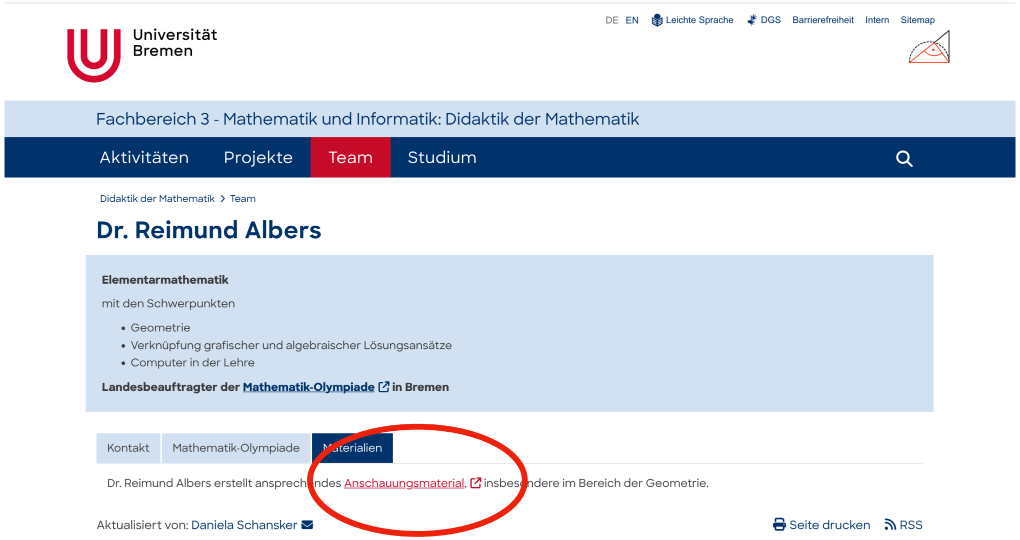
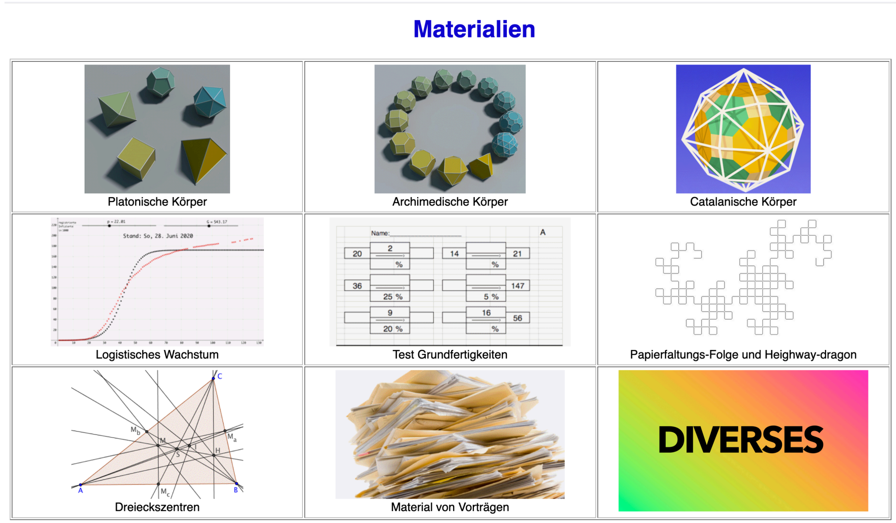
Materialien

https://www.uni-bremen.de/didaktik-der-mathematik/team/albers





Klassische Beweise

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Vorbereitung: Teilbarkeit

1, 2, 4, 8, 16, 32, …, 2^n Zweierpotenzen

Welche Zweierpotenz ist auch durch 3 teilbar? oder

Wie oft muss ich 2 mit sich selbst multiplizieren, damit das Teilen durch 3 aufgeht?

Antwort

Das geht nicht. Wenn man nur die 2 multiplikativ hineinsteckt, ist auch nur die 2 als Teiler enthalten (und deren Potenzen).

Analogie zur Chemie

Die Primzahlen sind wie die Elemente.

