Der Satz von Pythagoras

Die Satzgruppe zum Satz von Pythagoras

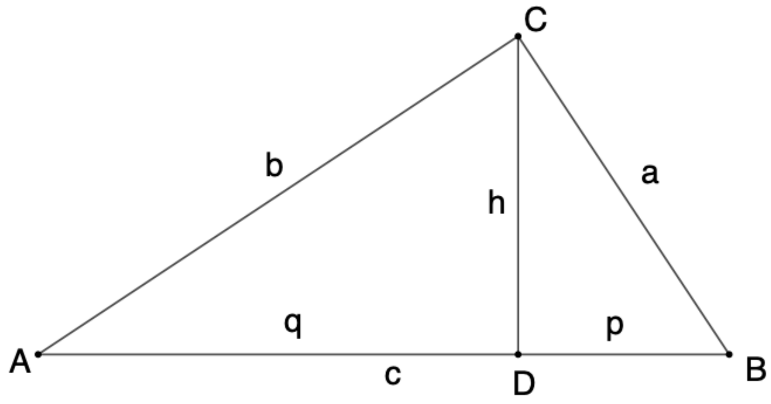
Der Kathetensatz $a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$

Der Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Der Höhensatz $h^2 = p \cdot q$

Der Flächensatz $a \cdot b = c \cdot h$

Der inverse Satz von Pythagoras $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$



die üblichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

a, b Kathete

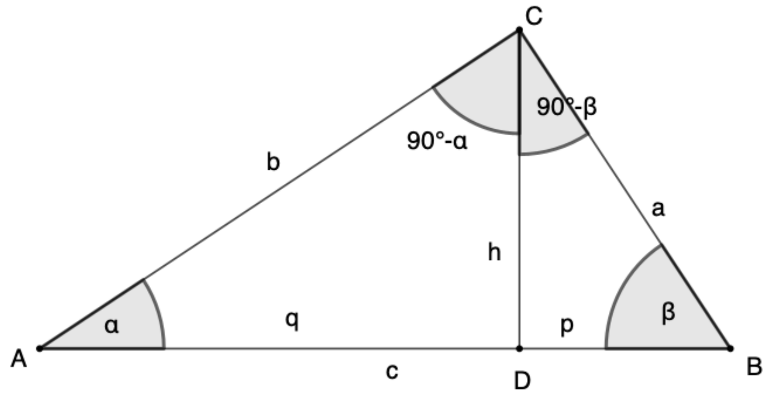
c Hypotenuse

p, q Hypotenusenabschnitte

h Höhe

Der schnelle Beweis für alles

Beachtet man, dass gilt: $\alpha + \beta = 90^\circ$, also $\beta = 90^\circ - \alpha$ erkennt man schnell, dass die Dreiecke ΔABC, ΔADC und ΔDBC ähnlich zueinander sind.



	ABC	ADC	DBC
kurze Kathete	a	h	p
lange Kathete	b	q	h
Hypotenuse	c	b	a

Man kann folglich 9 Verhältnisgleichungen aufstellen

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{q} \qquad \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \qquad \frac{a}{b} = \frac{p}{h}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{q}{b} \qquad \frac{q}{b} = \frac{h}{a} \qquad \frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b} \qquad \frac{h}{b} = \frac{p}{a} \qquad \frac{a}{c} = \frac{p}{a}$$

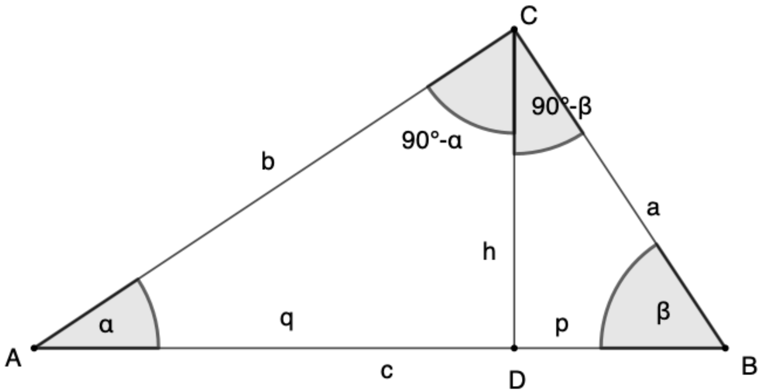
ausmultipliziert

$$aq = bh \qquad h^2 = pq \qquad ah = bp$$

$$b^2 = cq \qquad aq = bh \qquad ab = ch$$

$$ab = ch \qquad ah = bp \qquad a^2 = cp$$

Der schnelle Beweis für alles



$$aq = bh \qquad h^2 = pq \qquad ah = bp$$

$$b^2 = cq \qquad aq = bh \qquad ab = ch$$

$$ab = ch \qquad ah = bp \qquad a^2 = cp$$

Der Kathetensatz

Der Höhensatz

Der Flächensatz

Der Satz von Pythagoras

$$a^2 = cp \qquad b^2 = cq$$

$$a^2 + b^2 = cp + cq$$

$$a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2$$

Der inverse Satz von Pythagoras

$$ab = ch$$

$$h^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

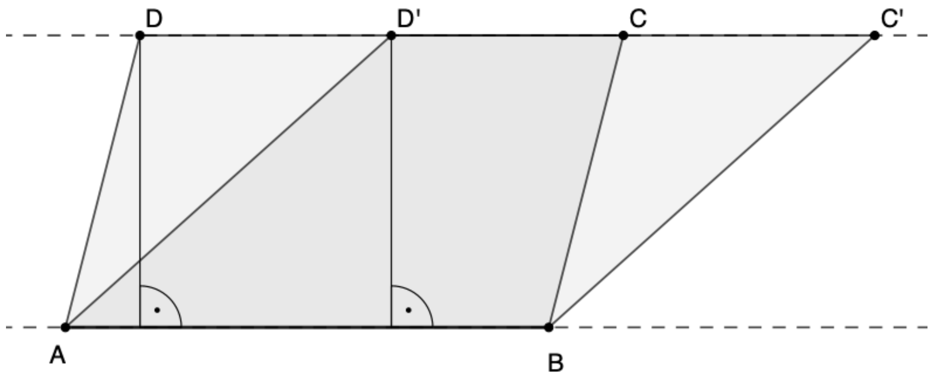
$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Der Kathetensatz

