Beispiele für chaotisches Verhalten

1. Julia-Mengen

Gaston Julia (1893 - 1978)
war ein französischer Mathematiker

1918 Memoire sur l’itération des fonctions rationnelles

1. Julia-Mengen

$$f(z) = z^2 + c$$

Dabei ist z ist eine „komplexe Zahl“ und c eine beliebige Konstante.

Komplexe Zahlen haben zwei Komponenten, x und y, so dass man sie als Punkt $z = (x,y)$ in der Ebene darstellen kann.

$z = (x, y)$ Wie quadriert man einen Punkt?

$$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$$

komplexe Zahlen

Bei dem Problem, was $\sqrt{-1}$ ist, bleibt man nicht bei „das geht nicht“ stehen, sondern definiert eine neue Zahl:

$$i=\sqrt{-1}$$

Sie ist insbesondere mit den „alten“ Zahlen verbunden über den Zusammenhang

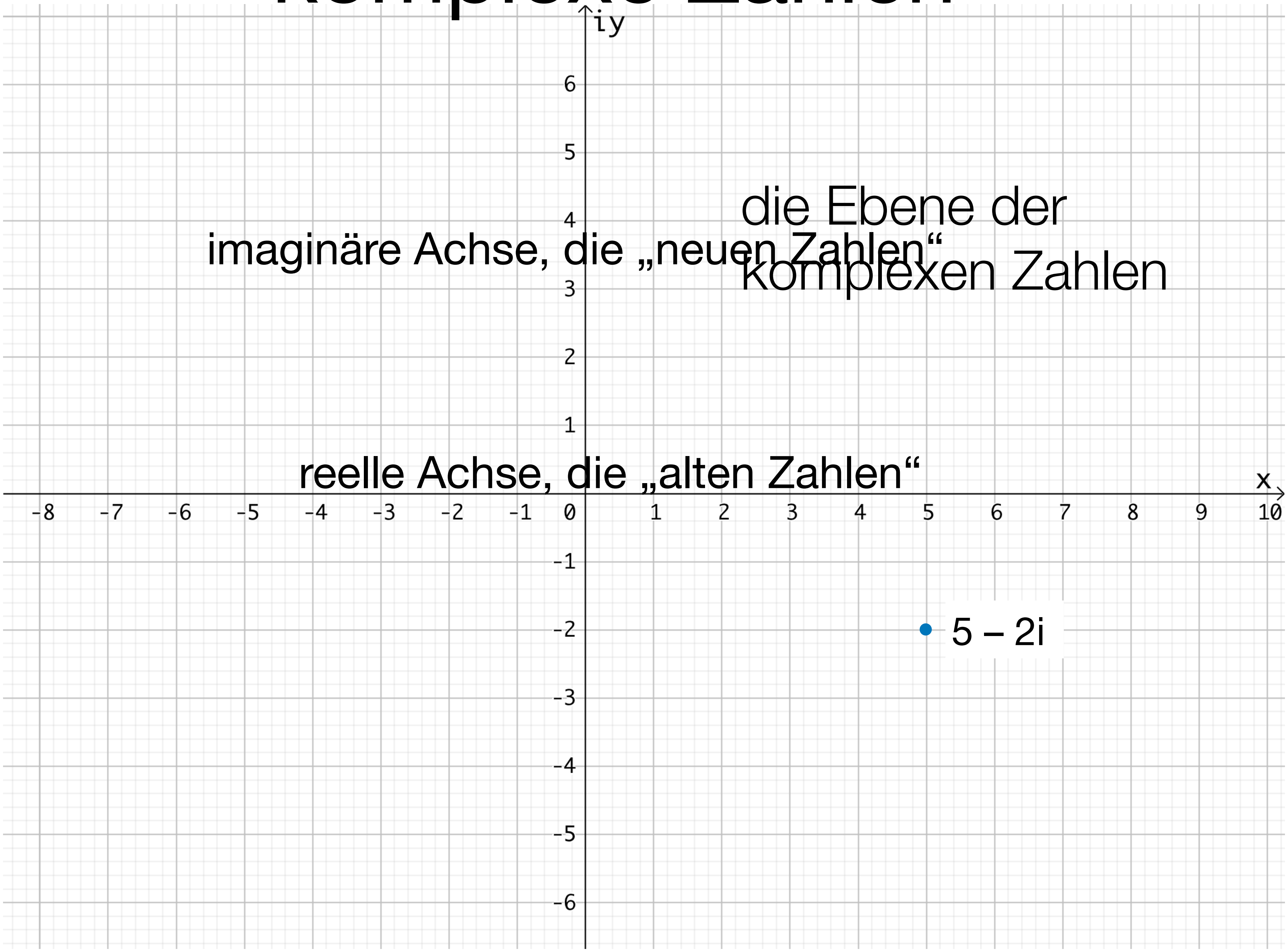
$$i^2=-1$$

$$z=(x;y)=x+iy$$

$$z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2+2xiy+i^2y^2=x^2-y^2+i2xy$$

$$z^2=(x^2-y^2,2xy)$$

komplexe Zahlen



1. Julia-Mengen

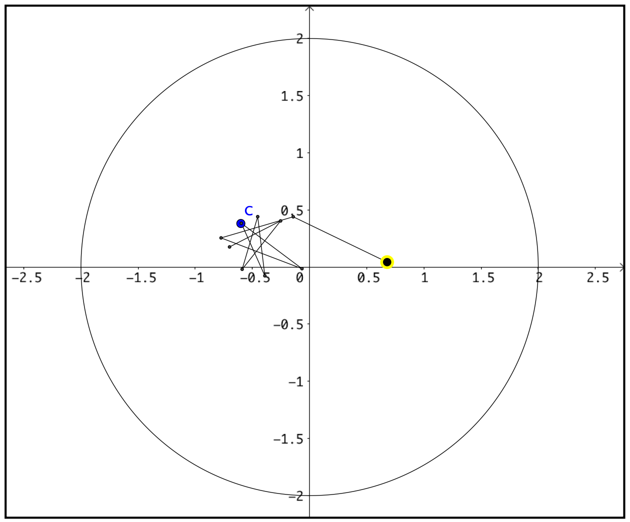
Die Iteration mit $f(z) = z^2 + c$

$$z_0 \xrightarrow{f} f(z_0) = z_0^2 + c = z_1 \xrightarrow{f} f(z_1) = z_2 \xrightarrow{f} f(z_2) = z_3 \xrightarrow{f} \ldots$$

hat nun zwei prinzipielle Eigenschaften:

- sie strebt gegen ∞
- sie bleibt auch nach vielen Iterationsschritten endlich

Dabei ist der Kreis mit dem Radius 2 die wesentliche Grenze.