Vorbereitung: Teilbarkeit

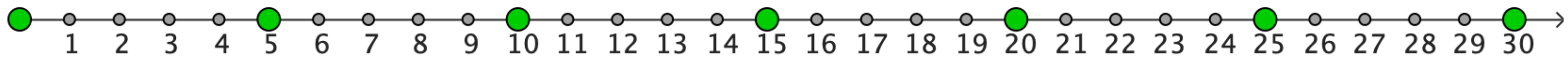
Additiv

Eine Zahl ist durch 3 teilbar. Addiert man eine weitere Zahl

- die auch durch 3 teilbar ist. Dann ist das Ergebnis durch 3 teilbar. 33 + 24 = 57
- die nicht durch 3 teilbar ist. Dann ist das Ergebnis nicht durch 3 teilbar. 33 + 20 = 53

weiteres Beispiel

Die durch 5 teilbaren Zahlen liegen in einem festen Abstand auf dem Zahlenstrahl.
Dieser Abstand ist einzuhalten, wenn man von einer durch 5 teilbaren Zahl zur nächsten gehen will.



Vorbereitung: Teilbarkeit

Größenvergleich
Ein Teiler T einer Zahl Z ist immer kleiner als die Zahl Z, also $T < Z$
bestenfalls so groß wie die Zahl, also $T = Z$.

Beispiel
24 hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Alle Zahlen sind kleiner als 24 bis auf die Zahl 24 selbst.

Umgekehrt
Ist eine Zahl T größer als eine Zahl Z, so kann T niemals Teiler von Z sein.
Also: 15743 kann kein Teiler von 9845 sein.

Vorbereitung: Teilbarkeit

Folgerung aus allen Überlegungen

Addiert man zu einer Zahl Z die 1, so macht man alle Teilbarkeiten von Z „kaputt“.

Beispiel

5·9·11 = 495 Also ist 495 durch 5, 9 und 11 teilbar.

Dann ist 495 + 1 = 496 weder durch 5 noch durch 9 noch durch 11 teilbar.

1 kann nicht durch 5 teilbar sein,
weil 5 größer ist als 1.

Vorbereitung: Primfaktorzerlegung

Jede Zahl lässt sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen.

Beispiel

$$\begin{aligned} 60 &= 2 \cdot 30 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Die Reihenfolge in der Zerlegung spielt keine Rolle

$$\begin{aligned} 60 &= 3 \cdot 20 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Erinnerung: Eine Teilbarkeit wird durch weitere Rechnungen nicht „kaputt gemacht".

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Der Beweis stammt von Euklid (ca. 300 v.Chr.)

Es ist ein indirekter Beweis. D.h. es wird nicht bewiesen, dass die Aussage selbst wahr ist, sondern es wird bewiesen, dass das Gegenteil der Aussage falsch ist.

Gegenteil: Es gibt nur endlich viele Primzahlen.	Beispiel: Es gibt nur 2, 3, 5, 7.
Wir nehmen alle Primzahlen, die es gibt, und multiplizieren diese miteinander.	Beispiel: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
Das Ergebnis ist eine Zahl, die durch jede Primzahl teilbar ist.	Beispiel: 210 ist durch 2, 3, 5 und 7 teilbar
Zu diesem Ergebnis addieren wir 1.	Beispiel: $210 + 1 = 211$
Diese neue Zahl ist durch keine Primzahl teilbar.	Beispiel: 211 ist weder durch 2, 3, 5 noch 7 teilbar.
Macht man nun zu dieser neuen Zahl die Primfaktorzerlegung, so erhält man eine oder mehrere neue Primzahlen.	Beispiel: 211 ist eine Primzahl

Die Annahme, dass es eine begrenzte Anzahl von Primzahlen gibt, ist also falsch.

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Weitere Beispiele für dieses Vorgehen

Primzahlen	Produkt	„+1“	Primfaktorzerlegung
2, 3	$2{\cdot}3 = 6$	7	7
2, 3, 5	$2{\cdot}3{\cdot}5 =30$	31	31
2, 3, 5, 7	$2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7 = 210$	211	211
2, 3, 5, 7, 11	$2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11 = 2310$	2311	2311
2, 3, 5, 7, 11, 13	$2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13 = 30030$	30031	$59 \cdot 509$
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17	$2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}17 =510510$	510511	$19 \cdot 97 \cdot 277$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (Bruch)

Vorbereitung
Primfaktorzerlegung und Quadratzahlen

$10^2 = 100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad 12^2 = 144 = 2^4 \cdot 3^2$

In der Primfaktorzerlegung von Quadratzahlen kommt jeder Primfaktor geradzahlig oft vor.

