

**Unendlich  $\infty$**

# Unendlich ist keine Zahl

Angenommen Sie haben ein Einkommen von  $\infty$  € und einen Steuersatz von 33%.  
Dann müssen Sie  $\infty$  € Steuern zahlen.

Es werden also von  $\infty$  € Bruttoeinkommen  $\infty$  € Steuern abgezogen.  
Was bleibt dann übrig?

Antwort 1:  $\infty$  € –  $\infty$  €, das ist die Rechnung Gleiches minus Gleiches  
und das ergibt Null.

Also gilt hier:  $\infty$  € –  $\infty$  € = 0 €

Nach dem Zahlen der Steuern sind Sie komplett verarmt.

Antwort 2: Bei einem Steuersatz von 33% bleiben als Nettoeinkommen  
67% vom Bruttoeinkommen.

Das ist bei einem Einkommen von  $\infty$  € auch wieder  $\infty$  €.

Also gilt hier:  $\infty$  € – 0,33  $\cdot$   $\infty$  € =  $\infty$  €

Nach dem Zahlen der Steuern haben Sie noch genau so viel Geld wie vor dem  
Zahlen der Steuern.

**Fazit: Mit  $\infty$  kann man nicht rechnen.**

# Zahlenvergleich

Gibt es mehr natürliche Zahlen 1, 2, 3, 4, ...  
als Zehnerzahlen 10, 20, 30, 40, ... ?

Antwort 1: Es gibt deutlich mehr natürliche Zahlen als Zehnerzahlen.

Gibt es mehr natürliche Zahlen ohne Markierung 1, 2, 3, 4, ...  
als natürliche Zahlen mit Markierung  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ,  $4^*$ , ...?

klare Antwort: Von beiden Zahlen gibt es gleich viele.

Ersetze die Markierung durch eine 0.

Antwort 2: Es gibt genau so viele natürliche Zahlen  
wie Zehnerzahlen (= natürliche Zahlen mit 0).

# Zahlenvergleich

Die Mathematische Lösung des Problems bei unendlichen Mengen ist:

Hat man eine Gesetzmäßigkeit, mit der man jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnen kann, so sind beide Mengen gleich mächtig.

# Hilberts Hotel

Die naheliegendste unendliche Vergleichsmenge sind die natürlichen Zahlen.

Den Vergleich damit übersetzt man anschaulich in ein Hotel mit unendlich vielen Einzelzimmern, die durchnummeriert sind.

Die zweite Menge sind dann die Gäste. Man fragt, ob alle Gäste in das Hotel passen oder ob die Gäste alle Zimmer belegen.

Für eine mathematisch genaue Lösung muss man Gleichungen angeben, die

- a) für eine vorgegebene Zimmernummer berechnen,  
welche Zahl als Gast darin untergebracht ist
- b) für eine vorgegebene Gastnummer berechnen,  
in welchem Zimmer sie untergebracht ist.

Sind alle Gäste untergebracht und ist das Hotel vollständig belegt,  
so heißt die Menge der Gäste „abzählbar (unendlich)“

# Hilberts Hotel

## 1. Problem

Es kommt ein Bus mit unendlich vielen Gästen.

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Zimmer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Gast   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

In Zimmer Nummer  $z$  wohnt Gast Nummer  $g$ .

$$z = g$$

# Hilberts Hotel

## 2. Problem

Das Hotel ist durch den Bus mit den unendlich vielen Gästen belegt.

Nun kommt noch ein Kleinbus mit 8 Gästen.  $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$

|        |    |    |    |    |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Zimmer | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Gast   | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |

Zimmer  $z$  gegeben, Gast  $g$  gesucht.

$$g = z - 8$$

Gast  $g$  gegeben, Zimmer  $z$  gesucht.

$$z = g + 8$$

Die natürlichen Zahlen, vereinigt mit einer endlichen Menge, sind abzählbar unendlich.