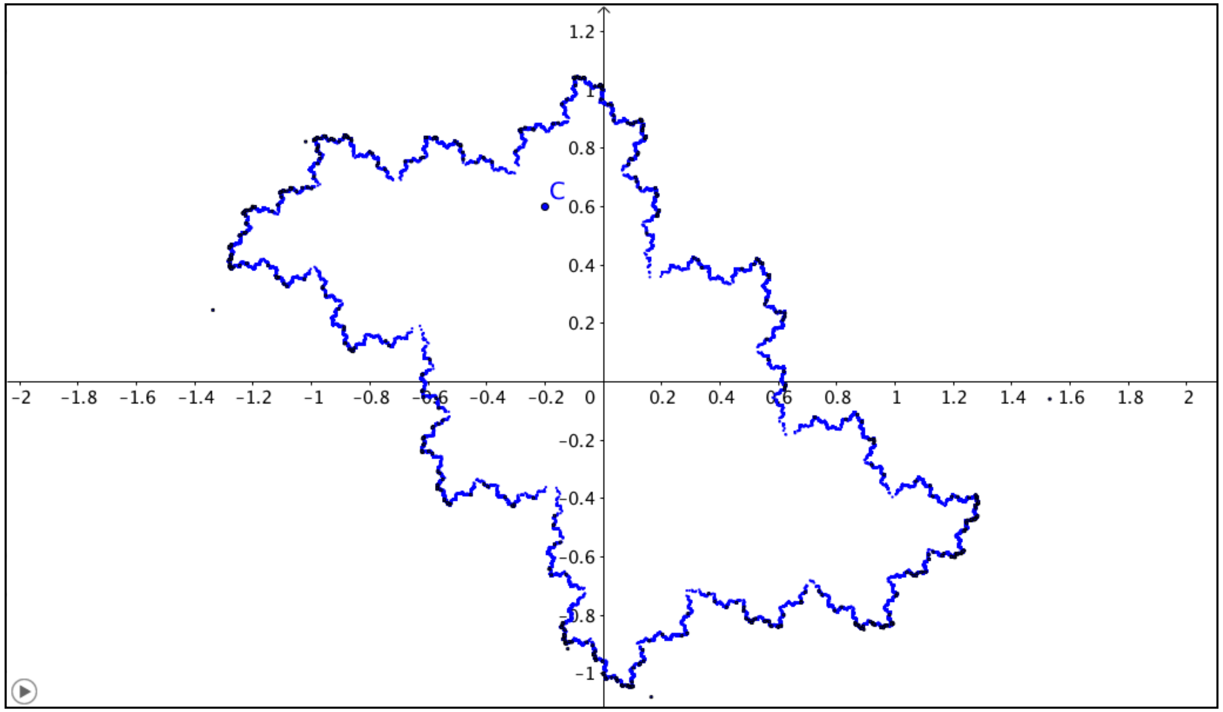


JuliaIteration.ggb

1. Julia-Mengen

In einer graphischen Darstellung färbt man die Anfangswerte z_0, zu denen die Iteration im Kreis mit dem Radius 2 bleibt, schwarz. Das ist die Menge der gefangenen Punkte.

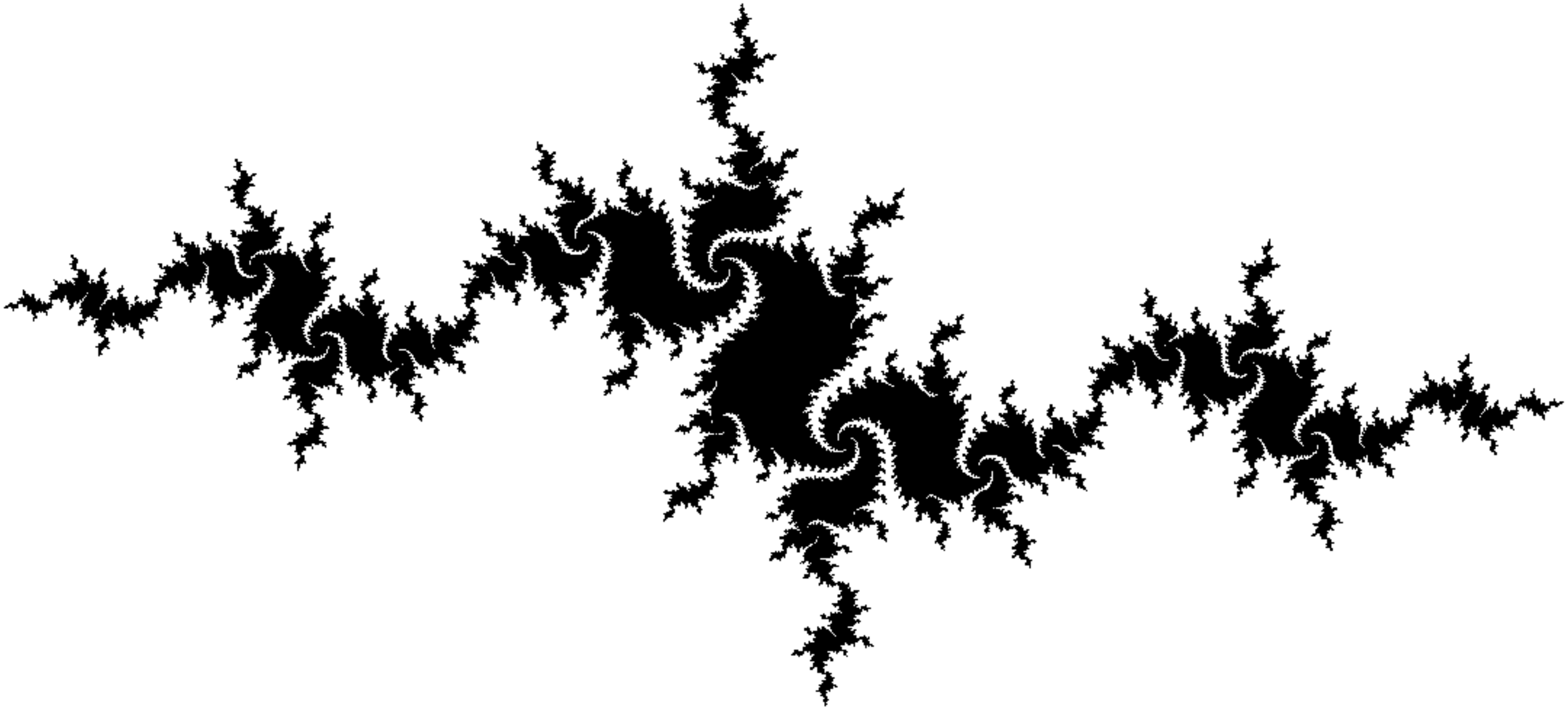
Deren Rand ist die Julia-Menge.