Begründung

$12 \cdot 12 = (2^2 \cdot 3) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^{2+2} \cdot 3^{1+1}$

$(a^k \cdot b^m)^2 = (a^k \cdot b^m) \cdot (a^k \cdot b^m) = a^{k+k} \cdot b^{m+m} = a^{2k} \cdot b^{2m}$

Vorbereitung
Primfaktorzerlegung und Quadratzahlen

Umgekehrt:

Eine Primfaktorzerlegung, in der jeder Primfaktor geradzahlig oft vorkommt, ist die Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl.

Beispiel:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2) = 300 \cdot 300$$

Eine Primfaktorzerlegung, in der ein Primfaktor ungeradzahlig oft vorkommt, kann nicht die Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl sein.

Denn: Die Primfaktoren können nicht gleichmäßig aufgeteilt werden.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Auch dieser Beweis ist indirekt

Angenommen, es gibt einen Bruch, der genau gleich $\sqrt{2}$ ist.

Also $\quad \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$

Die Gleichung quadrieren $\quad 2 = \dfrac{p^2}{q^2}$

q^2 nach links multiplizieren $\quad 2 \cdot q^2 = p^2$

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung $\quad 2 \cdot q^2 = p^2$

Quadratzahl. Also kommen alle Primfaktoren geradzahlig oft vor.
Insbesondere auch der Primfaktor 2.

Der Primfaktor 2 kommt ungeradzahlig oft vor.

Linke und rechte Seite widersprechen sich. Also ist die Annahme falsch.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Ein Zahlenbeispiel

Angenommen, es gibt einen Bruch, der genau gleich $\sqrt{2}$ ist.

Beispiel $\sqrt{2} = \dfrac{99}{70}$

Die Gleichung quadrieren $2 = \dfrac{99^2}{70^2}$

70^2 nach links multiplizieren $2 \cdot 70^2 = 99^2$

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung $2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = (3 \cdot 3 \cdot 11)^2$

$$2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^0 = 2^0 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2$$

Der Primfaktor 2 kommt ungeradzahlig oft vor.

Die Quadratur eines Kreises ist unmöglich

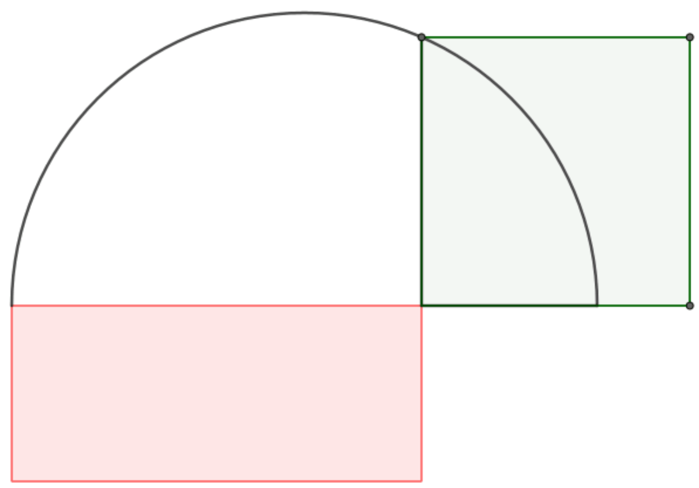
Die Quadratur als Flächenmessung

Für die altgriechische Mathematik bedeutete die Flächenmessung, dass die Fläche durch geometrische Konstruktion in ein Quadrat verwandelt wird - die Quadratur der Fläche.

Jedes Rechteck kann durch Konstruktion in ein Quadrat verwandelt werden.