# Hilberts Hotel

## 3. Problem

Der Bus mit den unendlich vielen Gästen wird aufgeteilt. Die ungeraden Zahlen steigen in einen weiteren Bus. Der Bus mit den geraden Zahlen kommt an Hilberts Hotel. Wird es voll werden?

|        |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Zimmer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Gast   | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 |

Zimmer  $z$  gegeben, Gast  $g$  gesucht.

$$g = 2 \cdot z$$

Gast  $g$  gegeben, Zimmer  $z$  gesucht.

$$z = g : 2$$

In jedem Zimmer wohnt ein Gast. Das Hotel ist voll belegt.

Die geraden Zahlen sind abzählbar unendlich.

Gerade Zahlen und natürliche Zahlen sind gleich mächtig.

# Hilberts Hotel

## 4. Problem

Es kommen zwei Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

Bus 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Bus 2: 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, ...

|        |   |   |    |   |    |   |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Zimmer | 1 | 2 | 3  | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Gast   | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 | -4 | 5  | -5 | 6  | -6 | 7  | -7 | 8  | -8 | 9  | -9 | 10 |

Zimmer  $z$  gegeben, Gast  $g$  gesucht.

Ist  $z$  gerade:  $g = z:2$       Ist  $z$  ungerade:  $g = -(z-1):2$

Gast  $g$  gegeben, Zimmer  $z$  gesucht.

Ist  $g$  positiv:  $z = 2 \cdot g$       Ist  $g$  nicht positiv:  $z = -g \cdot 2 + 1$

Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  sind abzählbar.

Die ganzen Zahlen und die natürlichen Zahlen sind gleich mächtig.

# Hilberts Hotel

## 5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |        |  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--|
|       |       |       |       | 15    | 21    | 28    | 36    |       |        |        |        |        |  |
| (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) | (1;7) | (1;8) | (1;9) | (1;10) | (1;11) | (1;12) | (1;13) |  |
| (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) | (2;7) | (2;8) | (2;9) | (2;10) | (2;11) | (2;12) | (2;13) |  |
| (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) | (3;7) | (3;8) | (3;9) | (3;10) | (3;11) | (3;12) | (3;13) |  |
| (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) | (4;7) | (4;8) | (4;9) | (4;10) | (4;11) | (4;12) | (4;13) |  |
| (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) | (5;7) | (5;8) | (5;9) | (5;10) | (5;11) | (5;12) | (5;13) |  |
|       | 17    | 24    | 32    | 41    |       |       |       |       |        |        |        |        |  |

Die Zimmerverteilung geschieht mit dem Diagonalverfahren.

| Zimmer | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Gast   | (1;1) | (2;1) | (1;2) | (3;1) | (2;2) | (1;3) | (4;1) | (3;2) | (2;3) | (1;4) | (5;1) | (4;2) | (3;3) |

# Hilberts Hotel

## 5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

|        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Zimmer | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    |
| Gast   | (1;1) | (2;1) | (1;2) | (3;1) | (2;2) | (1;3) | (4;1) | (3;2) | (2;3) | (1;4) | (5;1) | (4;2) | (3;3) | (2;4) | (1;5) | (6;1) | (5;2) | (4;3) |

Gast (b;g) gegeben, Zimmer z gesucht.

$$z = \frac{(b + g - 1) \cdot (b + g)}{2} - (b - 1)$$

Beispiel: Gast (3;2)

$$z = \frac{(3 + 2 - 1) \cdot (3 + 2)}{2} - (3 - 1)$$

$$z = \frac{4 \cdot 5}{2} - 2 = 8$$

# Hilberts Hotel

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |        |  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--|
|       |       |       |       | 15    | 21    | 28    | 36    |       |        |        |        |        |  |
| (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) | (1;7) | (1;8) | (1;9) | (1;10) | (1;11) | (1;12) | (1;13) |  |
| (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) | (2;7) | (2;8) | (2;9) | (2;10) | (2;11) | (2;12) | (2;13) |  |
| (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) | (3;7) | (3;8) | (3;9) | (3;10) | (3;11) | (3;12) | (3;13) |  |
| (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) | (4;7) | (4;8) | (4;9) | (4;10) | (4;11) | (4;12) | (4;13) |  |
| (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) | (5;7) | (5;8) | (5;9) | (5;10) | (5;11) | (5;12) | (5;13) |  |
|       | 17    | 24    | 32    | 41    |       |       |       |       |        |        |        |        |  |