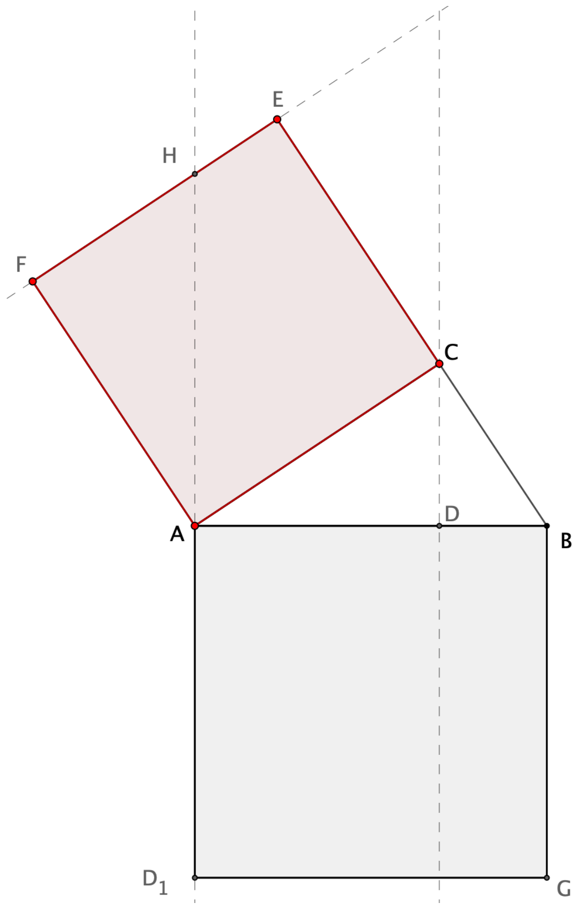
Der klassische Beweis durch Scherung (= flächengleiche Verformung)

Hintergrund: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms



Fläche = Grundseite · Höhe

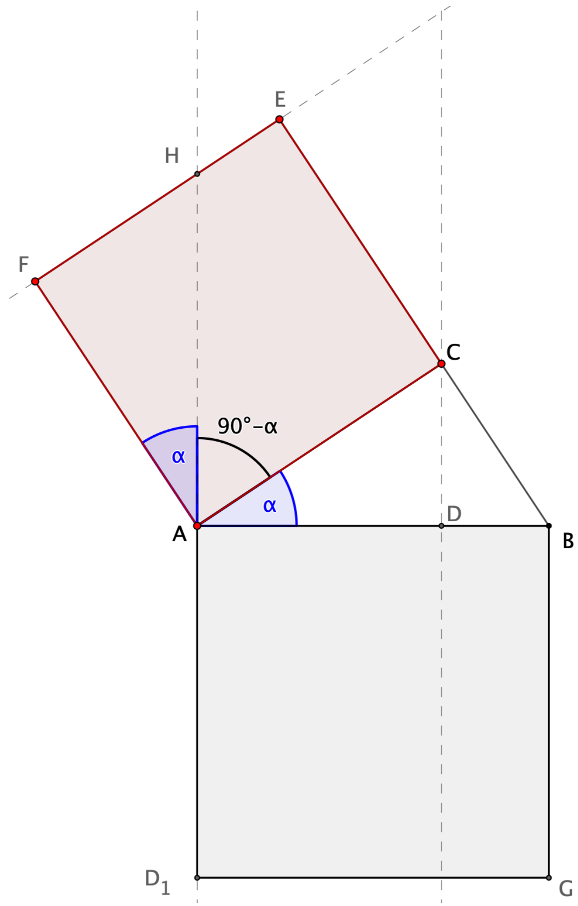
Das ist im Parallelogramm ABCD das Gleiche wie im Parallelogramm ABC’D’.



Der Kathetensatz

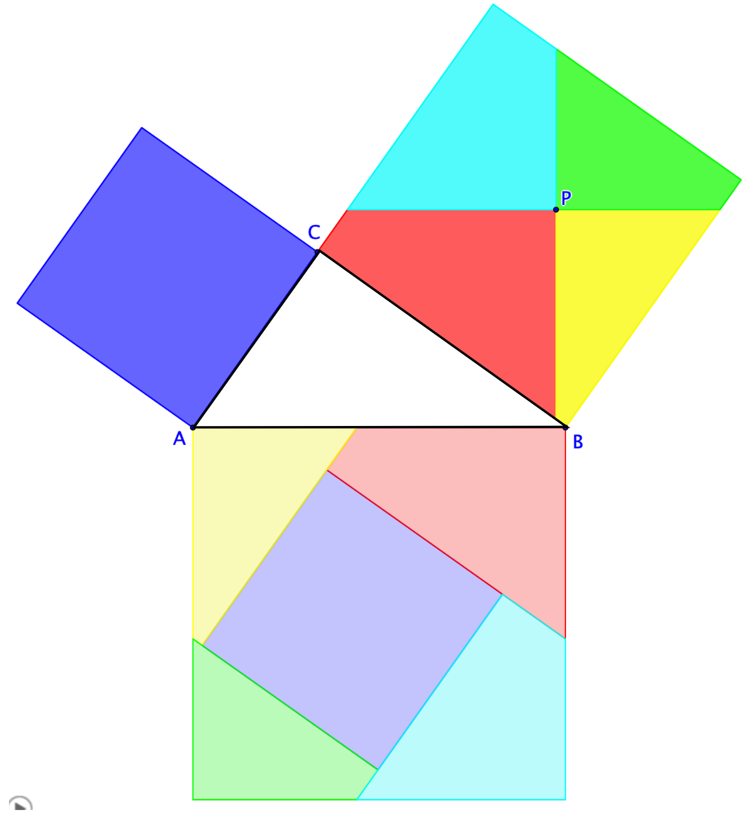
Kritische Nachfrage: Warum hat die Strecke AH die Länge c?

Das Dreieck AHF ist kongruent zum Ausgangsdreieck ABC wegen Kante b und Winkel α und 90°.