Die Juliamenge zu
c = -0,2 + 0,6i

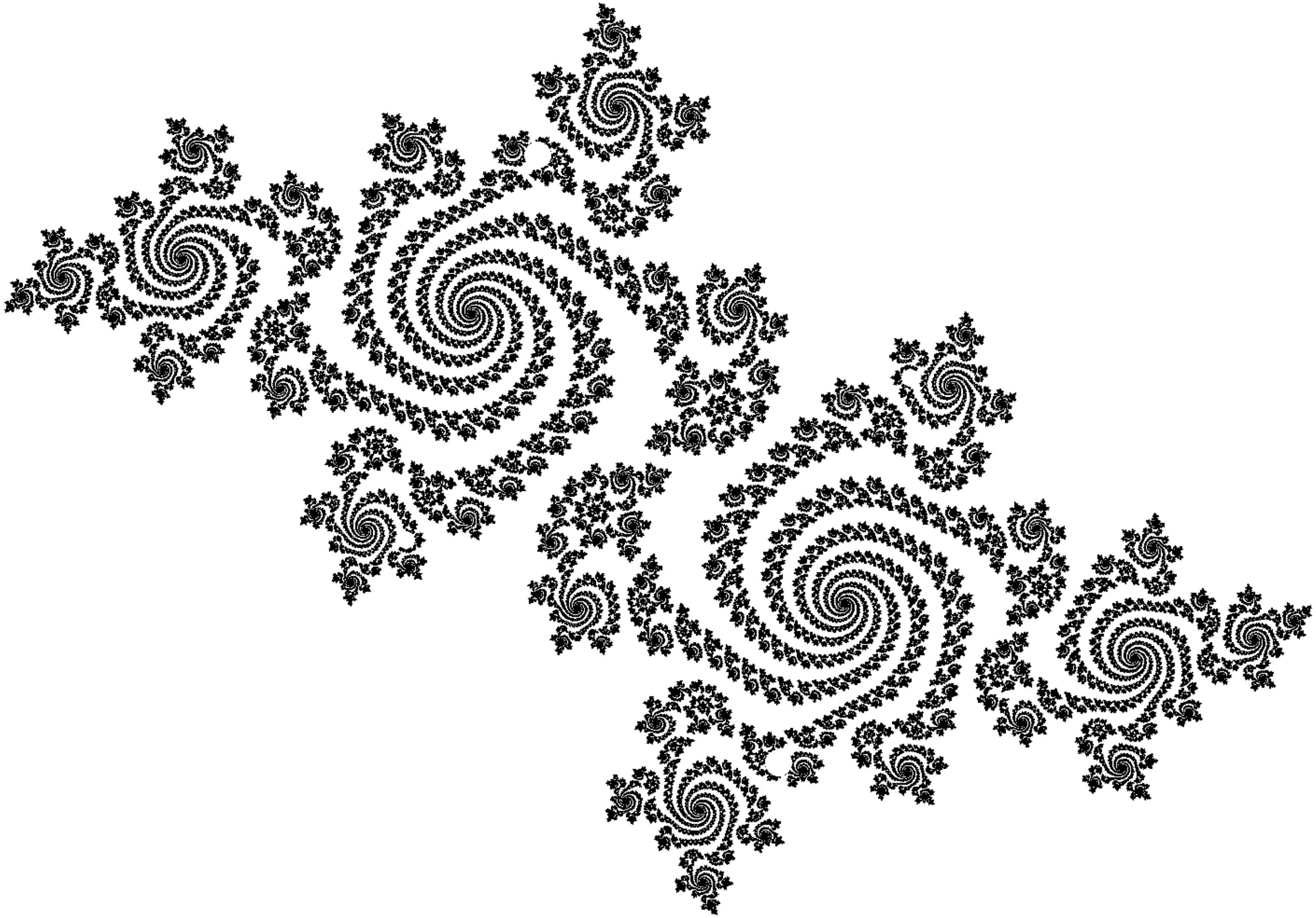
JuliaGrenze.ggb

1. Julia-Mengen



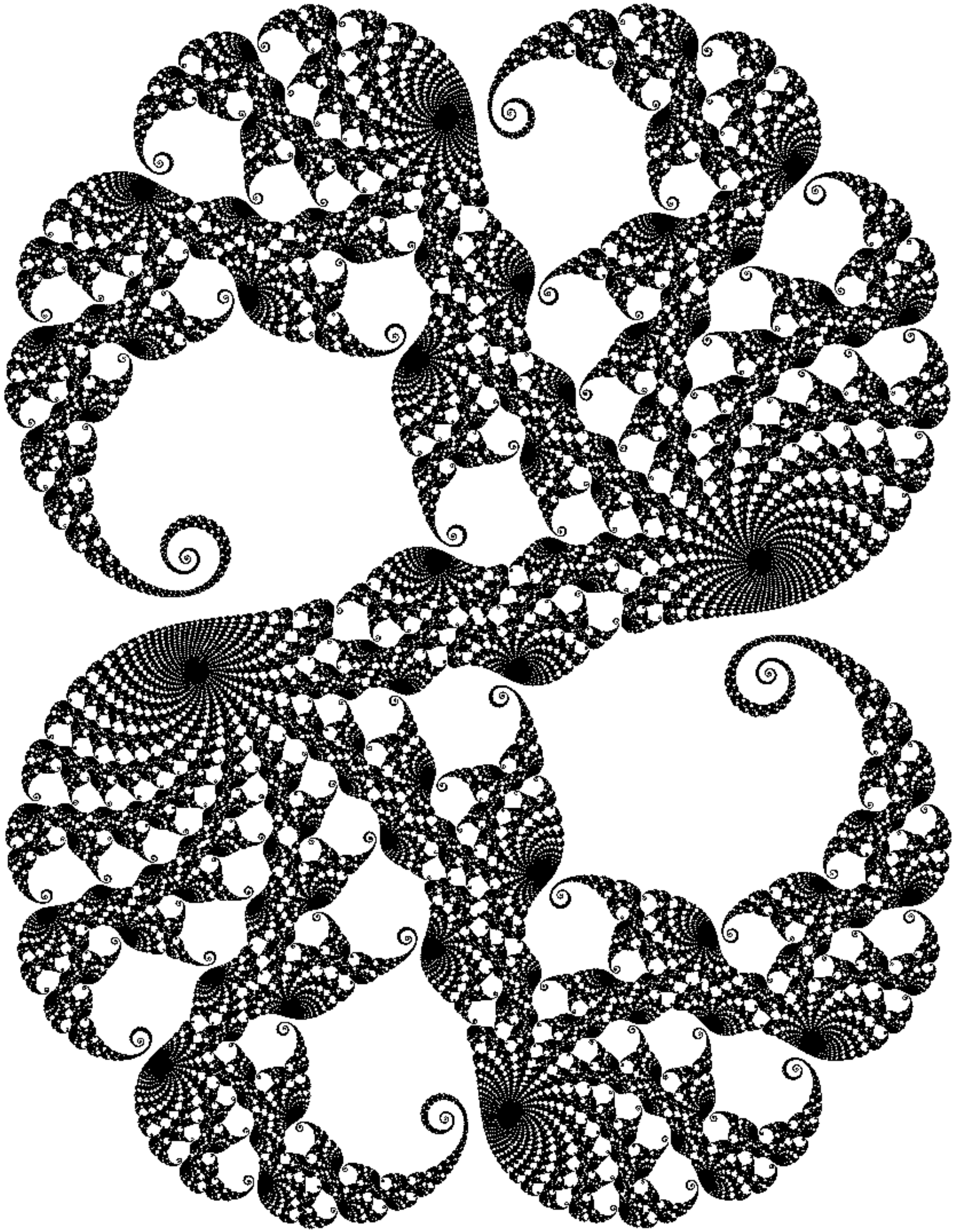
Die Gefangenenmenge zu c = -1,1135 + 0,2369i

