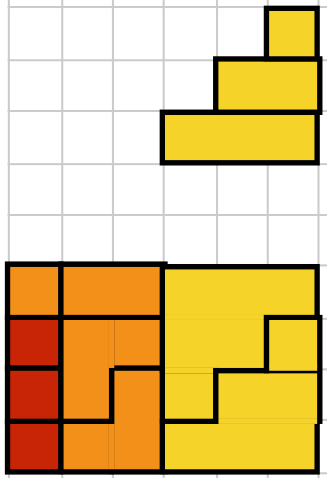


Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…



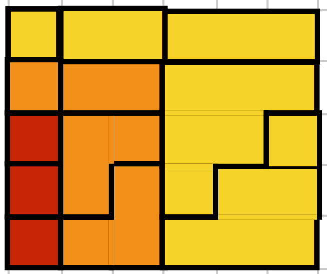
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3 \right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



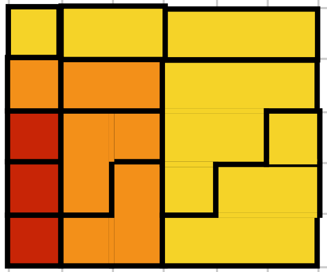
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot \left(1 + 3 + 6\right) = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 6 \cdot (3 + 2)$$

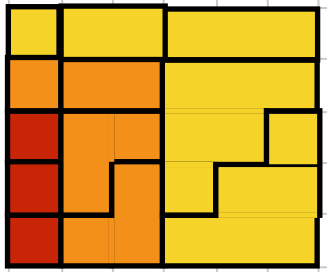
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot \left(1 + 3 + 6\right) = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 6 \cdot (3 + 2)$$

Das ist für $n = 3$

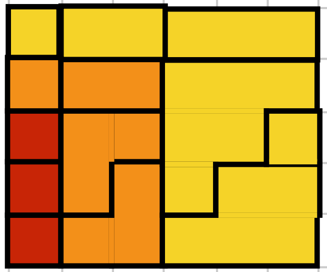
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



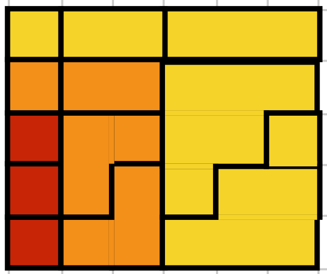
$$3 \cdot \left(1 + 3 + 6\right) = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 6 \cdot (3 + 2)$$

Das ist für $n = 3$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = D_n \cdot (n + 2)$$

Summe der Dreieckszahlen

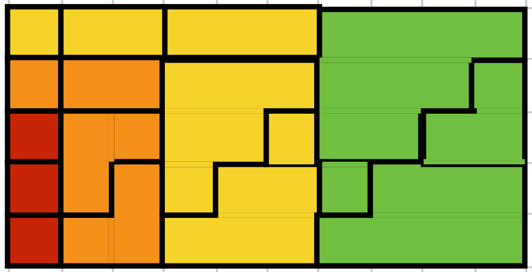
$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \right) = 3 \cdot \left(1 + 3 + 6 + 10 \right)$$



Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2+D_3+D_4\right)=3\cdot\left(1+3+6+10\right)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

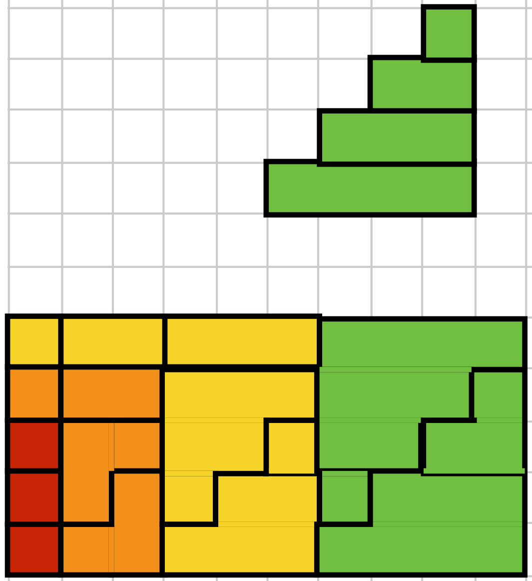


Summme der Dreieckszahlen

$$3 \cdot (D_1 + D_2 + D_3 + D_4) = 3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…



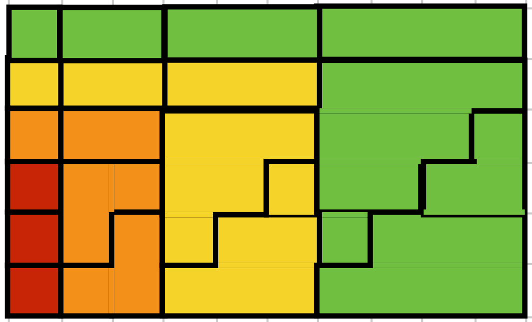
Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2+D_3+D_4\right)=3\cdot\left(1+3+6+10\right)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



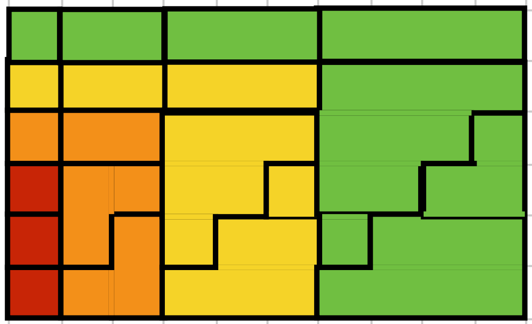
Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2+D_3+D_4\right)=3\cdot(1+3+6+10)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3\cdot\left(1+3+6+10\right)=3\cdot 20=10\cdot 6=10\cdot(4+2)$$

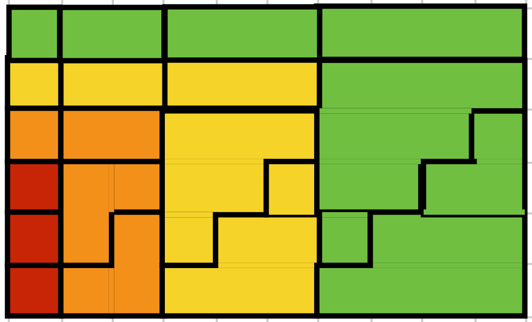
Summe der Dreieckszahlen

$$3\cdot\left(D_1+D_2+D_3+D_4\right)=3\cdot\left(1+3+6+10\right)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3\cdot\left(1+3+6+10\right)=3\cdot 20=10\cdot 6=10\cdot(4+2)$$

Das ist für n = 4

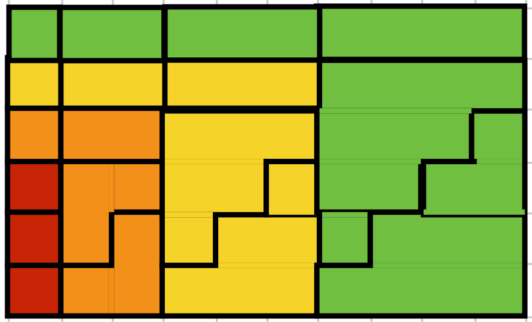
Summe der Dreieckszahlen

$$3 \cdot \left(D_1 + D_2 + D_3 + D_4\right) = 3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10)$$

Zu den bisherigen Dreieckszahlen werden zwei neue dazugelegt.

Die dritte Dreieckszahl wird in Streifen geschnitten…

… und ergibt eine neue Schicht.



$$3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10) = 3 \cdot 20 = 10 \cdot 6 = 10 \cdot (4 + 2)$$

Das ist für $n = 4$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} D_k = D_n \cdot (n + 2)$$

Summe der Dreieckszahlen

Die Summe von Dreieckszahlen

Addiert man Dreieckszahlen, so erhält man die Tetraederzahlen. Für die explizite Formel der Tetraederzahlen

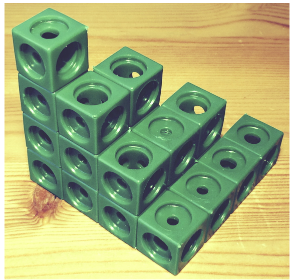
$$T_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

gibt es verschiedene Herleitungen und Begründungen.
Hier wollen wir analog zur Idee des jungen Gauß (Summe 1 bis 100) arbeiten.

Vorüberlegung

$$\begin{array}{llll}
T_n = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \ldots + D_{n-1} + D_n & & & = n \cdot 1 \\
\quad = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 & & & +(n-1) \cdot 2 \\
\quad + \quad 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2 & & \text{das kann man} & +(n-2) \cdot 3 \\
\quad + \quad\quad 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 & & \text{zeilenweise} & +(n-3) \cdot 4 \\
\quad + \quad\quad\quad 4 + \ldots + 4 + 4 & & \text{zusammenfassen} & \ldots \\
\quad\quad\quad\quad\quad \ldots & & & +2 \cdot (n-1) \\
\quad + \quad\quad\quad\quad n-1 + n-1 & & & +1 \cdot n \\
\quad + \quad\quad\quad\quad\quad n & & &
\end{array}$$

Grafisch: In der Abbildung rechts sehen wir den Tetraeder der Stufe 4. Die Schichten von links hinten nach rechts vorn sind die Dreieckszahlen D_4, dahinter D_3, D_2 und D_1.
Betrachtet man die Schichten von vorn links nach rechts hinten, so hat man Rechtecke der Form 1x4, 2x3, 3x2 und 4x1.