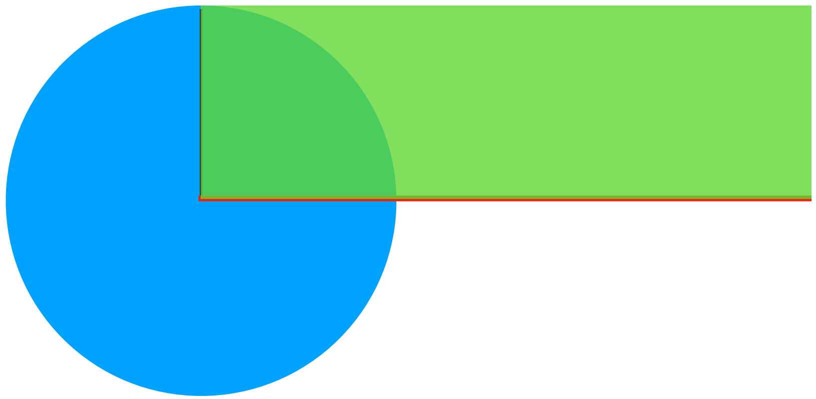
Wesentliche Grundlagen dafür sind die Sätze am rechtwinkligen Dreieck (—> dritter Termin)

Die hier animierte Darstellung beruht auf dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q$



Die Quadratur des Kreises

Die prinzipielle Konstruktion wäre folgende.



Zu dem Kreis mit dem Radius r konstruiert man eine Strecke mit der Länge $\pi \cdot r$.

Dann wäre die Fläche des Kreises $F = \pi \cdot r^2$ so groß wie das Rechteck mit den Seitenlängen $\pi \cdot r$ und r.

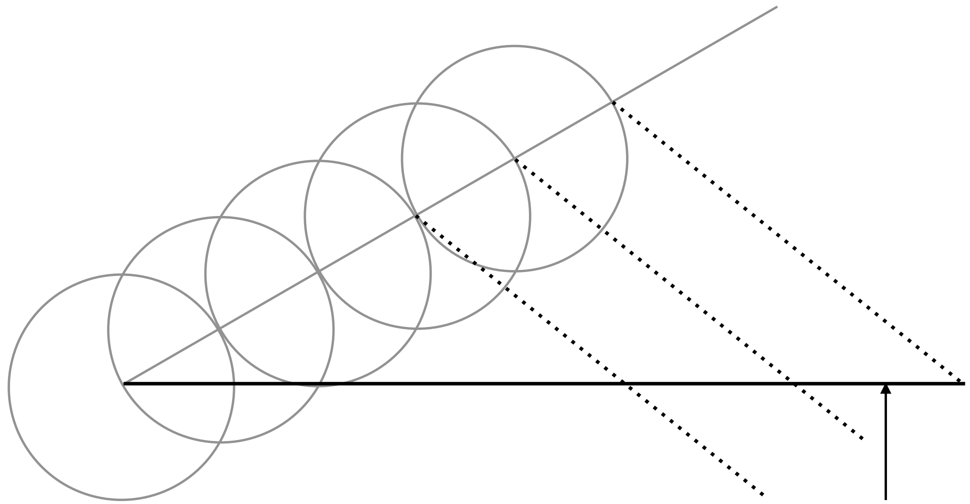
Das Rechteck kann durch Konstruktion in ein Quadrat verwandelt werden.

konstruierbare Zahlen

Nicht alle Zahlen (= Verlängerungsfaktoren) sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Jede Strecke kann kann beliebig geteilt werden.

Beispiel: Eine Strecke in 5 Teile teilen.

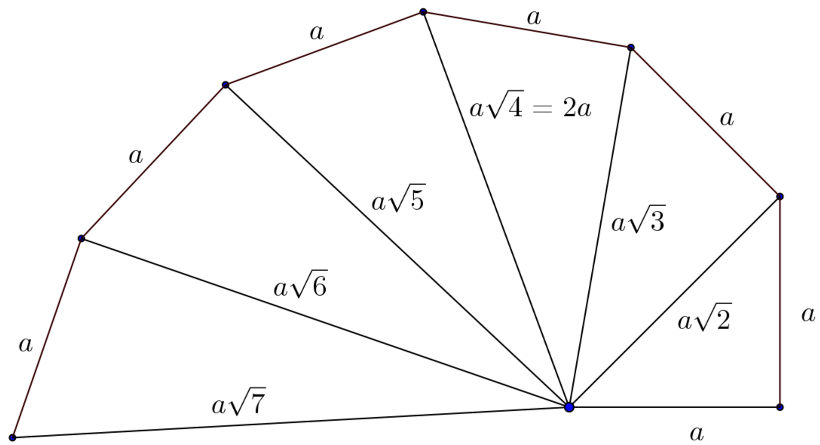


$\frac{1}{5}$ der Ausgangsstrecke

Jede beliebige Bruchzahl kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

konstruierbare Zahlen

Jede (Quadrat-) Wurzel aus einer natürlichen Zahl kann konstruiert werden.