Der Windmühlenbeweis

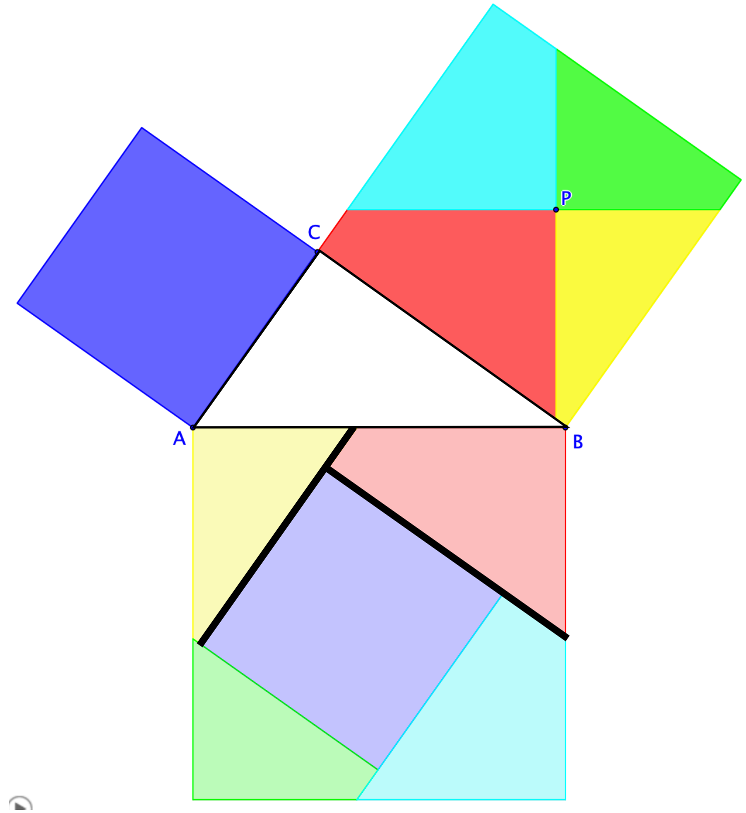
Alle fünf Teile werden parallel verschoben.



Der Windmühlenbeweis

Alle fünf Teile werden parallel verschoben.

Kritische Nachfrage: Warum ergeben die verschobenen Teile im Hypotenusenquadrat genau eine Lücke von b^2 ?

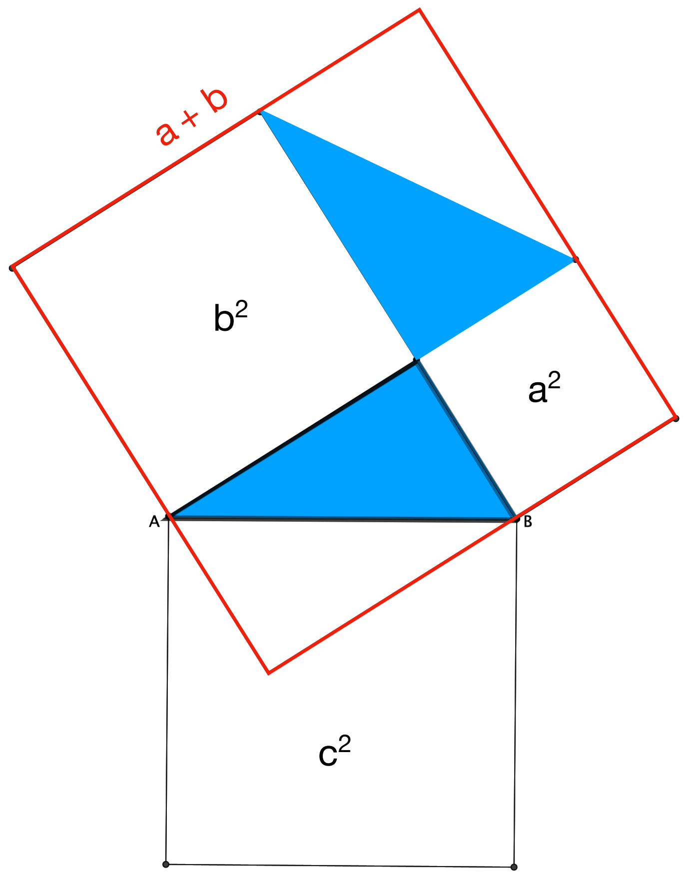


Ergänzung von Ausgangsdreiecken

$a^2 + b^2$ + vier Dreiecke $= (a + b)^2$

$=$

c^2 + vier Dreiecke $= (a + b)^2$

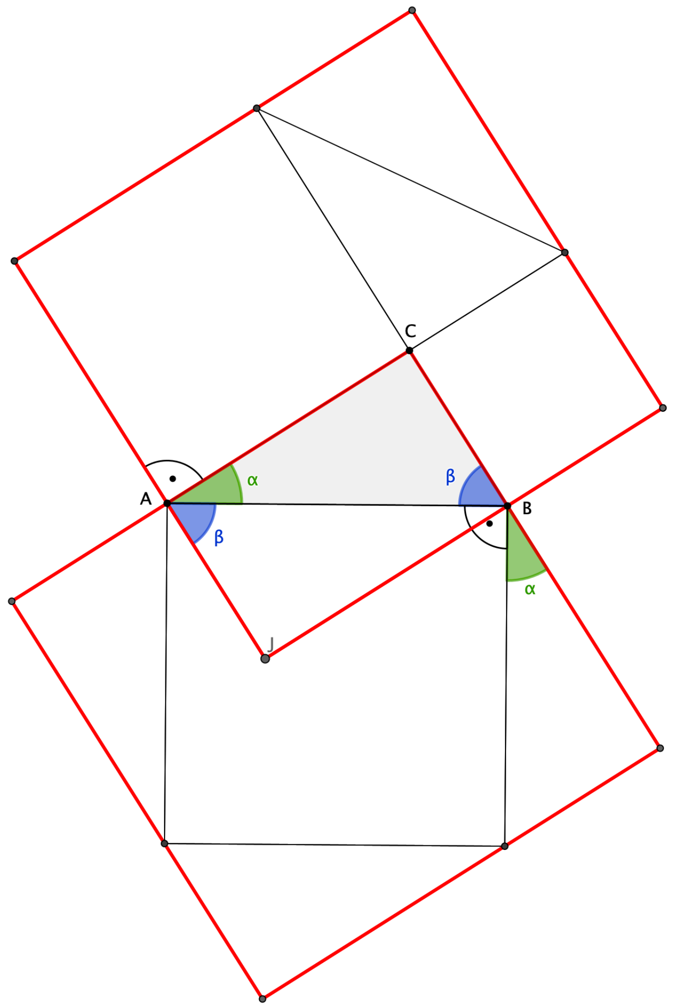


Ergänzung von Ausgangsdreiecken

Kritische Nachfrage: Entstehen durch das Aufsetzen der Dreiecke wirklich Vierecke (Quadrate)? D.h. sind die neuen, Linien ohne Knick in den Punkten des Zusammensetzens?