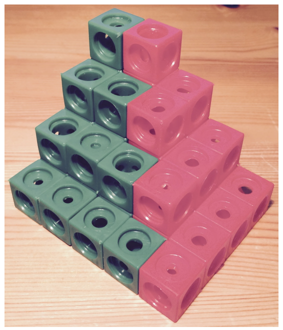
1.Variante

Nun addieren wir dreimal die Summe der Dreiecks-zahlen, ein Mal in der neu hergeleiteten Form und zwei Mal in der direkten.

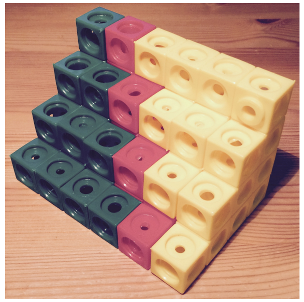
$$\begin{aligned}
T_n &= n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + (n-3) \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n \\
T_n &= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \ldots + D_{n-1} + D_n \\
T_n &= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \ldots + D_{n-1} + D_n \\
\hline
3T_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[(n-(k-1)) \cdot k + 2D_k \right]
\end{aligned}$$

Erläuterung: Jeder Dreiersummand in einer Spalte hat die Form, wie sie in der eckigen Klammer hinter dem Summenzeichen steht.

Grafisch: Auf jeder horizontalen Ebene werden zwei Dreieckszahlen addiert (oben D_1, ganz unten D_4).



Sie formen Rechtecke der Struktur $k \cdot (k+1)$.
Fügt man nun den dritten Tetraeder an, so addiert man Rechtecke der Struktur $(n-k+1) \cdot k$. Das Gesamtgebilde besteht aus Dreiecken (hier Stufe 4), von denen n+2 (hier 6) nebeneinander liegen.



Den Term, über den summiert wird [eckige Klammer], können wir zusammenfassen.

$$\begin{aligned}
(n-(k-1)) \cdot k + 2D_k &= (n-(k-1)) \cdot k + 2\frac{k(k+1)}{2} \\
&= (n-k+1) \cdot k + k(k+1) \\
&= k \cdot (n-k+1+k+1) \\
&= k \cdot (n+2)
\end{aligned}$$

Setzen wir das in die Summe ein und lösen den Laufindex k auf, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
3T_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[k(n+2) \right] \\
&= 1 \cdot (n+2) + 2 \cdot (n+2) + 3 \cdot (n+2) + \ldots + (n-1) \cdot (n+2) + n \cdot (n+2) \\
&= (n+2) \cdot \underbrace{(1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n)}_{\text{n-te Dreieckszahl}} \\
&= (n+2) \cdot \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Nun muss man die Gleichung nur noch durch 3 teilen und leicht ordnen.

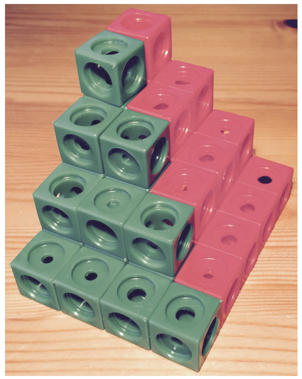
$$T_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

□

2.Variante

Diese Variante wollen wir grafisch beginnen. Man verwendet die gleichen Teile wie bei der ersten Variante, baut sie aber etwas anders zusammen.

Wieder werden zwei Teile zusammengefügt, so dass die Dreiecke in jeder horizontalen Ebene Rechtecke der Struktur $k \cdot (k+1)$ formen (oben 1 x 2, ganz unten 4 x 5).



Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = D_n^{\ 2}$$

Beispiele:

Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = D_n^{\ 2}$$

Beispiele:

$$n = 2: \quad \sum_{k=1}^{2} k^3 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$

Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = D_n^{\ 2}$$

Beispiele:

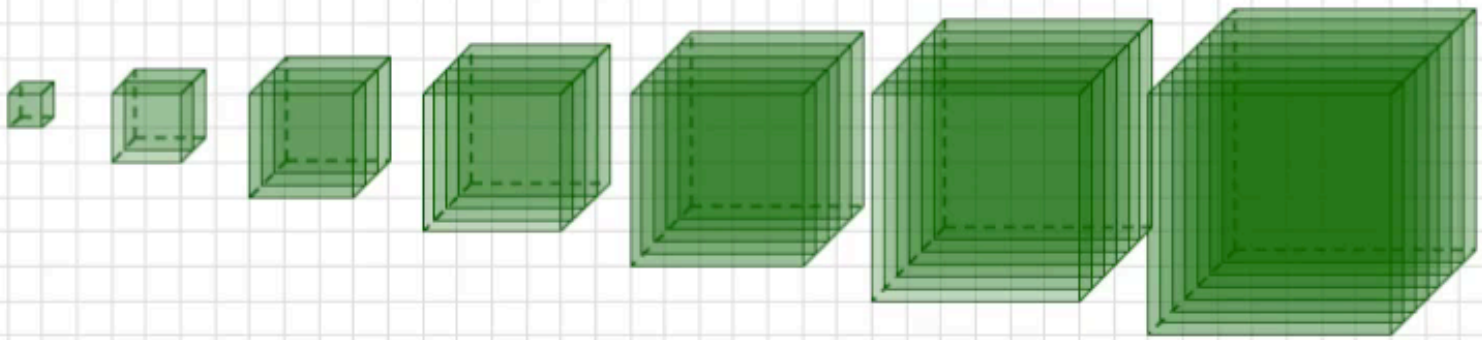
$$n = 2: \quad \sum_{k=1}^{2} k^3 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$

$$n = 5: \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

$$= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2$$

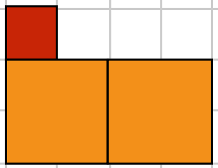
Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = D_n{}^2$$



Summe der Kubikzahlen

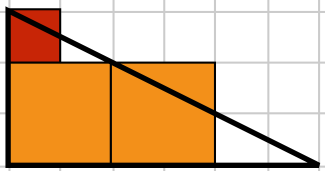
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n{}^2$$



$$1^3 + 2^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$$

Summe der Kubikzahlen

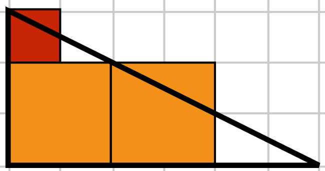
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n{}^2$$



$$1^3 + 2^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$$

Summe der Kubikzahlen

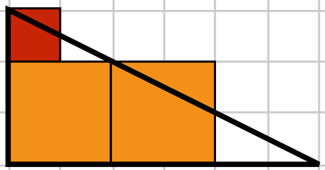
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n{}^2$$



$$1^3 + 2^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$$

Dreieck: $A = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+2) = 9$

Summe der Kubikzahlen



$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n^{\ 2}$$

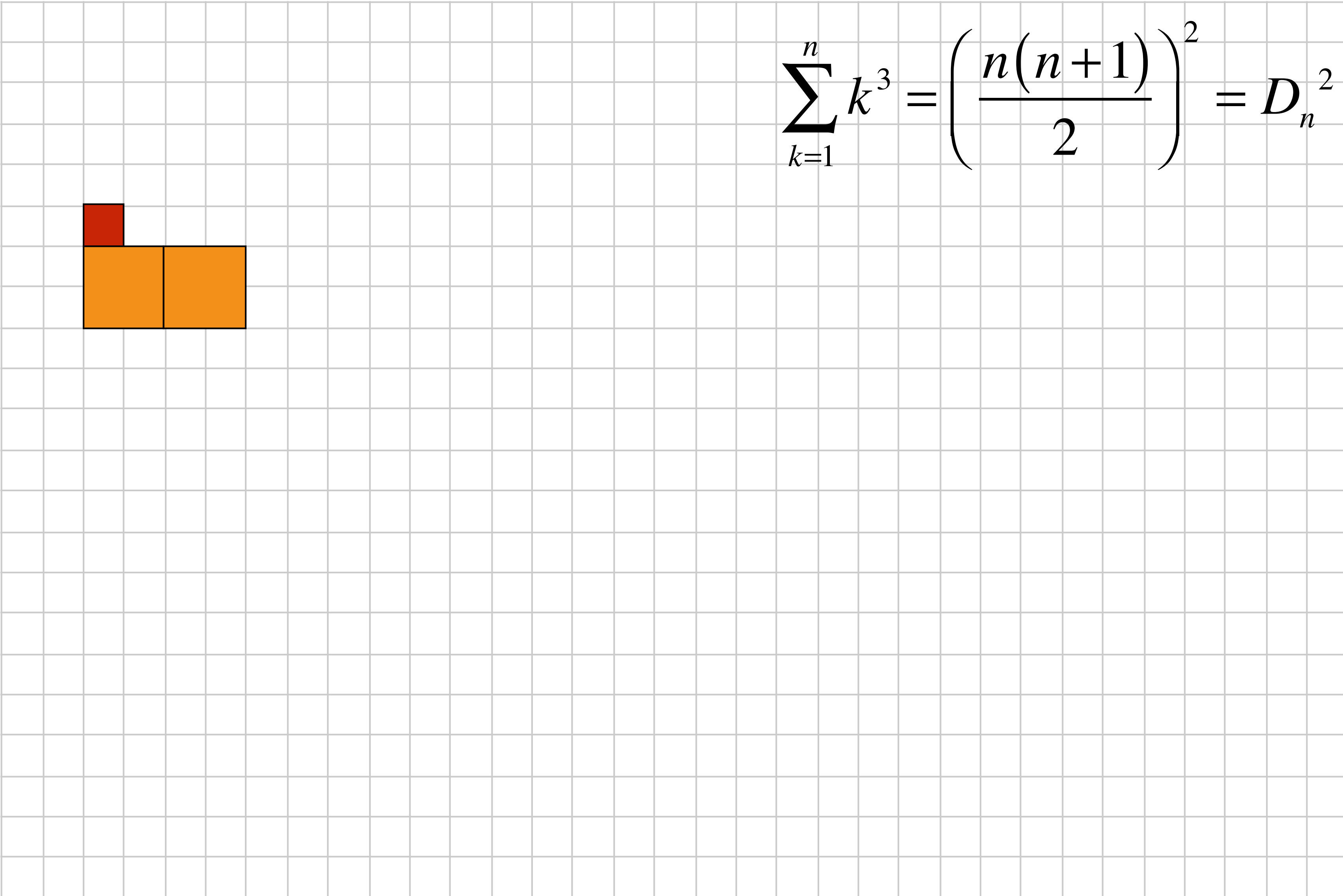
$$1^3 + 2^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$$