Zimmer  $z$  gegeben, Gast  $(b;g)$  gesucht.

$$\text{Diagonalnummer } n = \text{aufger.} \left( \frac{1}{2} \left[ \sqrt{8z+1} - 1 \right] \right)$$

$$b = \frac{n(n+1)}{2} - z + 1$$

$$g = n + 1 - b$$

Beispiel: Zimmer 20

$$n = \text{aufger.} \left( \frac{1}{2} \left[ \sqrt{8 \cdot 20 + 1} - 1 \right] \right) = \text{aufger.} \left( \frac{1}{2} \cdot 11,68 \right) = 6$$

$$b = \frac{6 \cdot (6 + 1)}{2} - 20 + 1 = 21 - 20 + 1 = 2$$

$$g = 6 + 1 - 2 = 5$$

Jedem Gast kann also umkehrbar eindeutig ein Zimmer zugewiesen werden.

# Hilberts Hotel

## 5. Problem

Es kommen unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen.

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |        |        |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) | (1;7) | (1;8) | (1;9) | (1;10) | (1;11) |
| (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) | (2;7) | (2;8) | (2;9) | (2;10) | (2;11) |
| (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) | (3;7) | (3;8) | (3;9) | (3;10) | (3;11) |
| (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) | (4;7) | (4;8) | (4;9) | (4;10) | (4;11) |
| (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) | (5;7) | (5;8) | (5;9) | (5;10) | (5;11) |

$\rightarrow \frac{2}{11}$

Mathematisch:

Die Menge der Gäste kann identifiziert werden mit der Menge der positiven Brüche. Diese Menge ist abzählbar unendlich.

Die Menge der Brüche (positiv und negativ) und die Menge der natürlichen Zahlen ist gleich mächtig.

# Zusammenfassung

Die Mengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$  = die Menge aller Brüche

sind alle abzählbar unendlich.

Das bedeutet auch, dass sie alle die gleiche Mächtigkeit haben.

Gibt es neben dem „abzählbar unendlich“ noch eine andere Art von Unendlich?

**JA!**

# Verschiedene Arten von Unendlich

Alle Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind mehr als abzählbar.

Beweis (Georg Cantor 1877)

Angenommen, die Zahlen wären abzählbar.

Dann gäbe es eine Liste aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1.

0, 123011861...

0, 156237067...

0, 023327865...

0, 120778765...

0, 324357804...

0, 823786025...

0, 602937860...

...

Nun konstruieren wir damit eine neue Zahl, die mit Sicherheit noch nicht in der Liste ist.

Wir beginnen mit 0, .

Ist die erste Stelle nach dem Komma in der ersten Zahl keine 5, so setzen wir eine 5 als erste Stelle, ansonsten eine 4. -> 0, 5

Ebenso entscheidet die zweite Stelle in der zweiten Zahl, ob wir an die zweite Stelle eine 5 oder 4 setzen. -> 0, 54

Dieses Verfahren wird unendlich fortgesetzt und somit eine Dezimalzahl konstruiert, die noch nicht in der Liste ist.

# Verschiedene Arten von Unendlich

Also:

Gäbe es eine abzählbare Liste aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, dann wäre sie unvollständig.

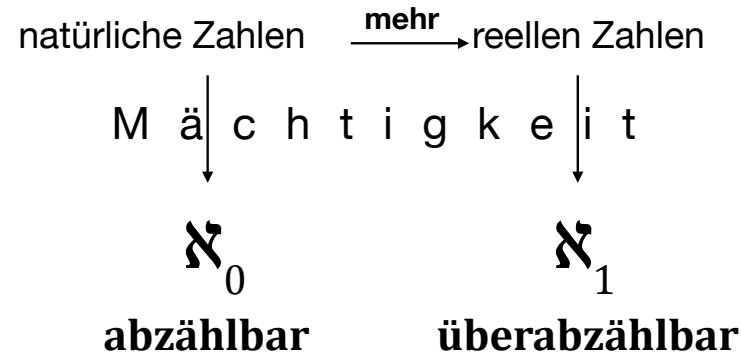
Also kann man die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 nicht in eine Liste schreiben. Es sind mehr als abzählbar unendlich viele.