Für α und β gilt $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Daher gilt in den Punkten, an denen die Dreiecks-Ecken zusammenstoßen, dass immer α, β und ein 90°-Winkel sich zu 180° ergänzen, also eine knickfreie Linie ergeben.

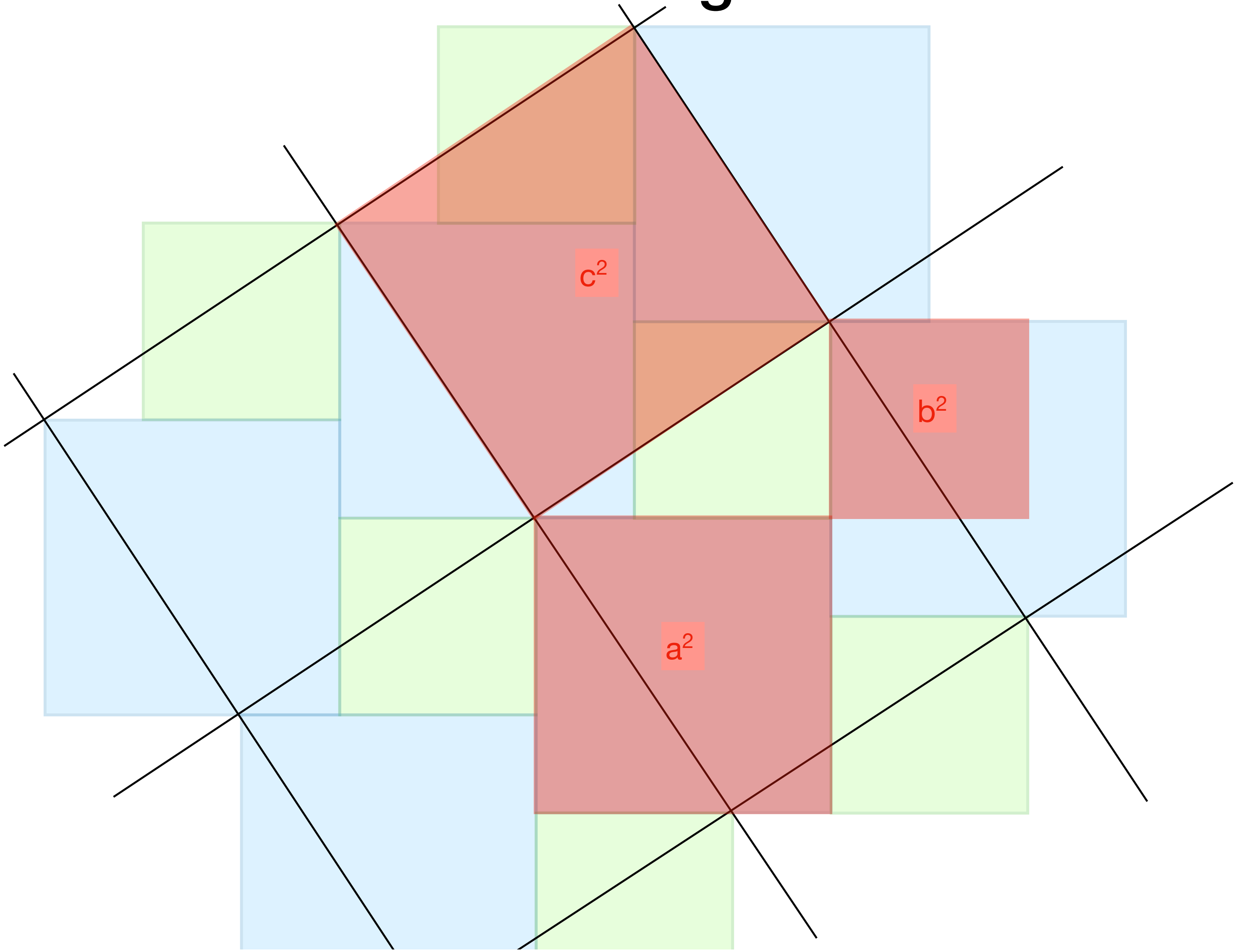


Beweis durch Parkettierung

Hat man zwei verschiedene, quadratische Fliesensorten, so kann man **immer** unter Verwendung beider Sorten eine Fläche auslegen.