$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

Die Quadratwurzel zu jeder Bruchzahl

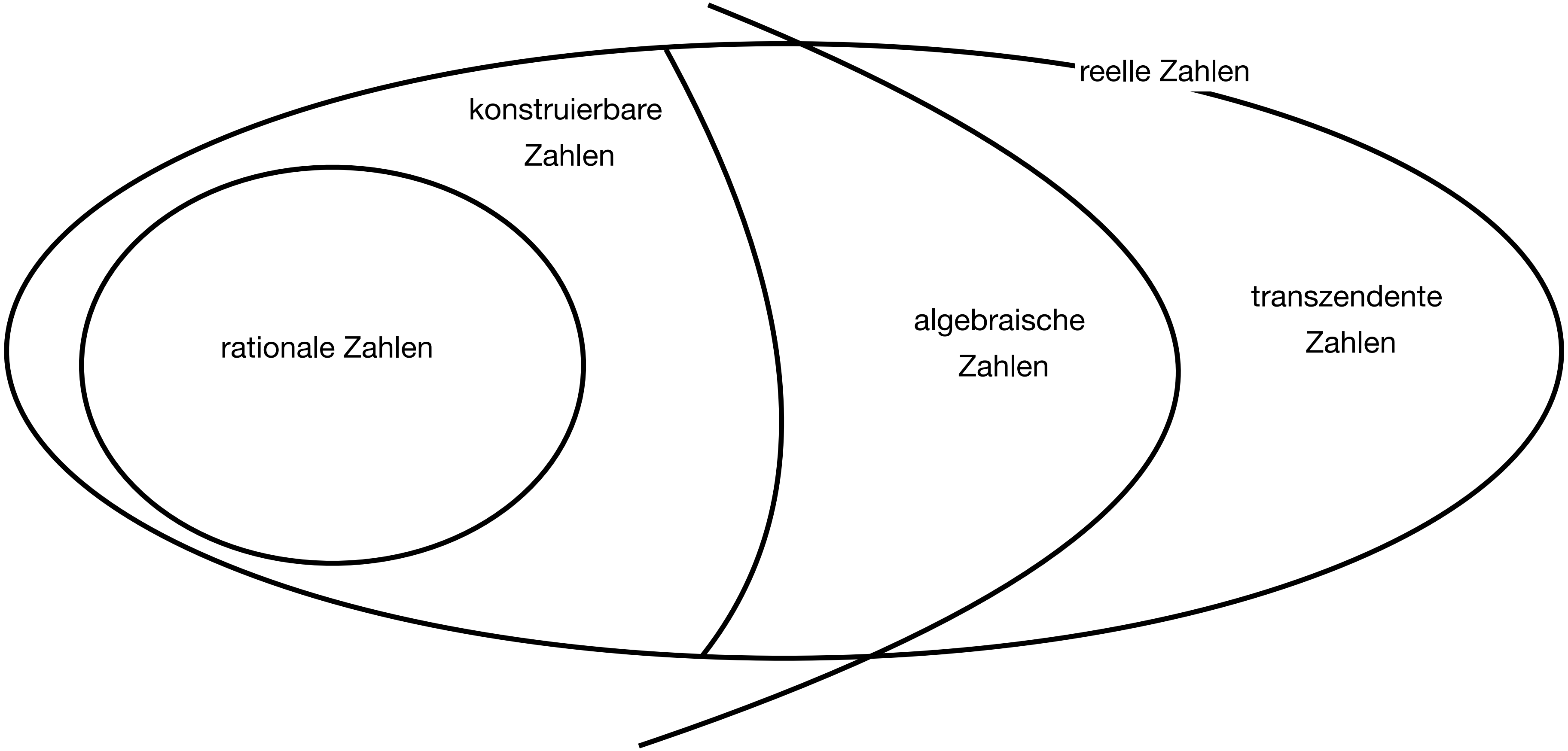
kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

$$\sqrt{\sqrt{n}} = \sqrt[4]{n} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}} = \sqrt[8]{n}$$