1. Julia-Mengen



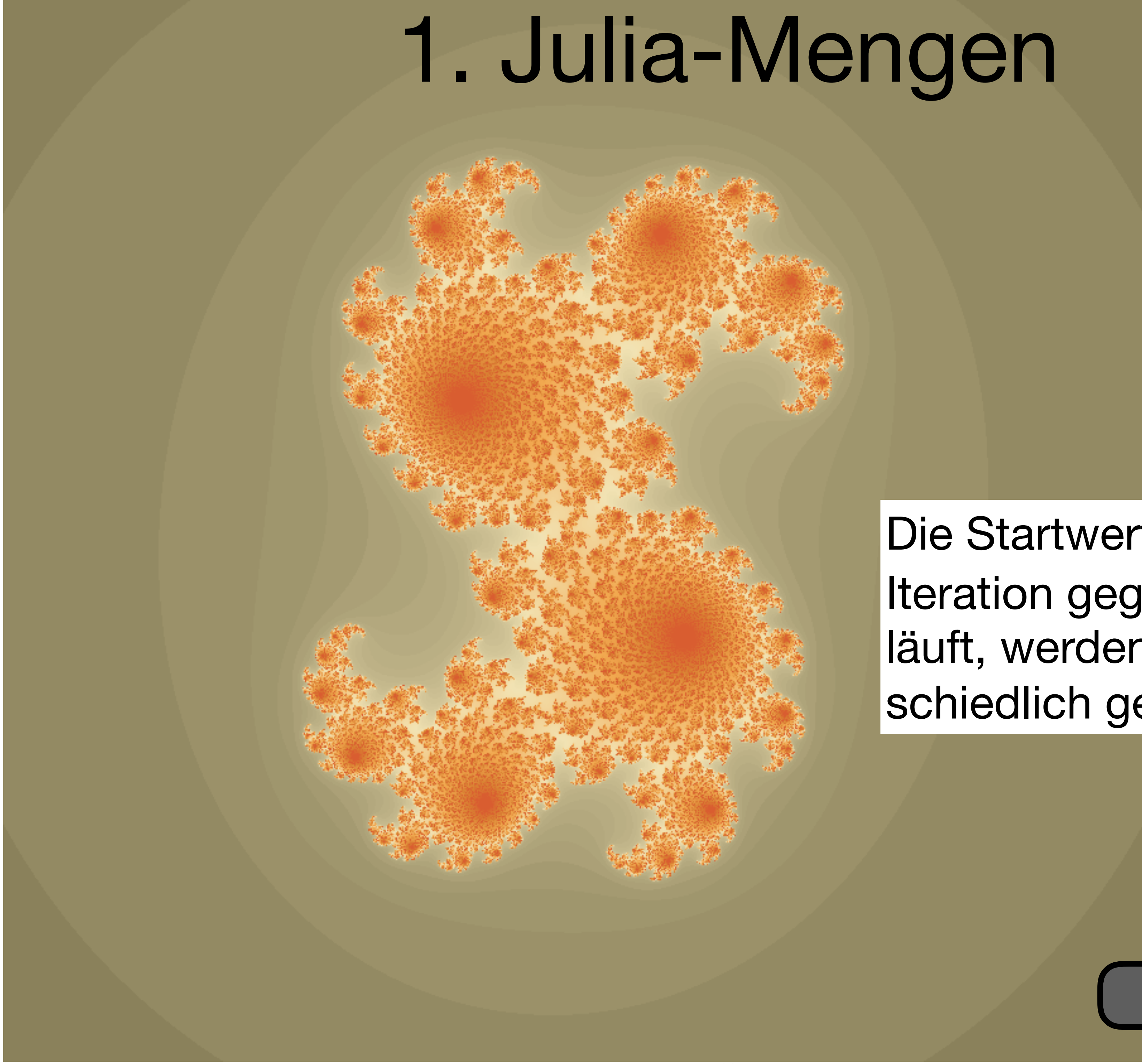
Die Gefangenenmenge zu $c = 0{,}16 + 0{,}654i$

1. Julia-Mengen



Die Gefangenenmenge zu $c = 0{,}26 + 0{,}0017i$

1. Julia-Mengen



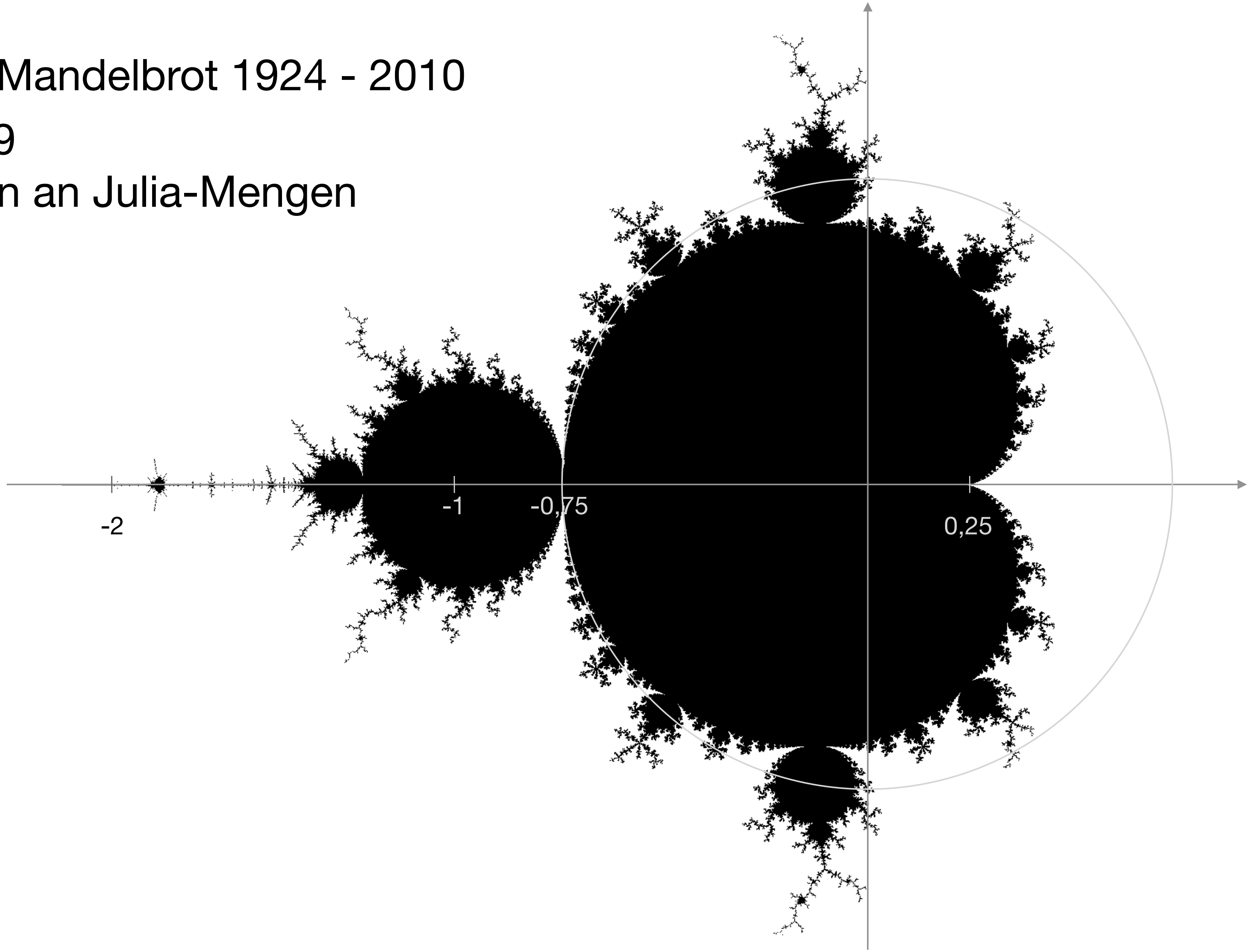
Die Startwerte z_0, deren Iteration gegen Unendlich läuft, werden unter-schiedlich gefärbt