Dreieck: $A = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+2) = 9$

$$n = 2: \; A = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot (n+1) n \cdot D_n = D_n^{\ 2}$$

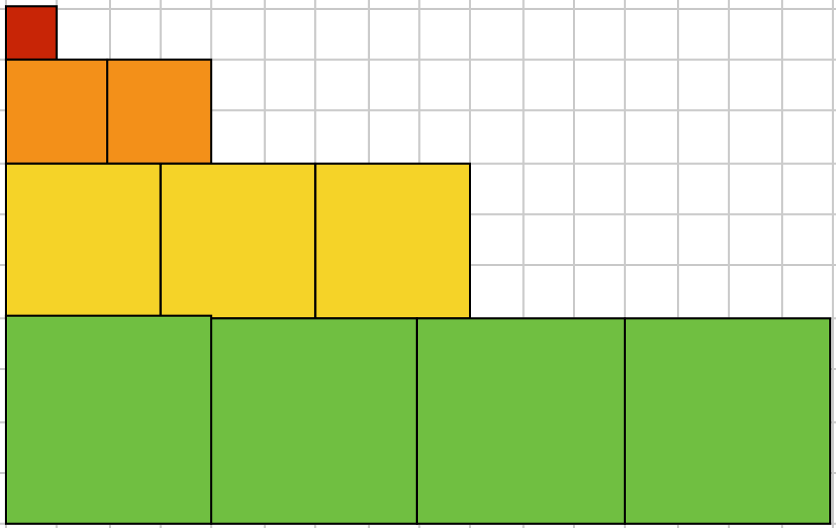
Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n{}^2$$



Summe der Kubikzahlen

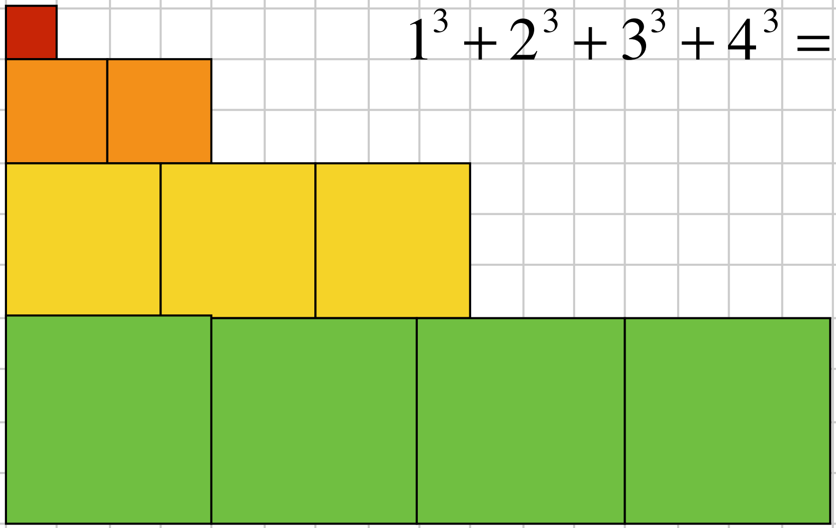
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n^{\ 2}$$



Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = D_n{}^2$$

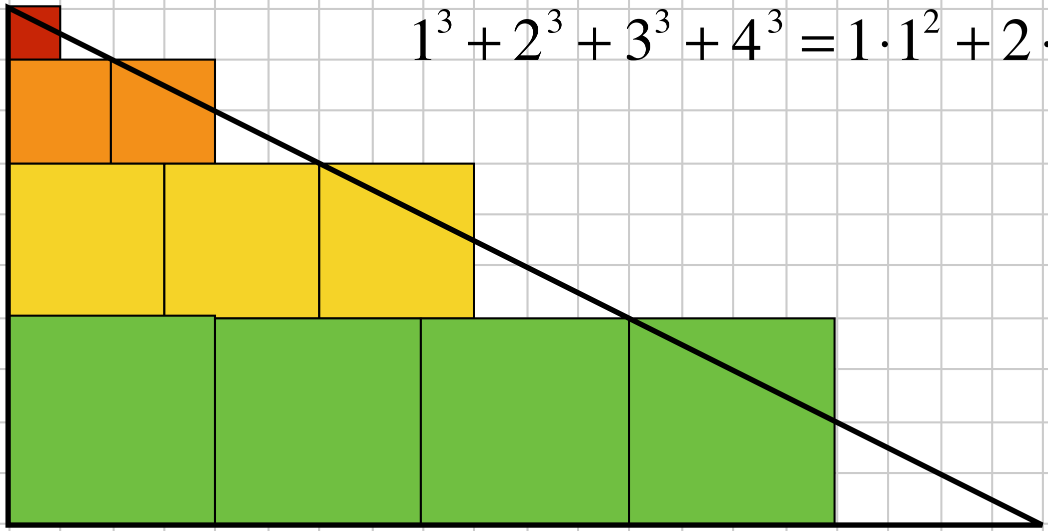
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 = 100$$



Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n{}^2$$

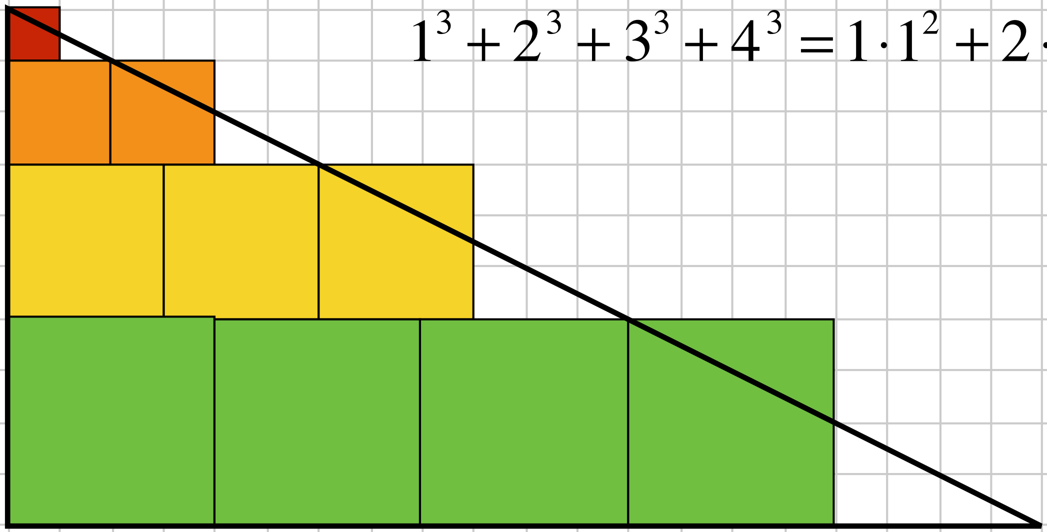
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 = 100$$



Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n^{\ 2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 = 100$$

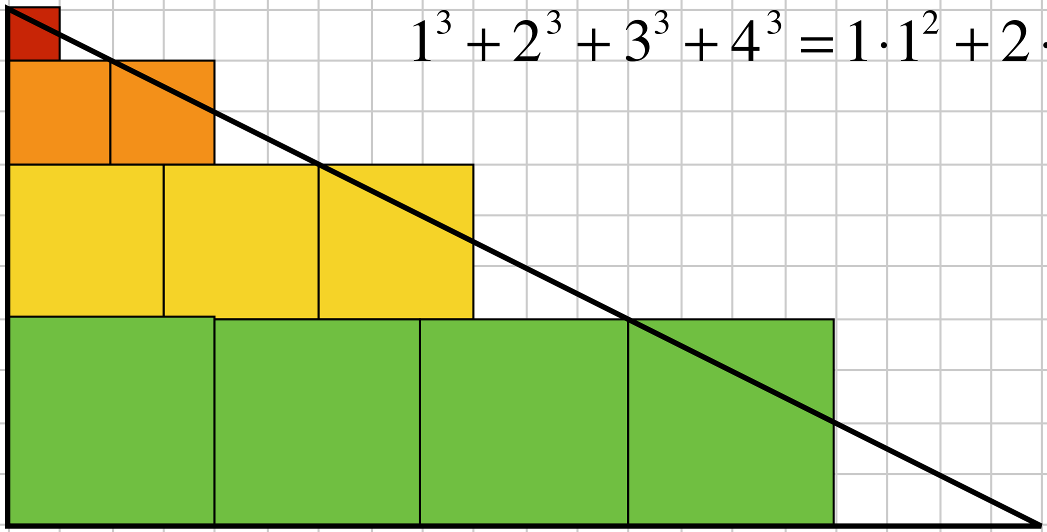


$$\text{Dreieck: } A = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot (1+2+3+4) = 10 \cdot 10 = 100$$

Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = D_n^{\;2}$$

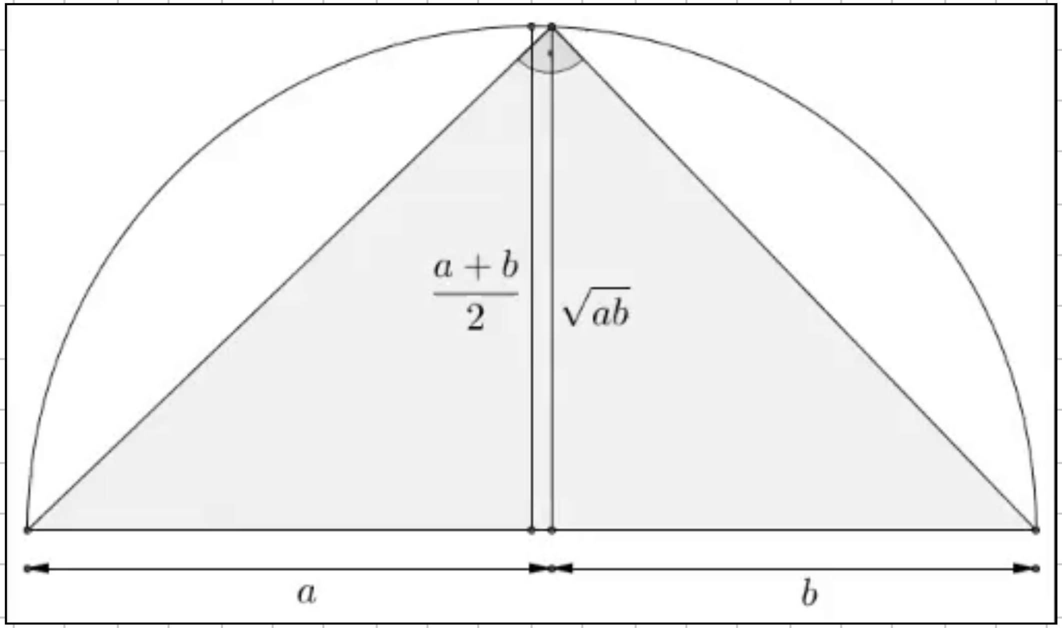
$$1^3+2^3+3^3+4^3 = 1\cdot 1^2+2\cdot 2^2+3\cdot 3^2+4\cdot 4^2 = 100$$



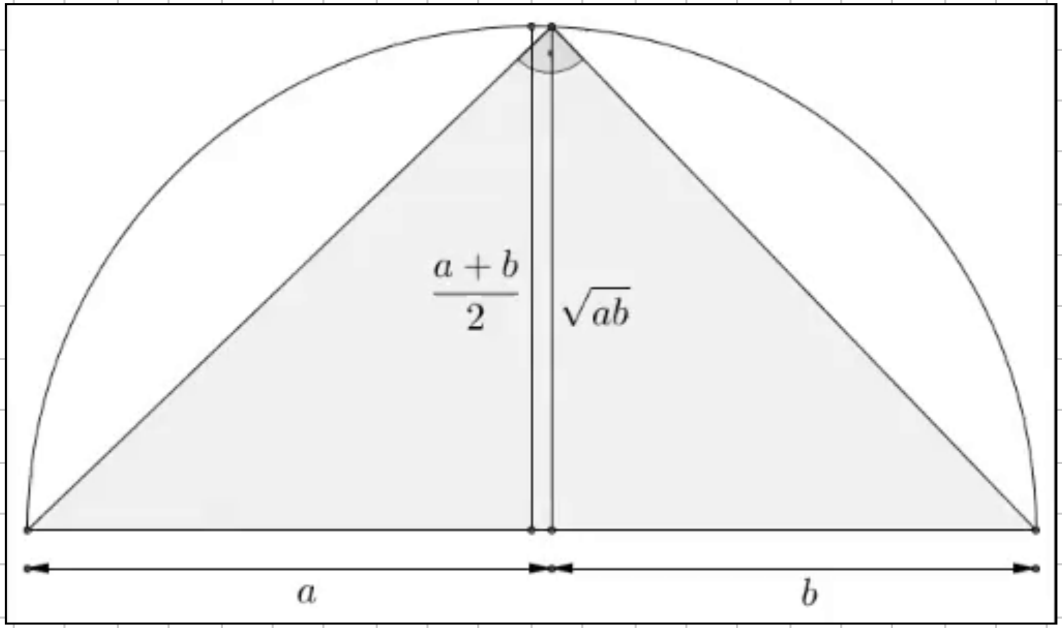
Dreieck: $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot (1+2+3+4) = 10\cdot 10 = 100$

$$n=4:\; A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot (n+1)n\cdot D_n = D_n^{\;2}$$

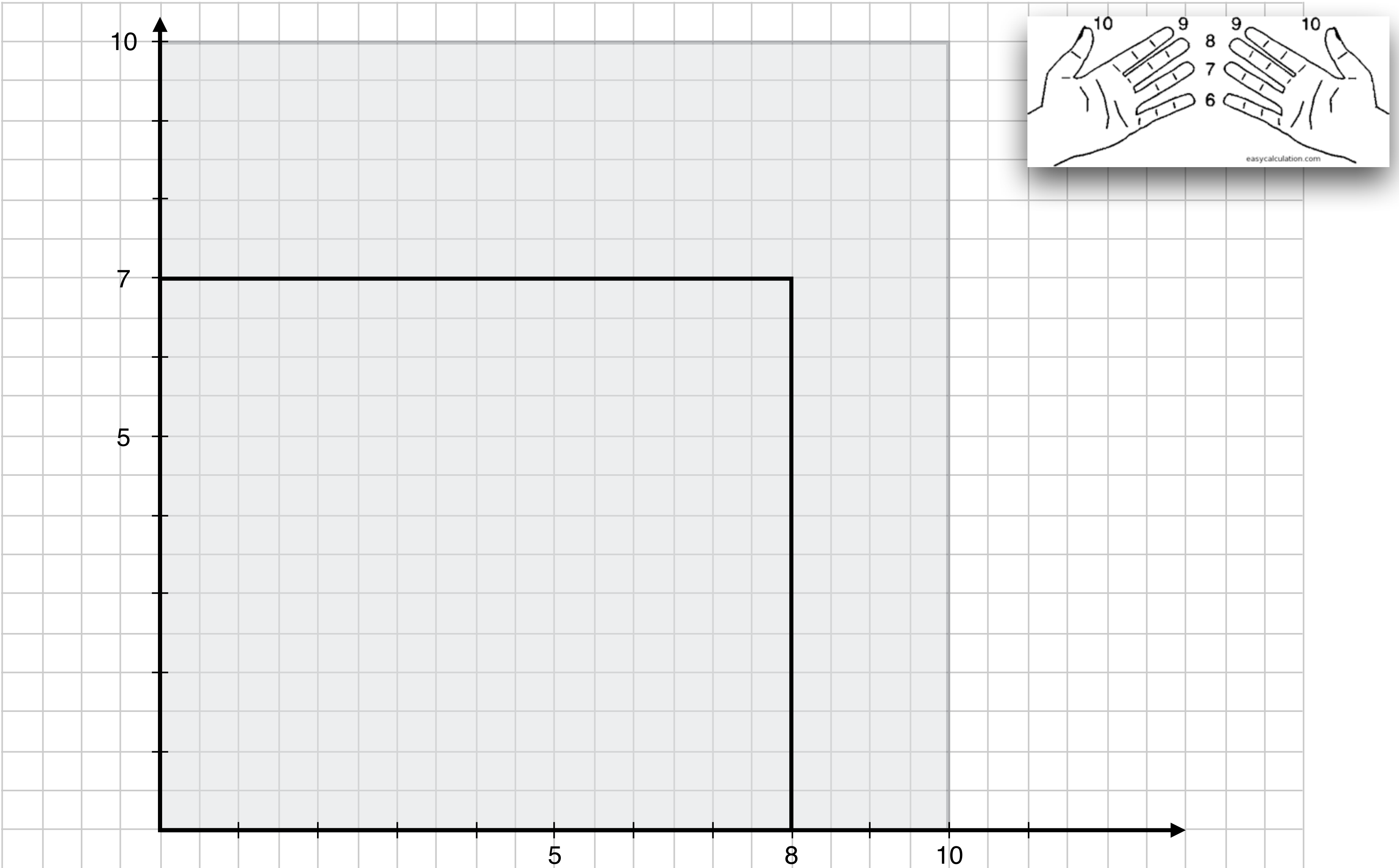
Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel



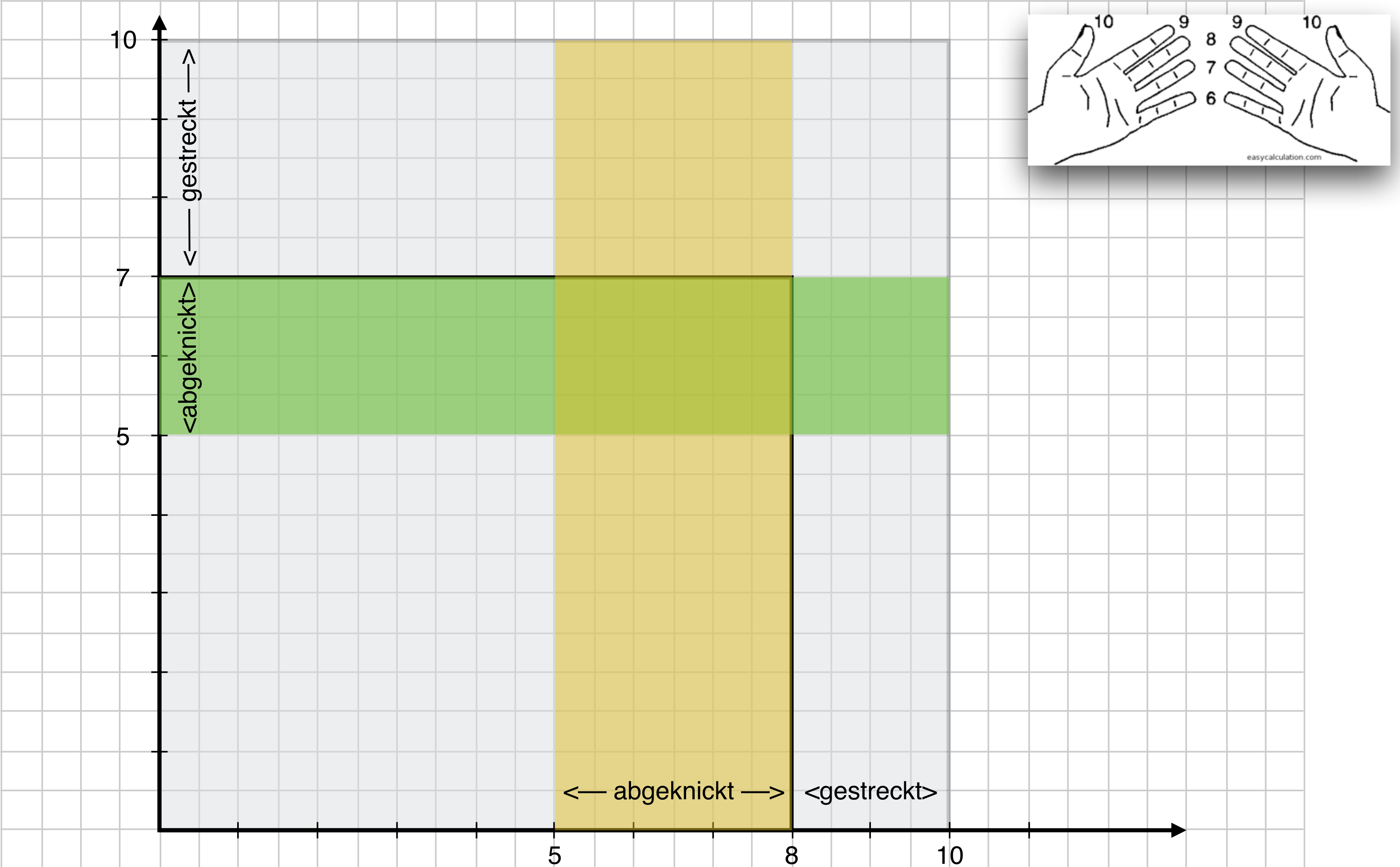
Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel



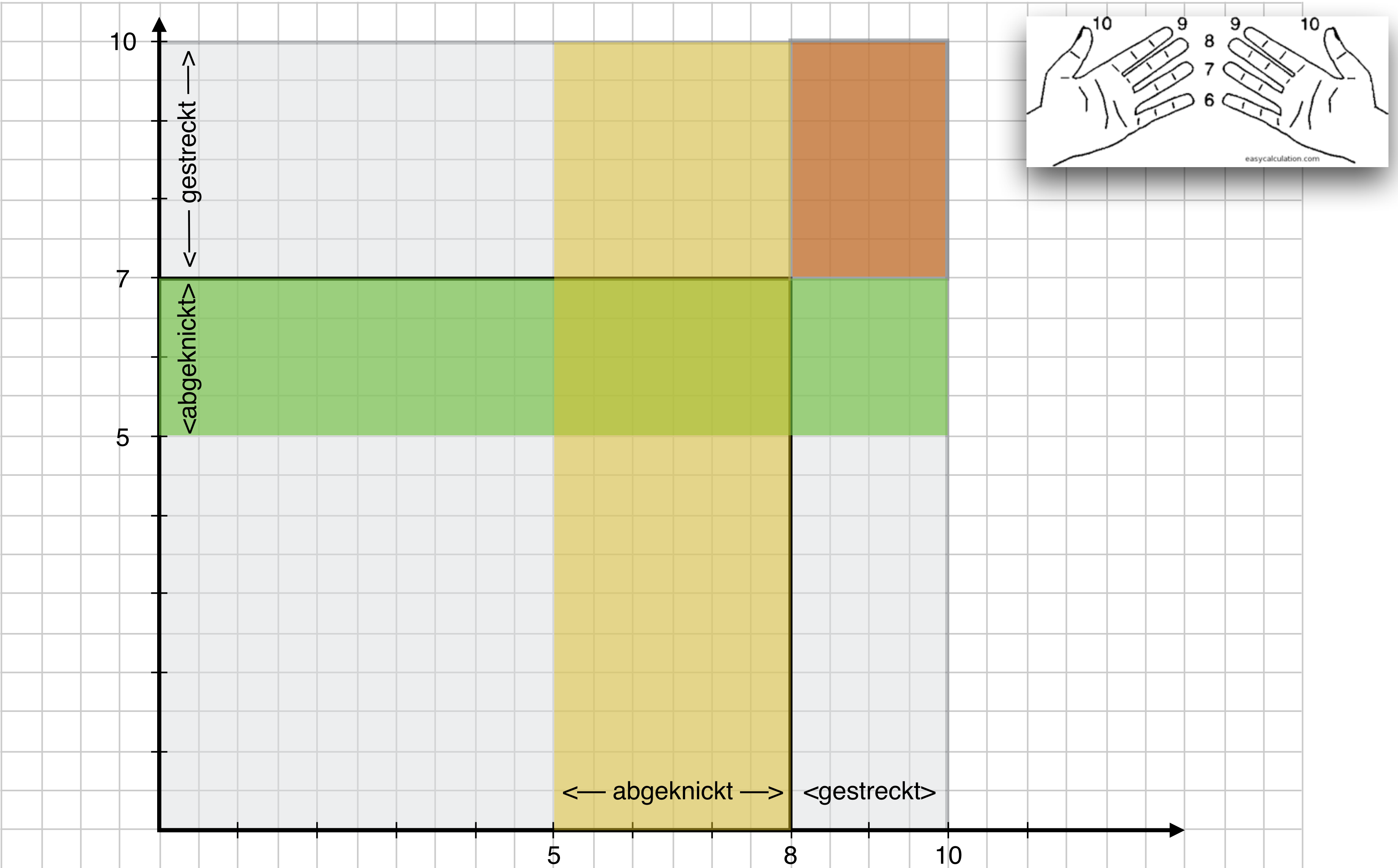
Beweis zum Fingerrechnen



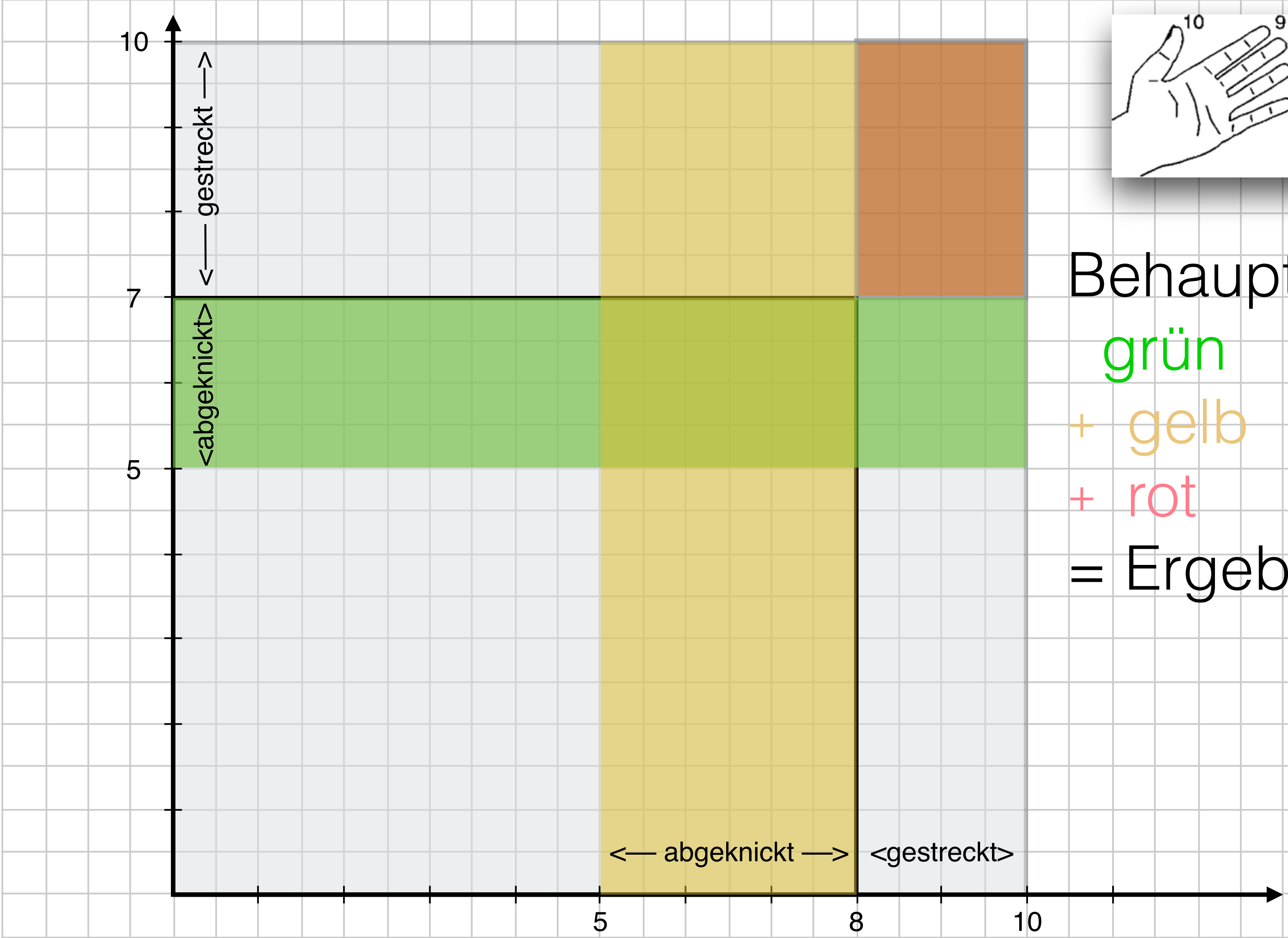
Beweis zum Fingerrechnen

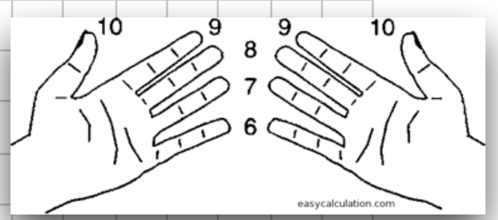


Beweis zum Fingerrechnen



Beweis zum Fingerrechnen





Behauptung

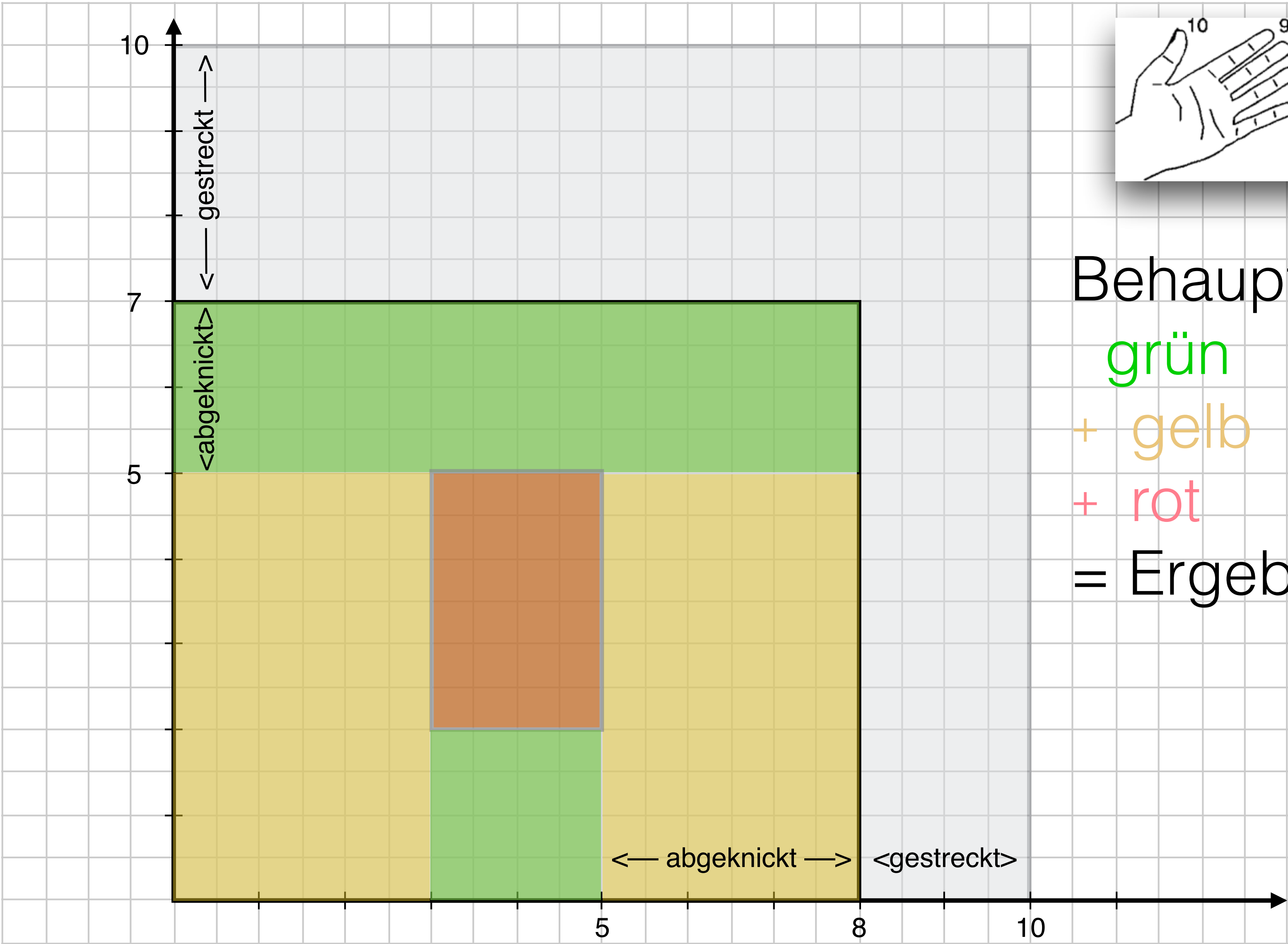
grün

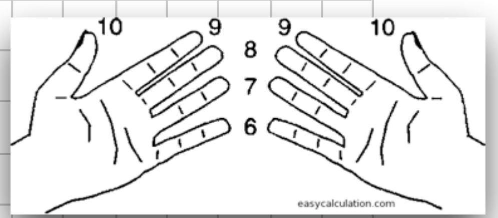