Die 4., 8., 16. … Wurzel zu jeder Bruchzahl

kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Einteilung der Zahlen

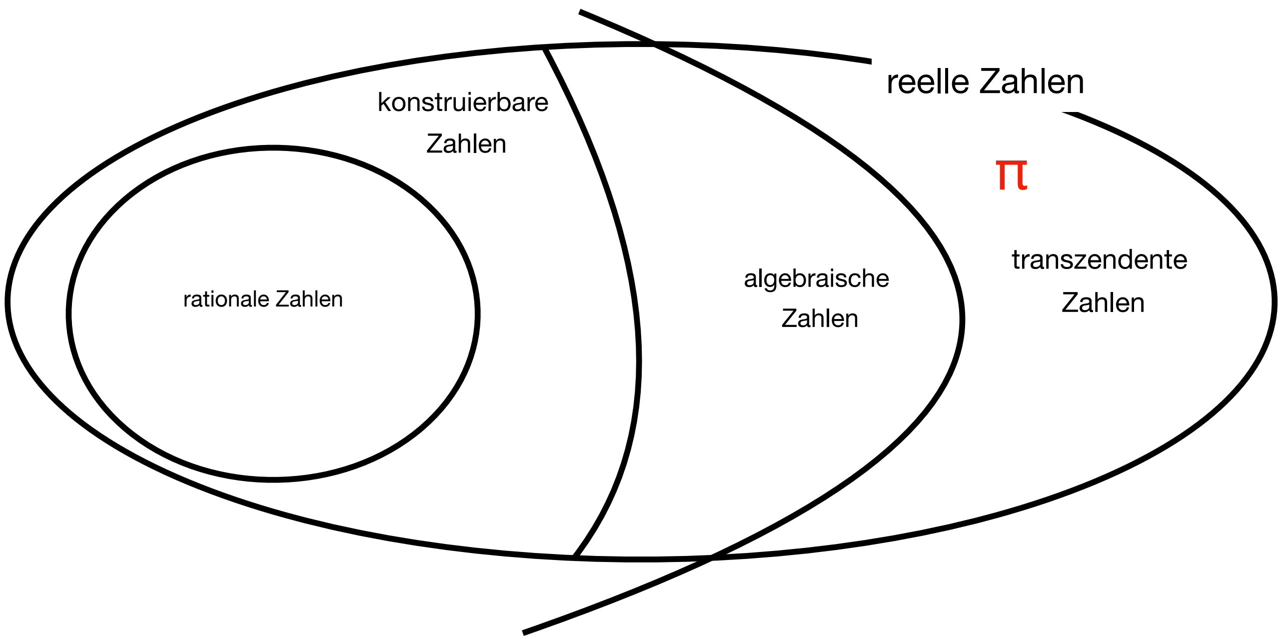


Algebraische Zahlen: Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten.

z. B. $p(x) = x^5 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 34$

Die Quadratur des Kreises

1882 bewies der Mathematiker Ferdinand von Lindemann, dass π nicht algebraisch ist, also transzendent.



Damit ist π keine konstruierbare Zahl, also die Quadratur des Kreises nicht möglich.

Die Quadratur des Kreises

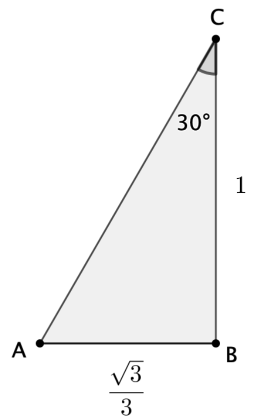
Bereits 1685 führte der polnische Mathematiker Adam Kochanski eine leicht durchführbare Näherungskonstruktion durch.

$\pi \approx \sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} \approx 3{,}141533$, womit der Fehler weit unter einem Zehntel Prozent ist.