(Sie passen nicht alle in Hilberts Hotel.)

Die Mächtigkeit der reellen Zahlen (aller Zahlen auf der Zahlengerade) stimmt mit der Mächtigkeit aller Zahlen zwischen 0 und 1 überein.

natürliche Zahlen  $\xrightarrow{\text{mehr}}$  reellen Zahlen

# Zwei verschiedene Arten von Unendlich



Gibt es Mengen, deren Mächtigkeit zwischen  $\aleph_0$  und  $\aleph_1$  liegt?

Georg Cantor 1878 Kontinuumshypothese:

Es gibt keine Mächtigkeit zwischen  $\aleph_0$  und  $\aleph_1$ .

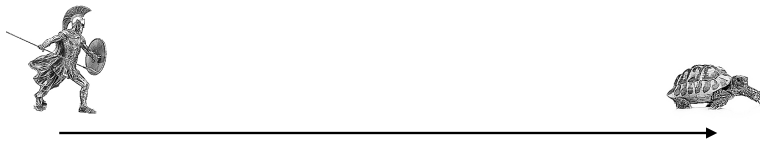
Man kann beweisen, dass man auf der Basis der Mengenlehre die Kontinuumshypothese weder beweisen noch widerlegen kann.

Paul Cohen, 1966 Fields-Medaille

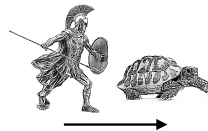
# Unendliche Summen

# Zenon-Paradoxon

Achilles und eine Schildkröte machen ein Wettrennen. Achilles läuft 10 Mal schneller als die Schildkröte, daher räumt er ihr einen Vorsprung von 100 m ein.



Ist Achilles diesen Vorsprung von 100 m gelaufen, so ist die Schildkröte 10 m weitergekröchen.



Nun muss Achilles diese 10 m laufen.  
In der Zeit kriecht die Schildkröte 1 m weiter.

Achilles 1 m, Schildkröte 10 cm, u.s.w.

**Also kann Achilles die Schildkröte nie überholen!**

# Zenon-Paradoxon

Die Strecken des Achilles sind 100 m , 10 m , 1 m , 10 cm , ... .

Nehmen wir an, dass Achilles die 100 m in 10 s läuft.

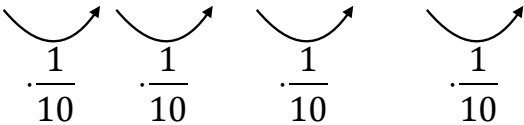
Dann braucht er nacheinander 10 s, 1 s ,  $\frac{1}{10}$  s , ...

$$10s + 1s + \frac{1}{10}s + \frac{1}{100}s + \dots = \text{"immer"} = \text{"unendlich lange"}$$

Es sind unendlich viele Teile, die man aneinander fügt.

Ist dann die Summe dieser Teile unendlich groß?

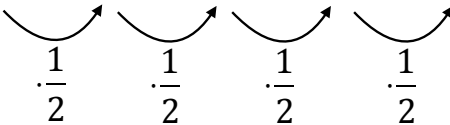
# Geometrische Reihen

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$


Das ist ein Beispiel für eine geometrische Reihe.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

ist ein weiteres Beispiel



Allgemein:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

Wobei  $q$  eine beliebige Zahl sein darf,  
typischer Weise aber ein Bruch zwischen  
0 und 1 ist.

Für  $q = 0$  und  $q = 1$  ergeben sich Sonderfälle.

# Geometrische Reihen

Eine Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \\ q \cdot s_n & = & q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \end{array} \quad \text{subtrahieren}$$

---

$$s_n - qs_n = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$s_n = n + 1 \quad \text{für } q = 1$$