Scale

2. Die Mandelbrotmenge

Benoit Mandelbrot 1924 - 2010

ab 1979
Arbeiten an Julia-Mengen

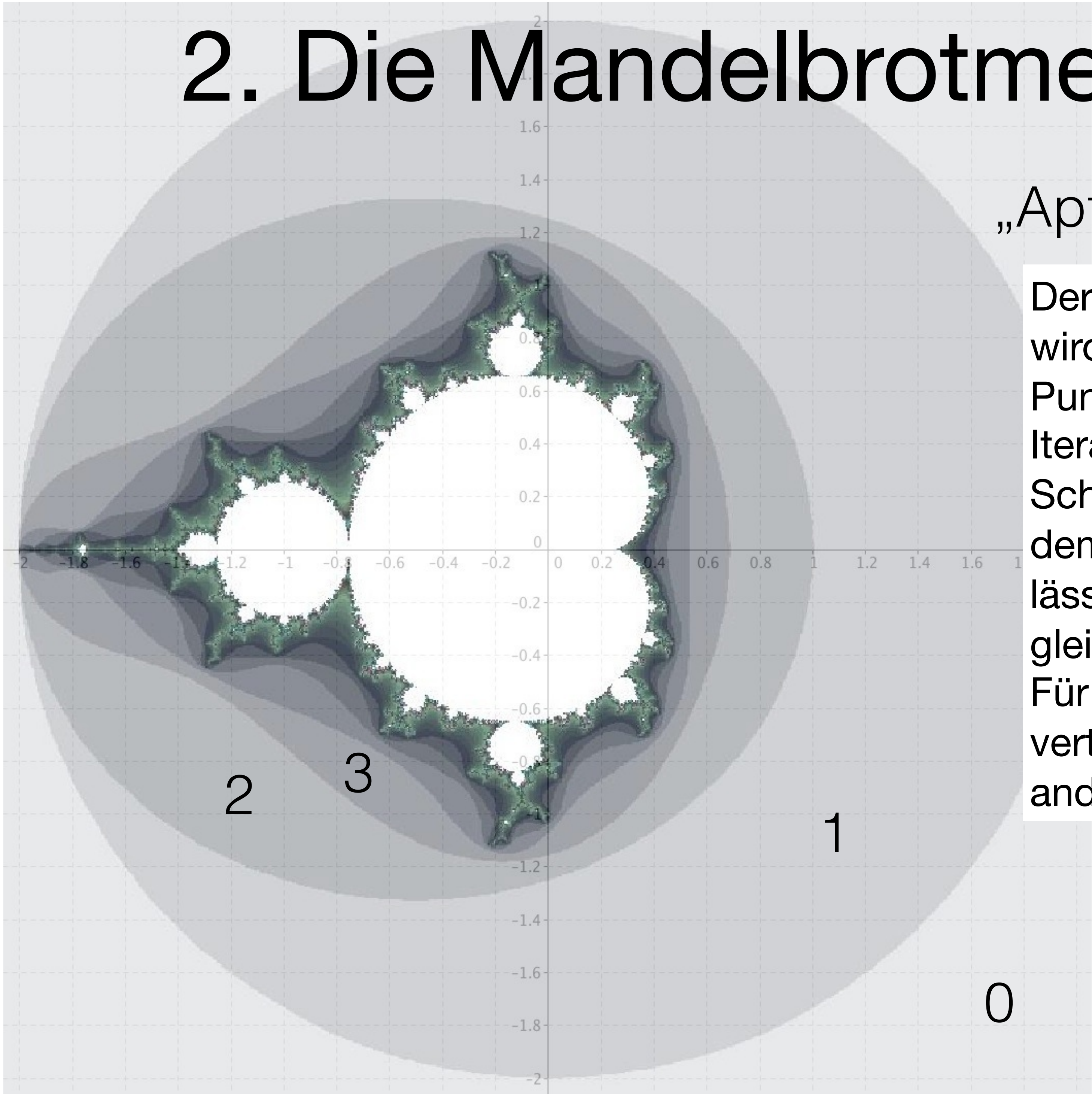


2. Die Mandelbrotmenge

Das Rechenrezept für die Mandelbrotmenge:

1. Wähle einen Punkt C(c_x,c_y) im Koordinatensystem (eine komplexe Zahl).
2. Wähle den Startwert z_0 = (0,0).
3. Rechne den nächsten Wert z_1 aus mit $z_1 = z_0^2 + \left(c_x, c_y\right)$.
4. Berechne, wie weit der neue Punkt von (0,0) entfernt ist.
5. Ist die Entfernung kleiner als 2, mache einen weiteren Schritt mit Punkt 3. und 4.
   Ist die Entfernung größer als 2, höre auf. Denn dann weißt du, dass der Punkt nach Unendlich wandern wird.
6. Ist auch nach z.B.100 Rechnungen der Punkt nicht nach Unendlich gelaufen, so färbe den Punkt C schwarz.