+ gelb

+ rot

= Ergebnis

Beweis zum Fingerrechnen





Behauptung

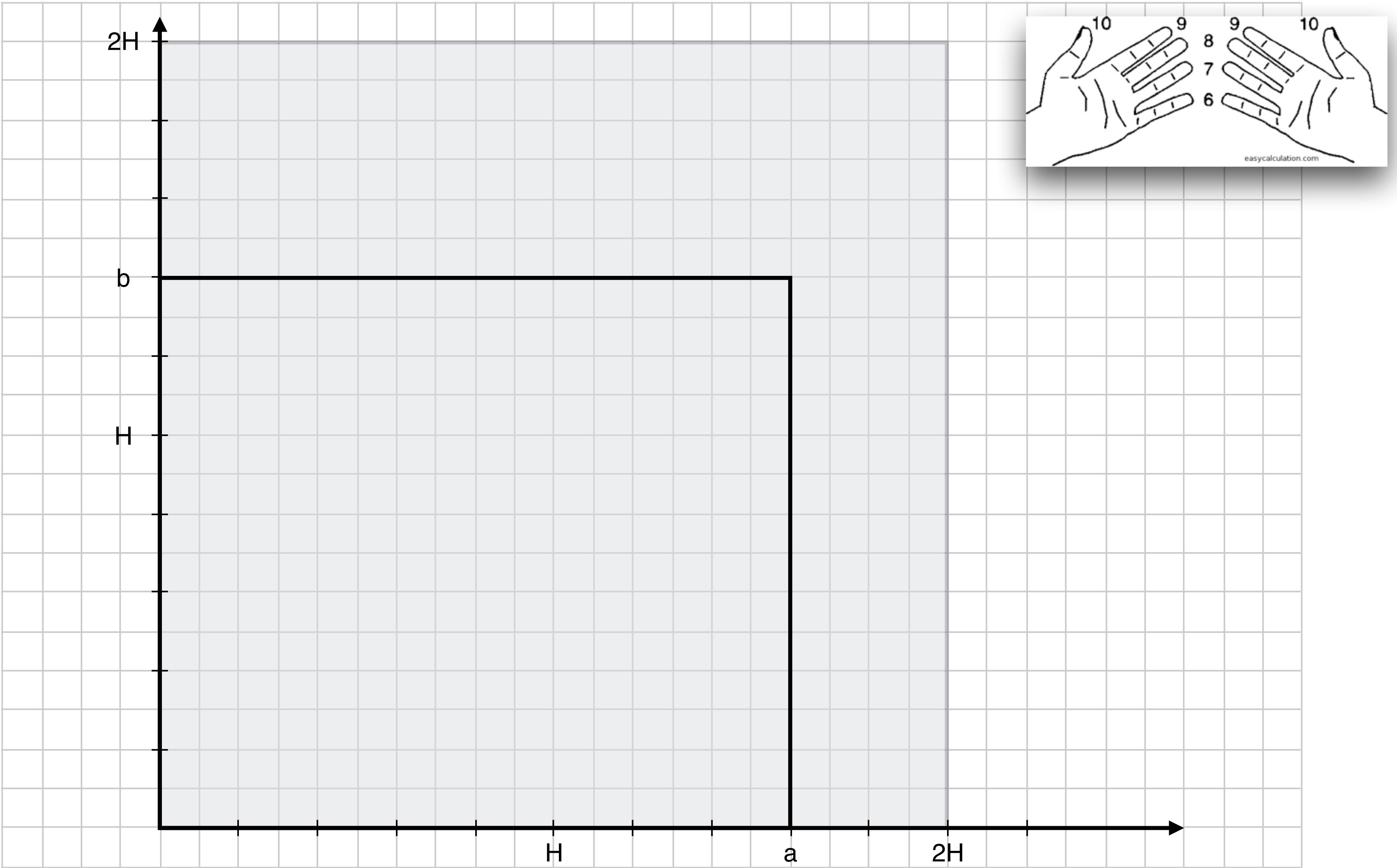
grün

+ gelb

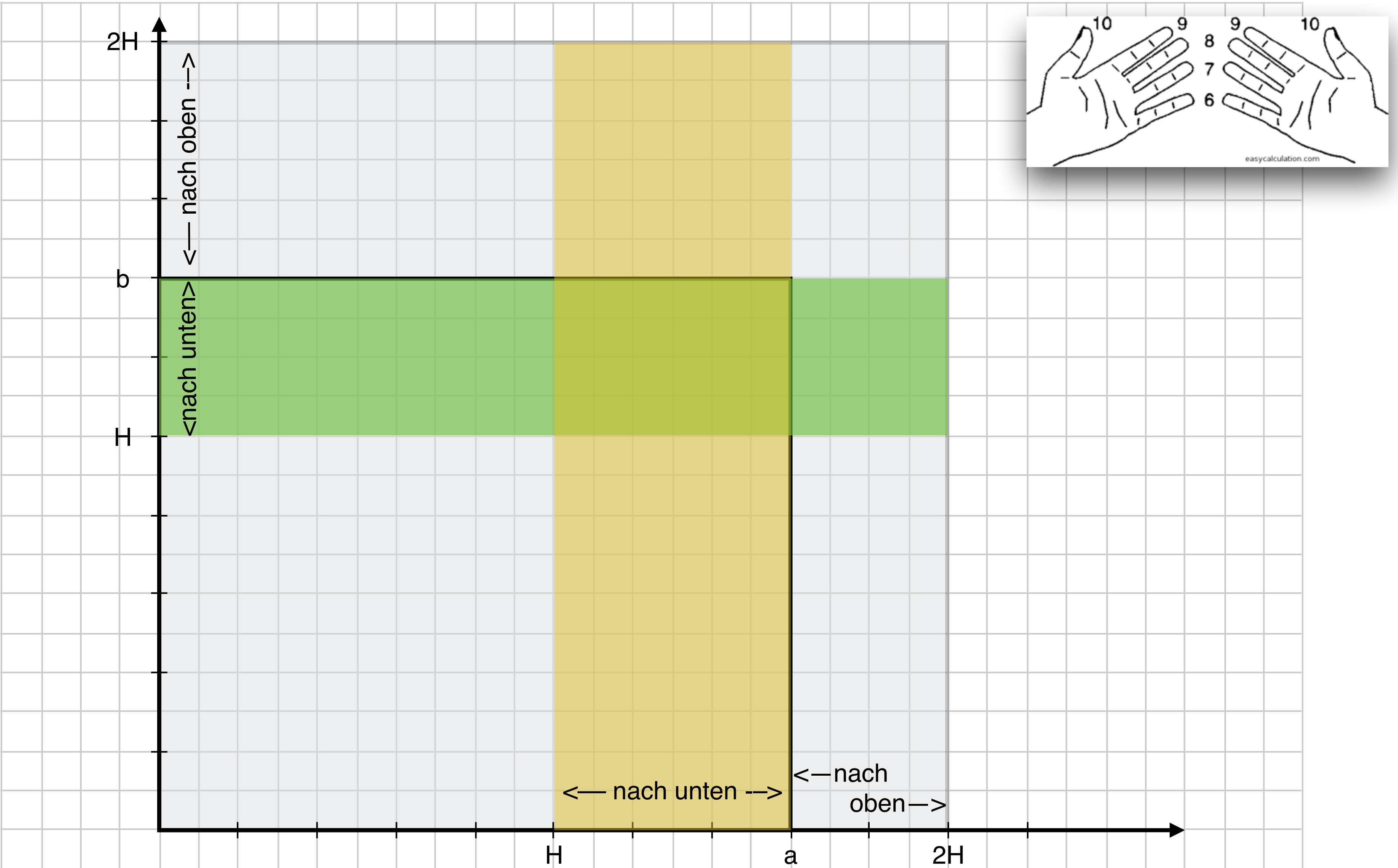
+ rot

= Ergebnis

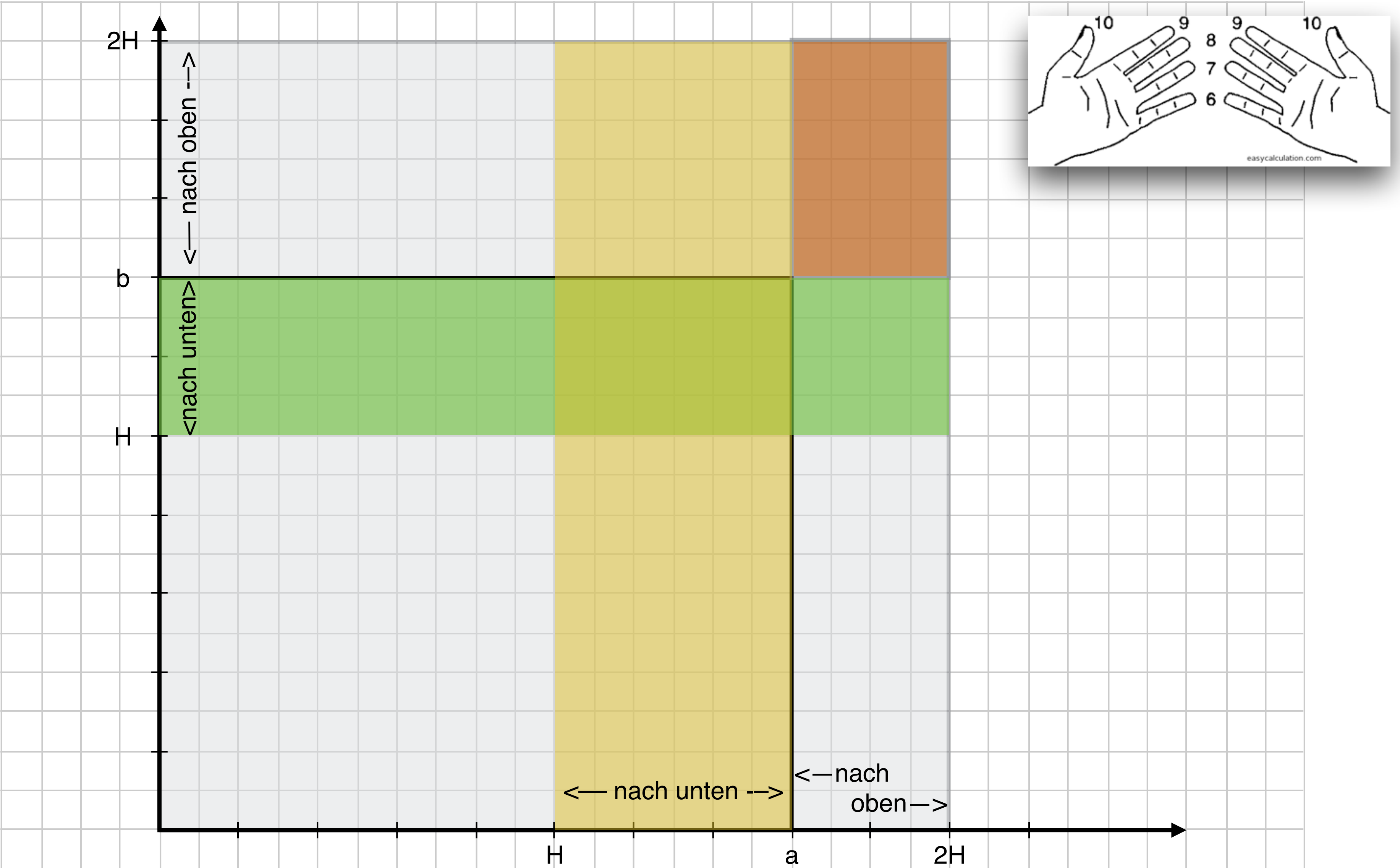
Verallgemeinerung



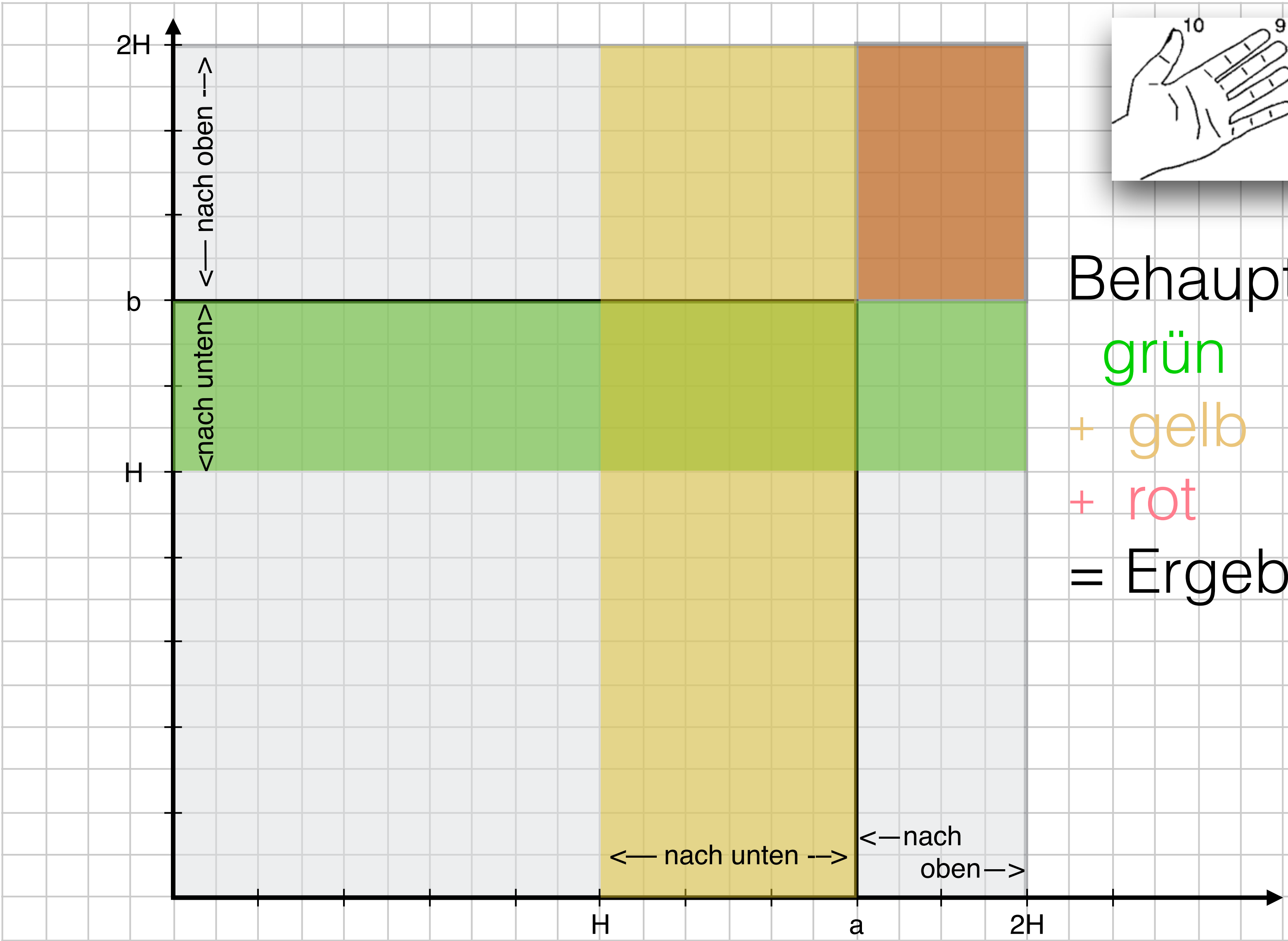
Verallgemeinerung