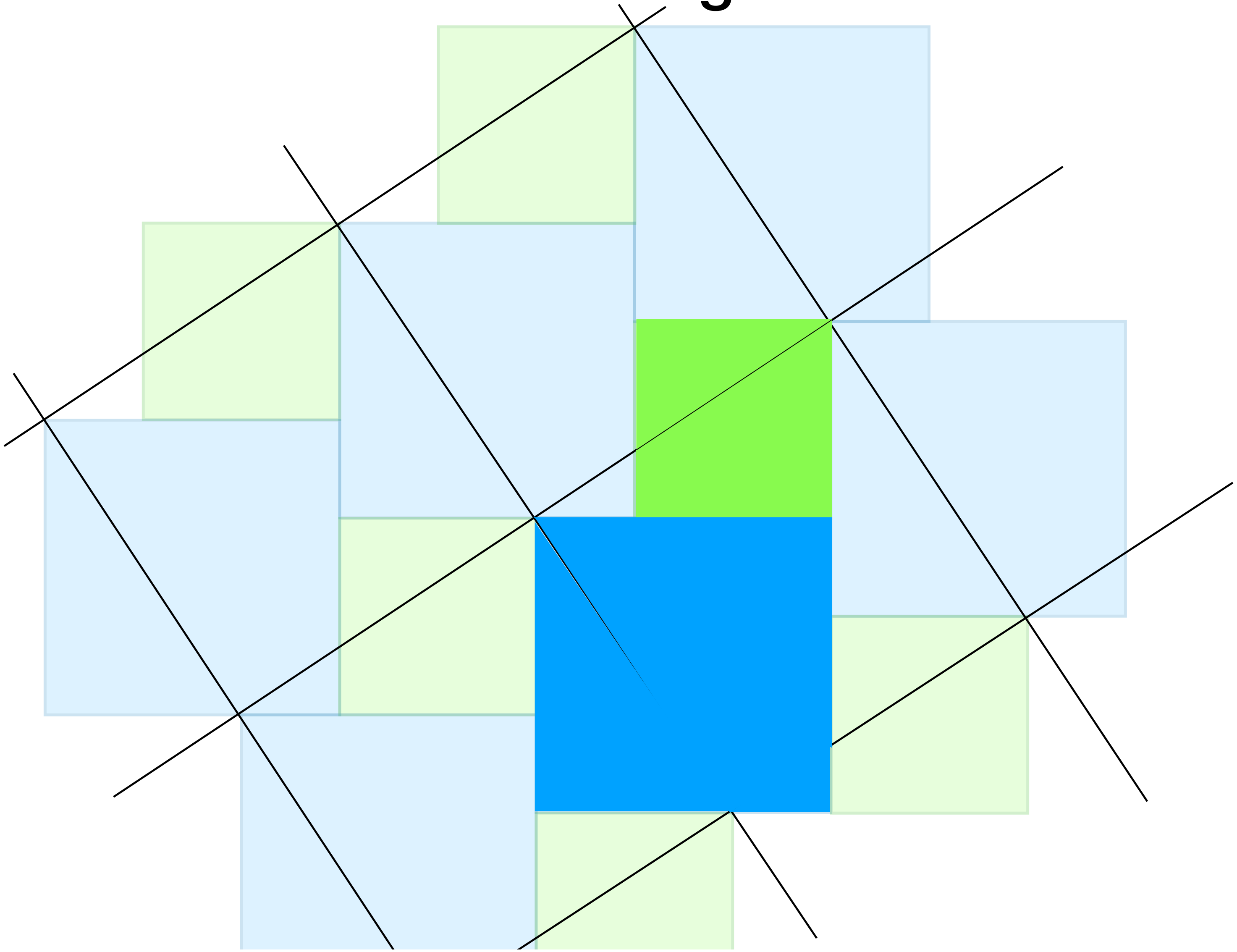
Dieses regelmäßige Muster ist der Plan für eine weitere Parkettierung mit einer Sorte passend größerer Fliesen.

Aus beiden Parkettierungen ergibt sich eine Pythagorasfigur.



Beweis durch Parkettierung

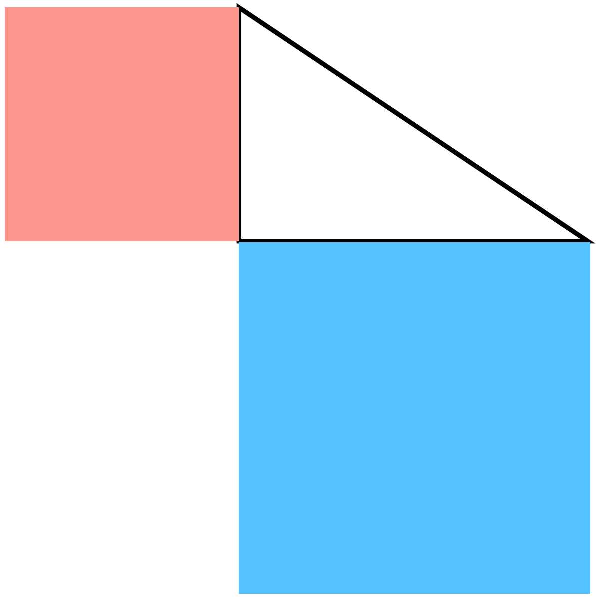
Durch Abschneiden der Teile, die herausragen, und passendes Umschieben lässt sich c^2 mit den Teilen von a^2 und b^2 auslegen.



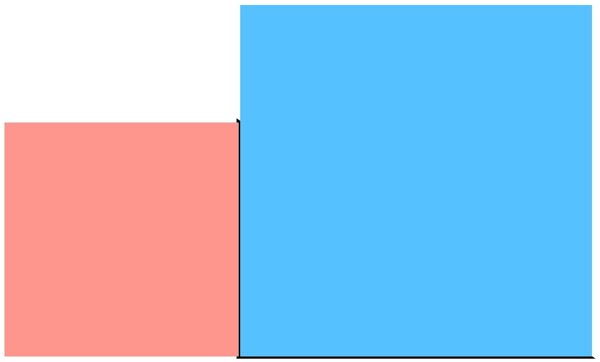
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte

Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.



Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

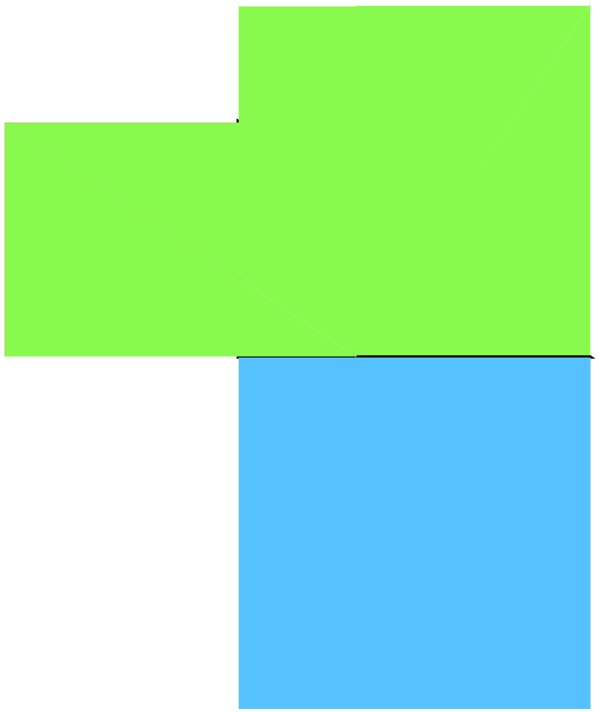
Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte

Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

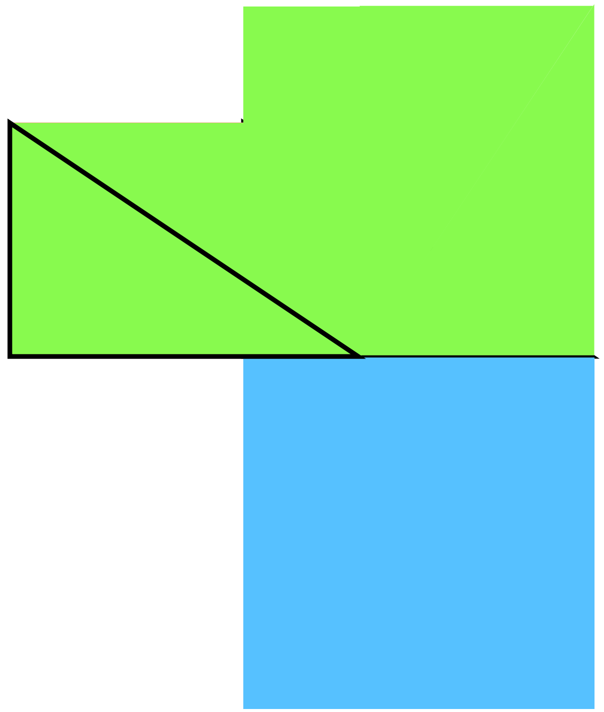
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

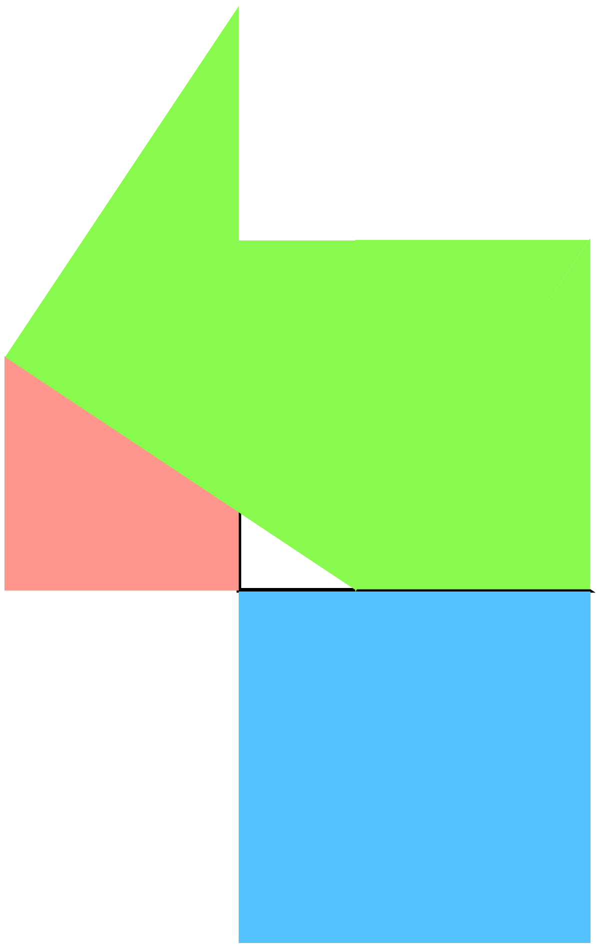
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

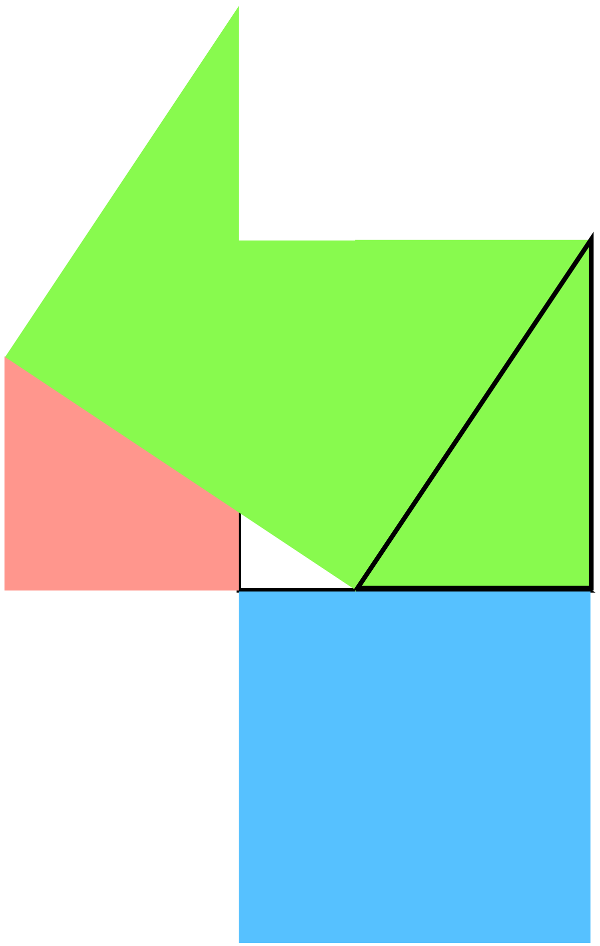
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