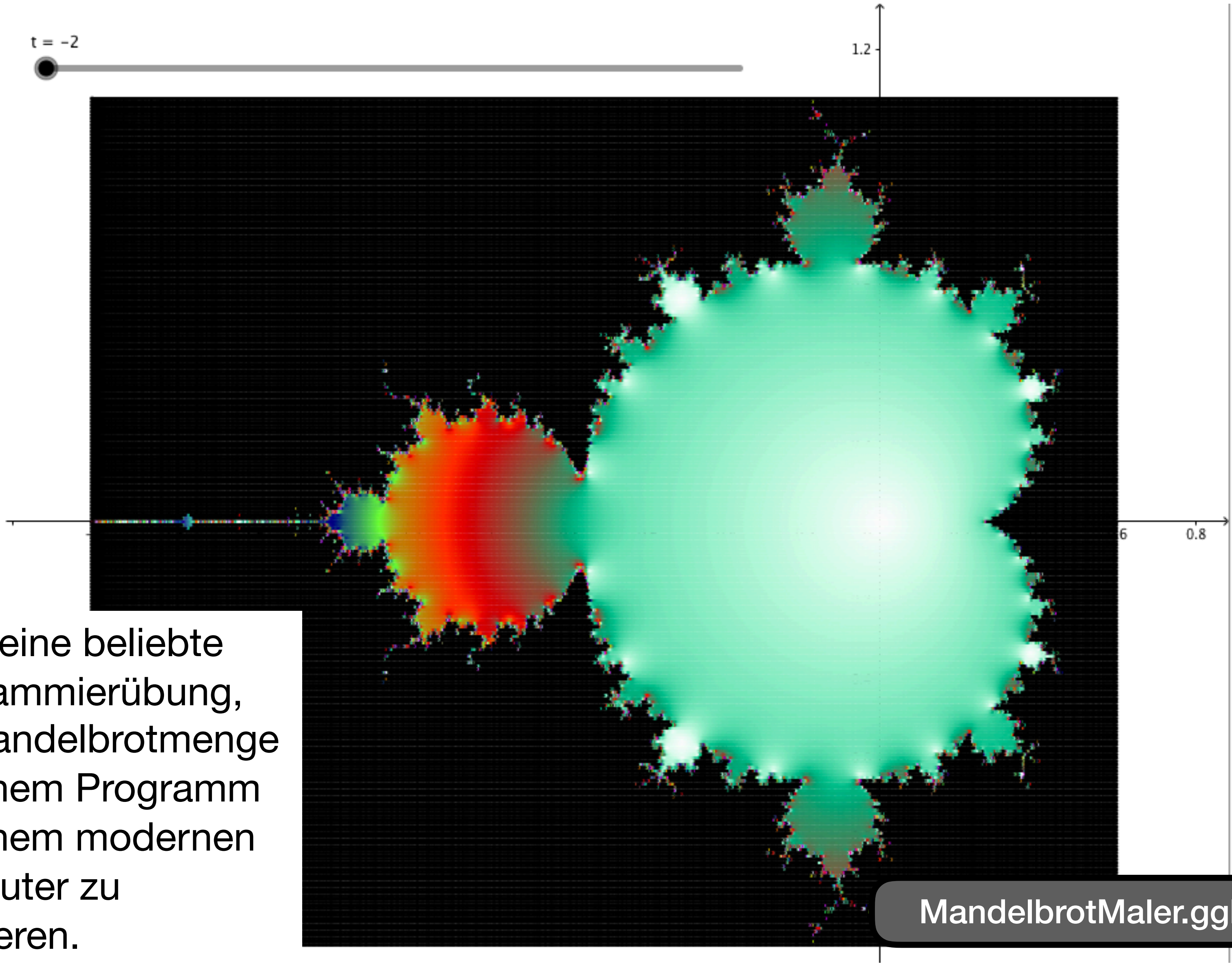
2. Die Mandelbrotmenge



„Apfelmännchen“

Der Außenbereich wird gefärbt. Alle Punkte, zu denen die Iteration nach einem Schritt den Kreis mit dem Radius 2 verlässt, bekommen die gleiche Farbe.
Für zwei Schritte verteilt man eine andere Farbe, u.s.w.

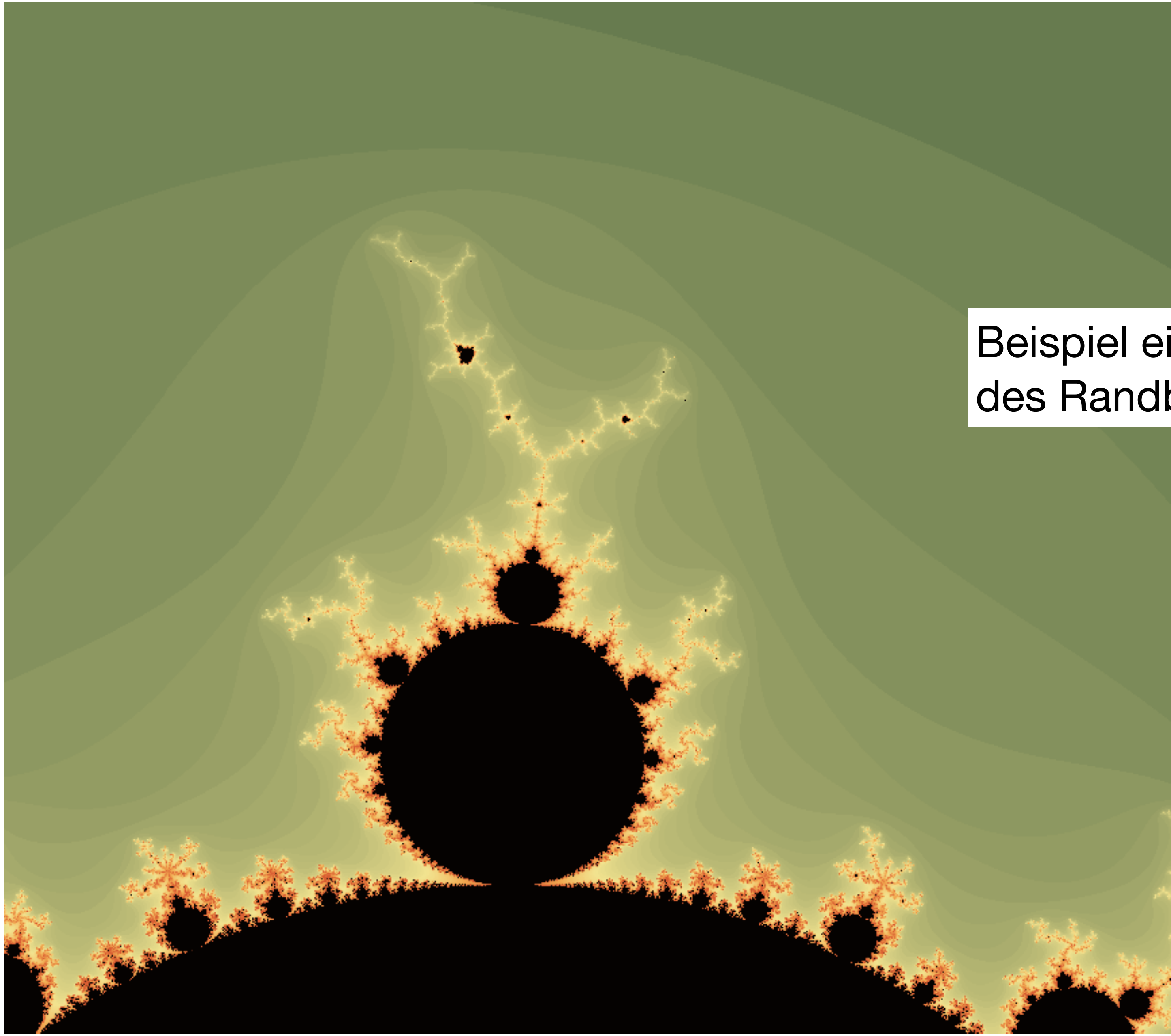
2. Die Mandelbrotmenge



Es ist eine beliebte Programmierübung, die Mandelbrotmenge mit einem Programm auf einem modernen Computer zu realisieren.