# Geometrische Reihen

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

für  $q \neq 1$

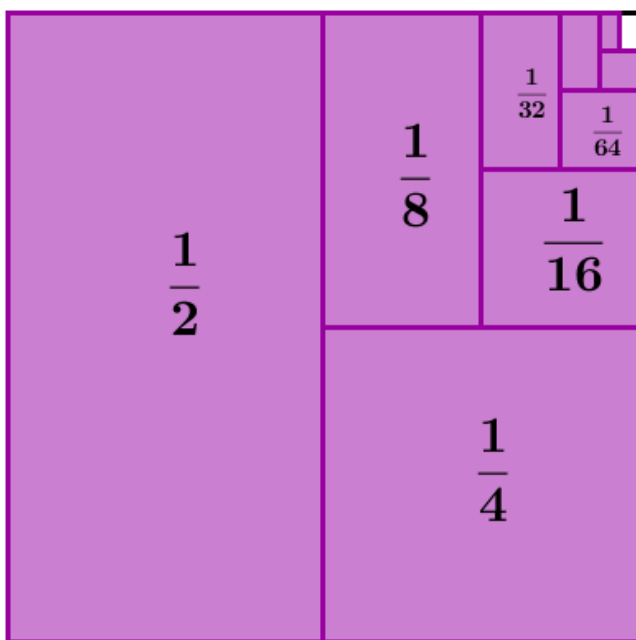
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{wenn } -1 < q < 1 \text{ ist} \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \text{ oder } q < -1 \text{ ist} \end{cases}$$

Also gilt:

$$s_n \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{wenn } -1 < q < 1 \text{ ist} \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \text{ ist} \\ \pm\infty & \text{wenn } q < -1 \text{ ist} \end{cases}$$

# Visualisierung einiger geometrischer Reihen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$



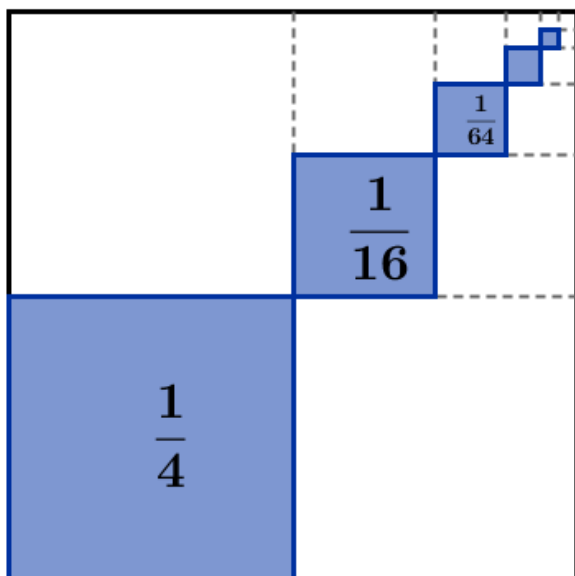
Also ist:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 + 1 = 2$$

$$\frac{1}{1-q} \text{ für } q = \frac{1}{2} \text{ ergibt } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

# Visualisierung einiger geometrischer Reihen

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{1}{3}$$



Also ist:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{4^4} + \dots = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1-q} \text{ für } q = \frac{1}{4} \text{ ergibt } \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

# Zenon-Paradoxon

Wir wissen:

Ist  $0 < q < 1$ , so gilt

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

Beim Lauf des Achilles war  $q = \frac{1}{10}$  Also ist

$$10s + 1s + \frac{1}{10}s + \frac{1}{100}s + \dots = 10s + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}s = 10s + \frac{10}{9}s = 11\frac{1}{9}s$$

Also überholt Achilles die Schildkröte ~~nie~~ nicht in den ersten  $11\frac{1}{9}$  Sekunden.

# Eine spezielle Reihe

Was ist  $1+2+3+4+5+6+7+\dots$ ?

a) Die Reihe ist divergent. Sie ist unendlich groß.  
Keine weitere Diskussion.

b) Unter gewissen Umständen kann man der Reihe einen  
endlichen Wert zuweisen, nämlich  $-\frac{1}{12}$ .

$$1+2+3+4+5+6+\dots = -\frac{1}{12}$$

Euler (1738, de seribus divergentibus):

Über die Summen divergenter Reihen herrscht große Uneinigkeit unter den Mathematikern, während die einen es verneinen, bestätigen die anderen, dass sie in einer Summe erfasst werden können. ...

... die Argumente, die auf beiden Seiten zur Verteidigung der eigenen Äußerungen angeführt werden, haben eine so große Überzeugungskraft, dass noch keine Partei gezwungen werden konnte, der anderen Recht zu geben.