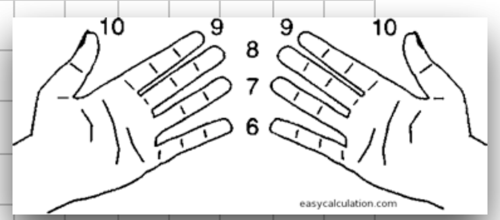


Verallgemeinerung



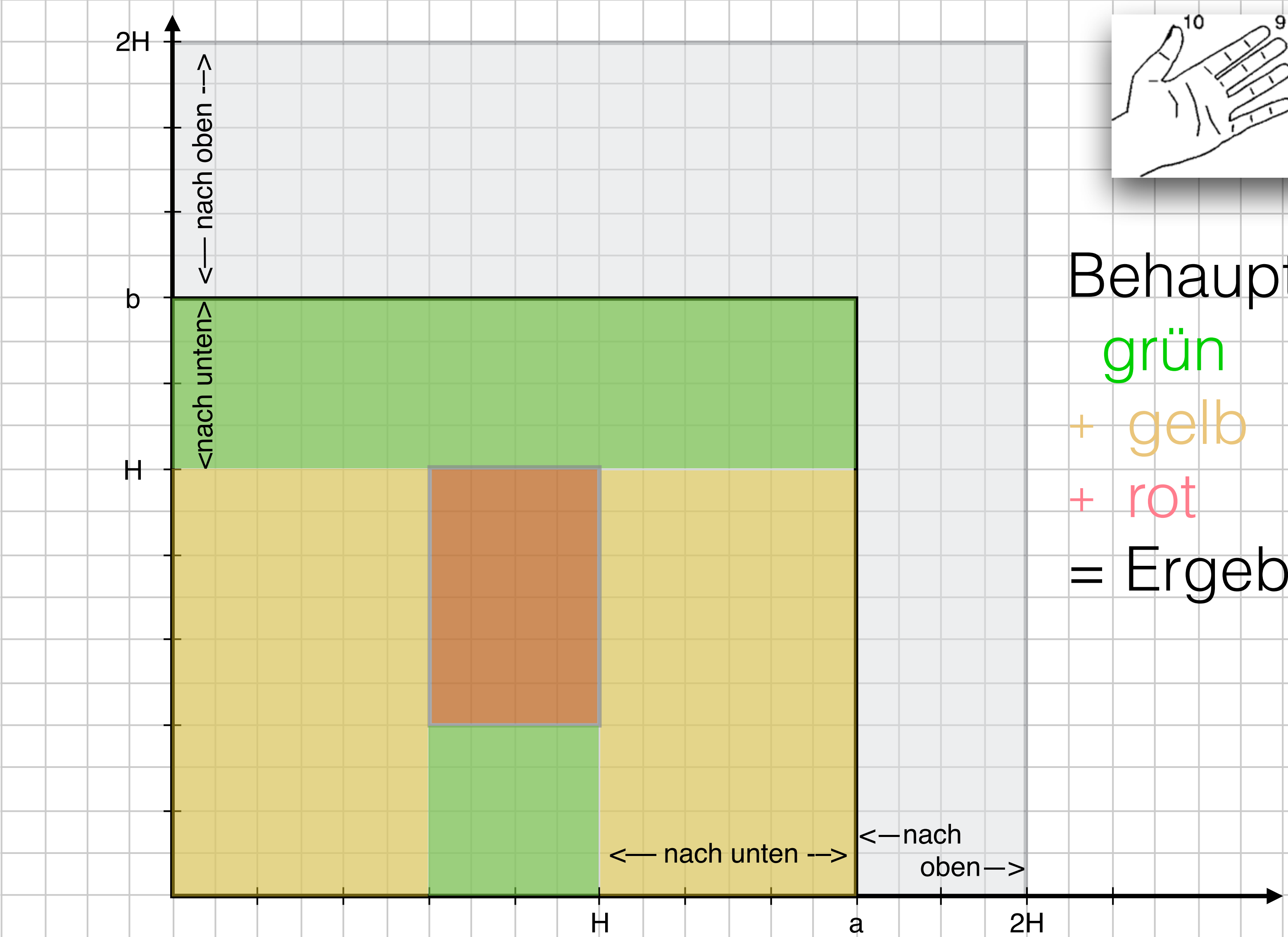
Verallgemeinerung

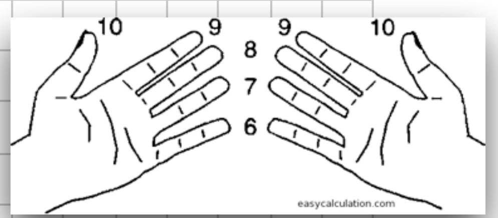




Behauptung
grün
+ gelb
+ rot
= Ergebnis

Verallgemeinerung





Behauptung
grün
+ gelb
+ rot
= Ergebnis

Quadratzahlen und Teilbarkeit durch 4