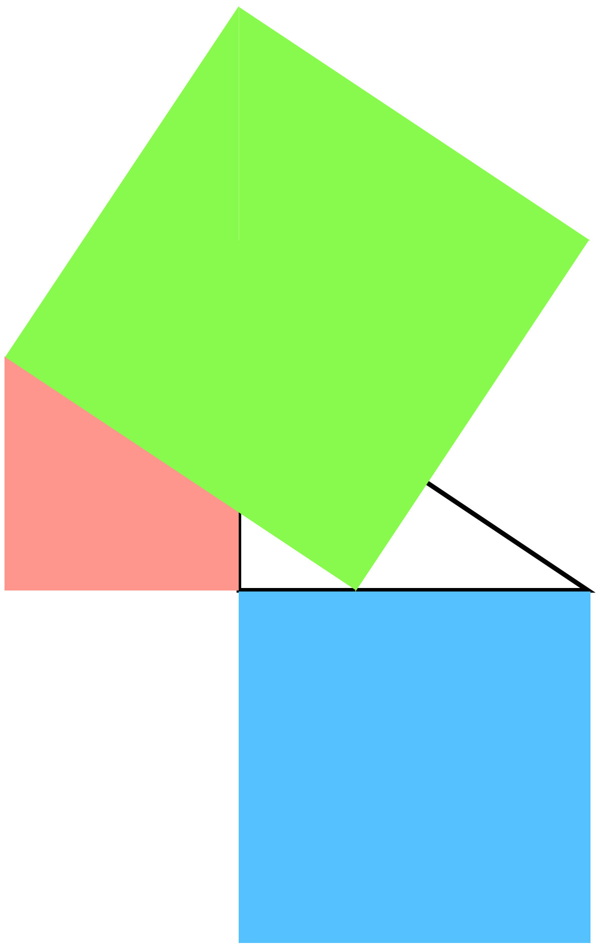
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

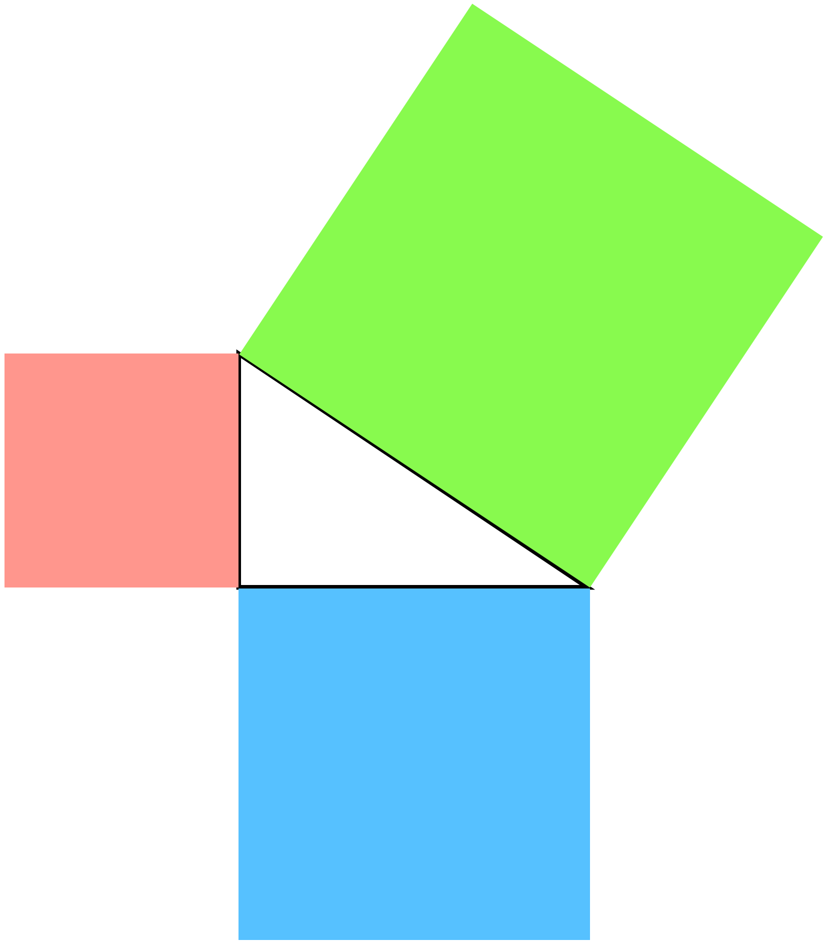
Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte



Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

Ein weiterer Mosaikbeweis, animiert und ohne Worte

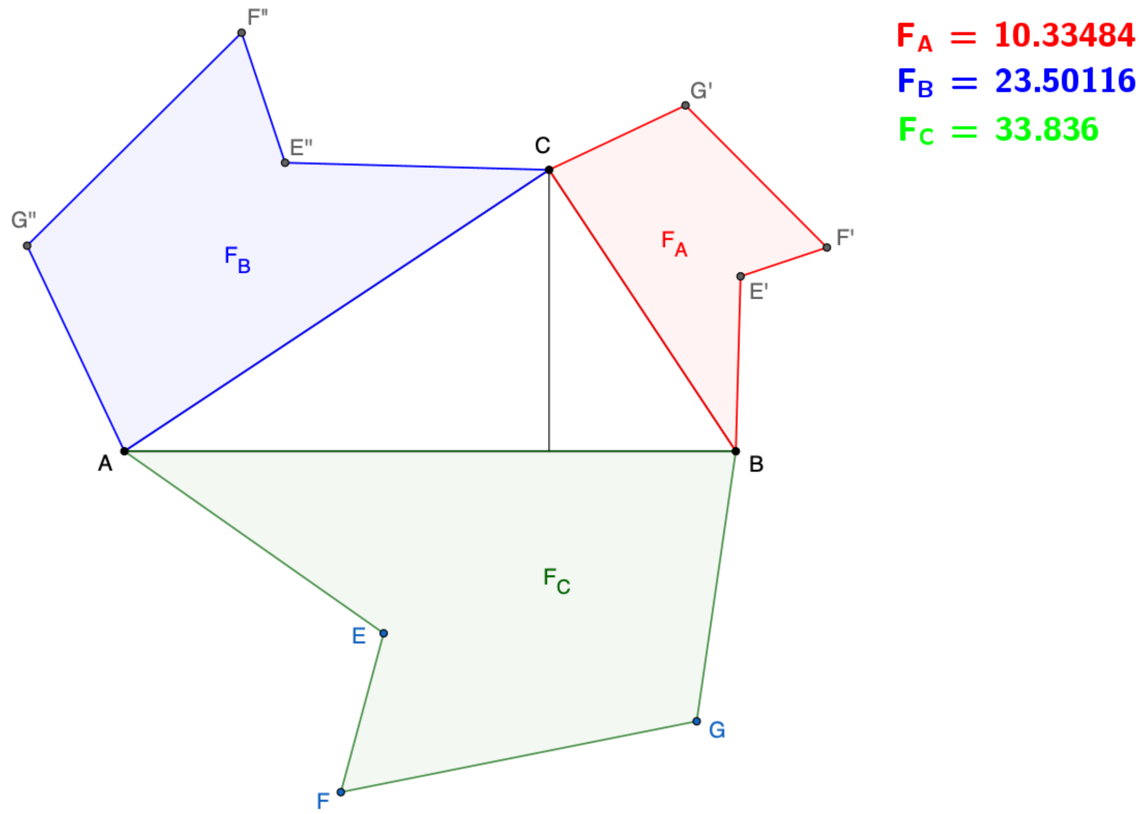


Mosaikbeweis:

Die Flächen von a^2 und b^2 werden zerschnitten und dann neu zu c^2 zusammengelegt.

Die Verallgemeinerung zu ähnlichen Figuren

Der Satz von Pythagoras gilt nicht nur für Quadrate, sondern ganz allgemein für Flächen, die ähnlich zueinander sind.



Begründung 1:

Hängen zwei ähnliche Flächen F_1 und F_2 über den linearen Streckfaktor k zusammen, so hängen die Flächeninhalte über den Faktor k^2 zusammen.

Begründung 2:

Für die Strecken der Figuren gilt:

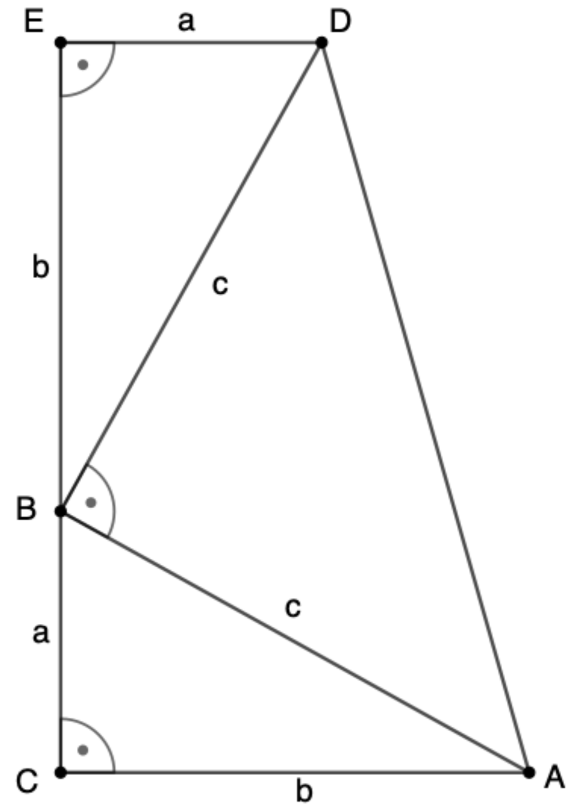
$|BC| = \frac{a}{c}|AB|$ und $|AC| = \frac{b}{c}|AB|$

Also gilt für die Flächen: $F_A = \frac{a^2}{c^2}F_C$ und $F_B = \frac{b^2}{c^2}F_C$.

$$F_A + F_B = \frac{a^2}{c^2}F_C + \frac{b^2}{c^2}F_C = \frac{a^2+b^2}{c^2}F_C = F_C$$

Ein historisch bemerkenswerter Beweis

James Abram Garfield, 1831 - 1881, 20. Präsident der USA



Die komplette Figur CADE ist ein Trapez.

Flächeninhalt $F_T = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$

Die gleiche Fläche setzt sich aus drei Dreiecken zusammen.

$$F_T = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Gleichsetzen, umformen

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

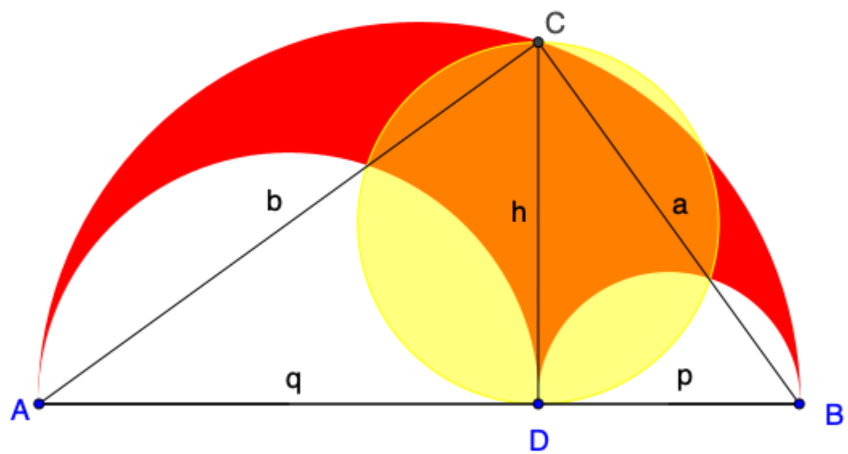
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Eine „Anwendung“
Arbelos (Schustermesser) und der Kreis des Archimedes

Die rote Fläche heißt „Arbelos“ (Schustermesser),
da es an die Form dieses Arbeitsgerätes erinnert.

Der gelbe Kreis heißt der „Kreis des Archimedes“.
Er hat die Höhe h als Durchmesser.



Behauptung: Fläche (Arbelos) = Fläche (gelber Kreis)

Beweis:

Fläche (Arbelos) = $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{q}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\left(c^2 - p^2 - q^2\right)$$

Der Satz von Pythagoras, drei Mal angewendet:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad h^2 + q^2 = b^2 \qquad h^2 + p^2 = a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad p^2 = a^2 - h^2 \qquad q^2 = b^2 - h^2$$

Einsetzen $= \frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - (a^2 - h^2) - (b^2 - h^2)\right) = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\left(2h^2\right) = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$ = Fläche (gelber Kreis)