# Eine spezielle Reihe

Über die Reihe  $1+2+3+4+5+6+7+\dots$   
haben sich nach Euler auch noch Gedanken gemacht:



Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920)

Godfrey Hardy (1877 - 1947)



Terence Tao (1975 -)  
Fields-Medaillen-Gewinner

Wenn sie einen Wert angeben, dann ist es  $-\frac{1}{12}$

# Erster Schritt

Die Reihe  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung nähert sich keinem Wert.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

b1) Verschiebung

$$\begin{array}{r} a = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \\ a = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline 2a = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{addieren} \end{array}$$
$$a = \frac{1}{2}$$

# Erster Schritt

Die Reihe  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

b) Rechnen mit bewährten Methoden

b2) Euler: Leibniz hat als erster diese Reihe betrachtet deren Summe er festgesetzt hatte gleich  $1/2$  zu sein, und hatte das auf diese hinreichend strenge Begründung gestützt:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } -1 < q < 1$$

Setzt man (gegen die Festlegung des Definitionsbereichs)  $q = -1$ , so erhält man:

$$1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + \dots = \frac{1}{1-(-1)}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots = \frac{1}{2}$$

# Zweiter Schritt

Die Reihe  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung nähert sich keinem Wert.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

Verschiebung

$$\begin{array}{r} b = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots \\ b = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots \\ \hline 2b = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \end{array} \quad \text{addieren}$$
$$2b = a = \frac{1}{2}$$
$$b = \frac{1}{4}$$

# Dritter Schritt

Die Reihe  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \dots$

a) Sie hat keinen Grenzwert, denn die fortlaufende Summierung wächst über alle Grenzen.

b) Rechnen mit bewährten Methoden

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \dots$$

$$b = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots$$

subtrahieren

$$c - b = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 \dots$$

$$c - b = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots) = 4 \cdot c$$

$$-3c = b = \frac{1}{4}$$

$$c = -\frac{1}{12}$$

Antworten von KI-Systemen auf die Frage

In wie fern ist der Reihenwert  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$  ein sinnvolles Ergebnis?

### Perplexity

Bedeutung in der Physik

In der theoretischen Physik, insbesondere in der Stringtheorie und Quantenfeldtheorie, hat diese Zuordnung praktische Anwendungen. Beispielsweise tritt der Wert bei der Regularisierung divergenter Summen auf, um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten (z.B. Casimir-Effekt).

Intuition durch Regularisierungsmethoden

Es gibt alternative Methoden wie die Cesàro-Summation oder Ramanujan-Summation, die ebenfalls zu diesem Ergebnis führen können. Diese Methoden interpretieren divergente Reihen auf eine Weise, die konsistent mit der analytischen Fortsetzung ist.

Fazit

Das Ergebnis  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$  ist kein klassisches

Summenergebnis, sondern ein Resultat aus fortgeschrittenen mathematischen Konzepten wie der analytischen Fortsetzung und Regularisierung. Es ist vor allem in abstrakten mathematischen und physikalischen Kontexten sinnvoll.

### Claude Sonnet 3.7

Die Reihe  $1+2+3+4+5+\dots = -1/12$  erscheint auf den ersten Blick paradox, da die Summe positiver Zahlen unmöglich negativ sein kann. Dennoch gibt es mathematische Kontexte, in denen diese Zuordnung sinnvoll ist.

In der konventionellen Mathematik divergiert diese Reihe, da die Partialsummen unbegrenzt wachsen. Aus Sicht der klassischen Konvergenztheorie hat diese Reihe keinen Summenwert.

Der Wert  $-1/12$  entsteht durch analytische Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion  $\zeta(s)$ . Für  $s > 1$  ist  $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$ . Diese Funktion lässt sich analytisch auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen, und man erhält  $\zeta(-1) = -1/12$ .

Diese Zuordnung ist in folgenden Kontexten sinnvoll:

In der Stringtheorie taucht dieser Wert bei der Berechnung physikalischer Größen auf.