MandelbrotMaler.ggb

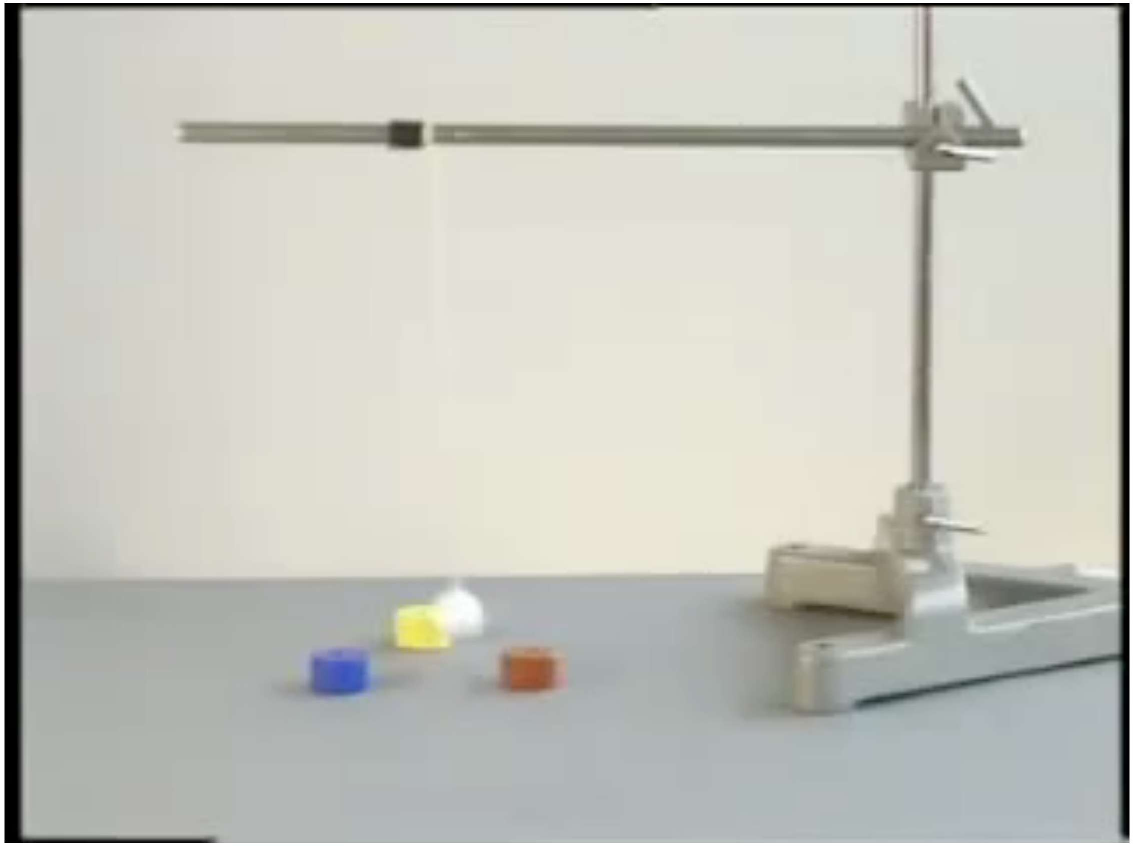
2. Die Mandelbrotmenge



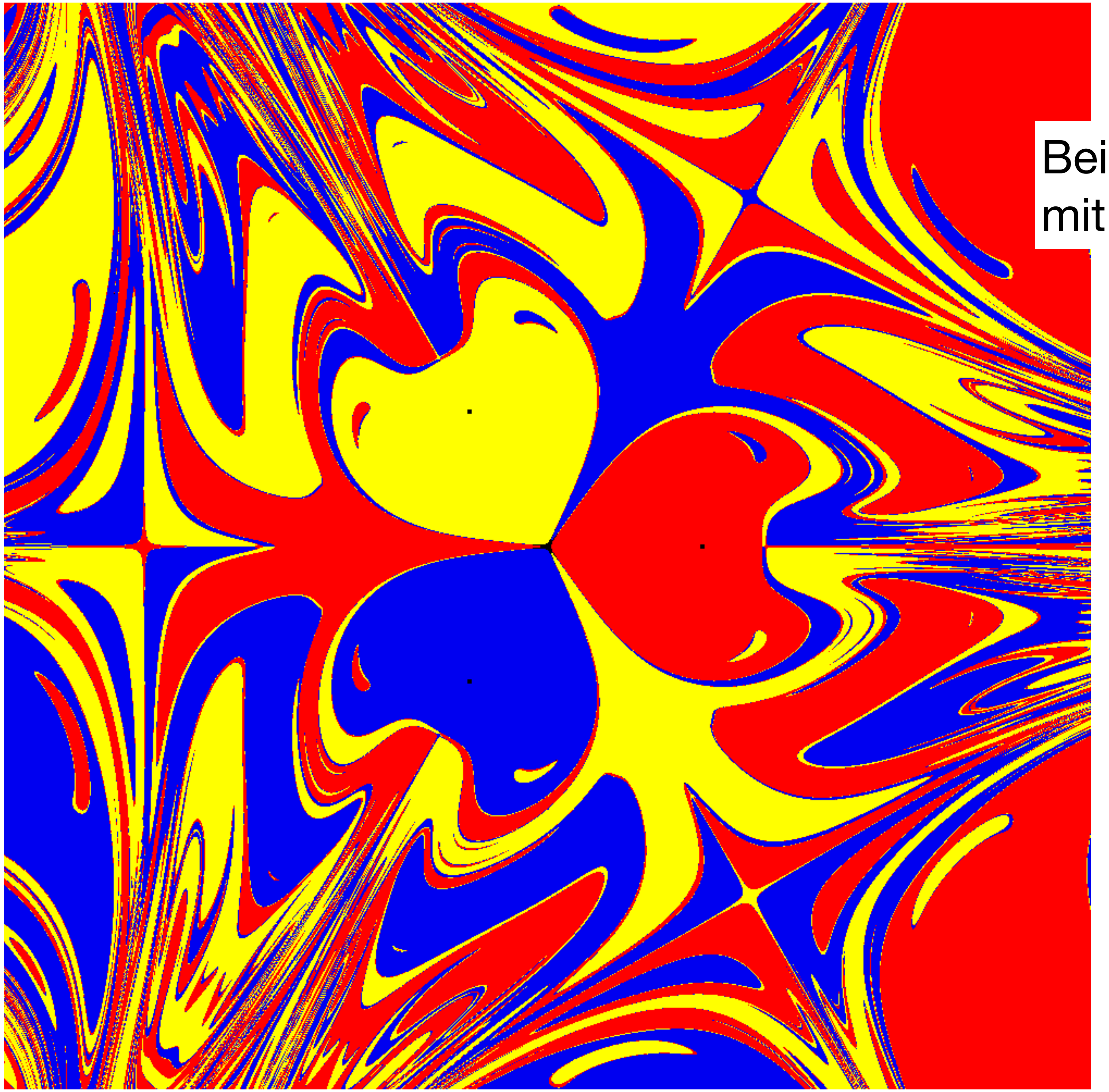
Beispiel einer Farbgestaltung des Randbereichs