Die Wurzel weist auf den Satz von Pythagoras hin:

$$\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2 \approx \pi^2$$

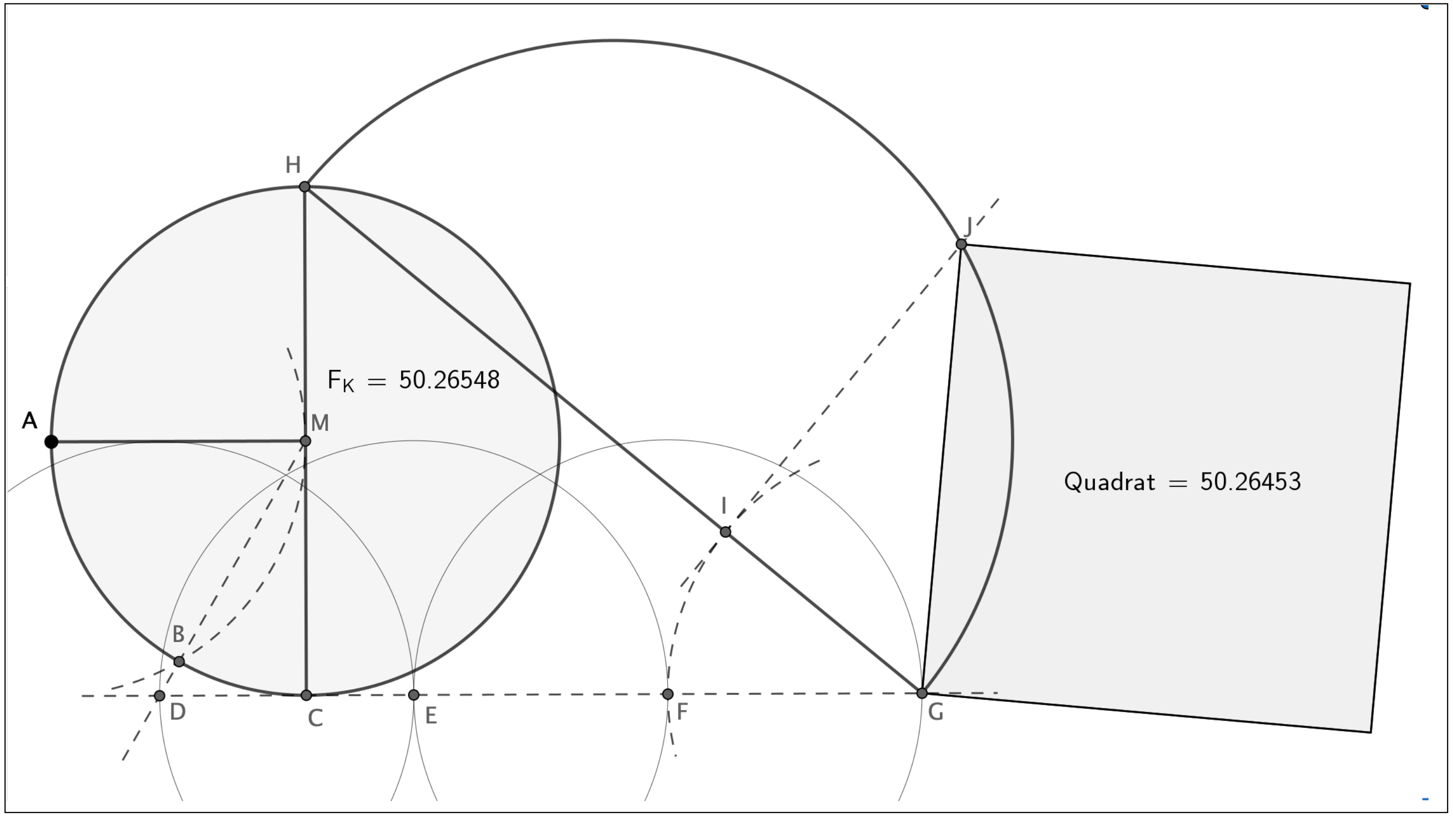
Die Länge $\frac{\sqrt{3}}{3}$ erhält man im halben, gleichseitigen Dreieck.



Die Quadratur des Kreises

Bereits 1685 führte der polnische Mathematiker Adam Kochanski eine leicht durchführbare Näherungskonstruktion durch.

$$\pi \approx \sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} \approx 3{,}141533$$



Die Wurzel weist auf den Satz von Pythagoras hin:

$$\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2 \approx \pi^2$$