In der Quantenfeldtheorie erscheint  $-1/12$  bei der Renormierung divergenter Ausdrücke.

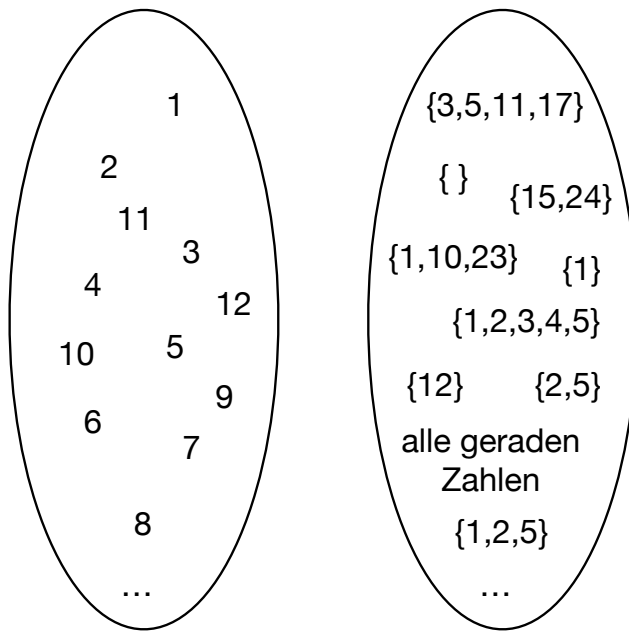
In der Zahlentheorie liefert die analytische Fortsetzung der Zeta-Funktion wichtige Erkenntnisse, etwa zum Primzahlsatz.

Mathematisch präziser sollte man sagen: "Der Reihe  $1+2+3+\dots$  wird durch Regularisierungsverfahren wie analytische Fortsetzung der Wert  $-1/12$  zugeordnet." Es handelt sich nicht um eine "Summe" im gewöhnlichen Sinn, sondern um einen regularisierten Wert.

# Ausgangsmenge – Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge hat immer eine größere Mächtigkeit als die Ausgangsmenge. (G. Cantor 1890)

Beweis illustriert am Beispiel der natürlichen Zahlen.



natürliche Zahlen

Potenzmenge der  
natürlichen Zahlen

Angenommen, beide hätten die gleiche Mächtigkeit. Dann gibt es zu jeder Zahl genau eine Menge.

Wir können dann wieder die Mengen der Potenzmenge in eine unendliche Liste schreiben.

# Ausgangsmenge – Potenzmenge

Wir können dann wieder die Mengen der Potenzmenge in eine unendliche Liste schreiben.

Nun gibt es links Zahlen, die in ihrer zugeordneten Menge rechts nicht enthalten sind.

Diese Zahlen fassen wir zu einer Menge  $M$  zusammen.

$M$  ist die Menge aller Zahlen, die in ihrer zugeordneten Menge nicht enthalten sind.

$M$  ist eine Menge von natürlichen Zahlen, kommt also in der Liste vor.

Folglich ist  $M$  eine natürliche Zahl  $m$  zugeordnet. Ist  $m$  in  $M$  enthalten?

Ja,  $m$  ist in  $M$ . Also ist  $m$  in der zugeordneten Menge nicht enthalten. Das ist aber  $M$ . Also ist  $m$  in  $M$  nicht enthalten.

Nein,  $m$  ist nicht in  $M$ . Also ist  $m$  in der zugeordneten Menge enthalten. Das ist aber  $M$ . Also ist  $m$  in  $M$  enthalten.

$$1 \longleftrightarrow \{2,3,8\}$$

$$2 \longleftrightarrow \{1,2,3,8\}$$

$$3 \longleftrightarrow \{2,5,8\}$$

$$4 \longleftrightarrow \{2,3,4,5,6\}$$

$$5 \longleftrightarrow \{1,5,11,22,83\}$$

$$6 \longleftrightarrow \{\}$$

$$7 \longleftrightarrow \{1,2,55\}$$

$$8 \longleftrightarrow \{2,4,8\}$$

$$9 \longleftrightarrow \text{gerade Zahlen}$$

$$10 \longleftrightarrow \{11\}$$

$$\ddots \longleftrightarrow M$$