iPad Frax HD

3. Das Magnetpendel



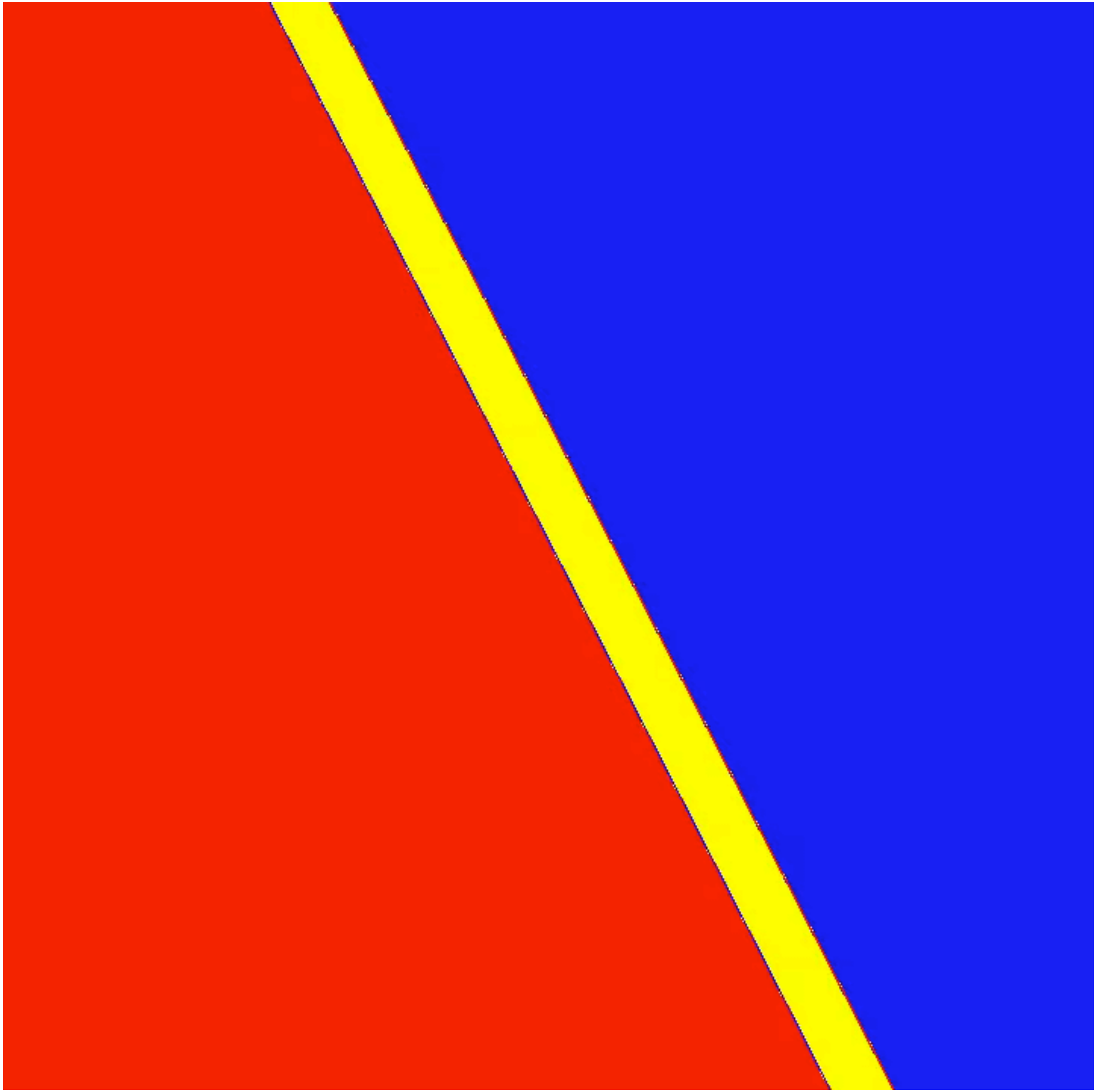
3. Das Magnetpendel



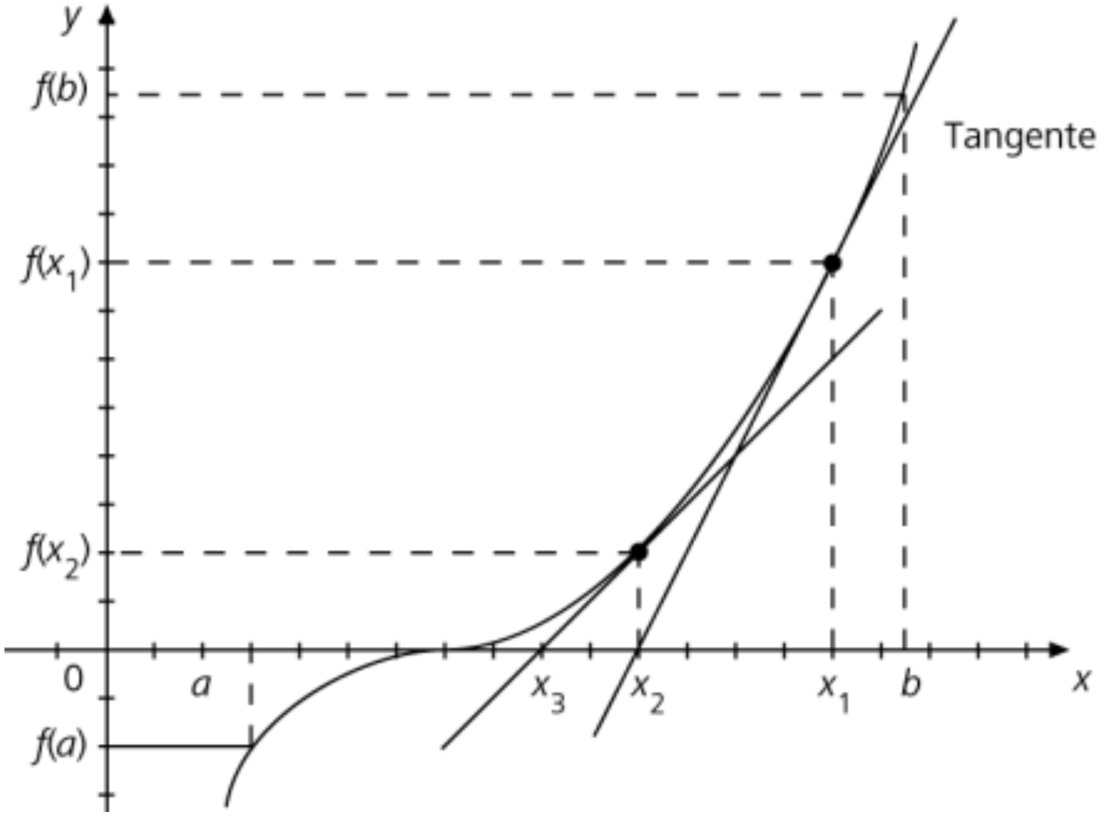
Beispiel für eine Berechnung
mit der Computersimulation

3. Das Magnetpendel

grenzenlose Gebiete



4. Newtonverfahren



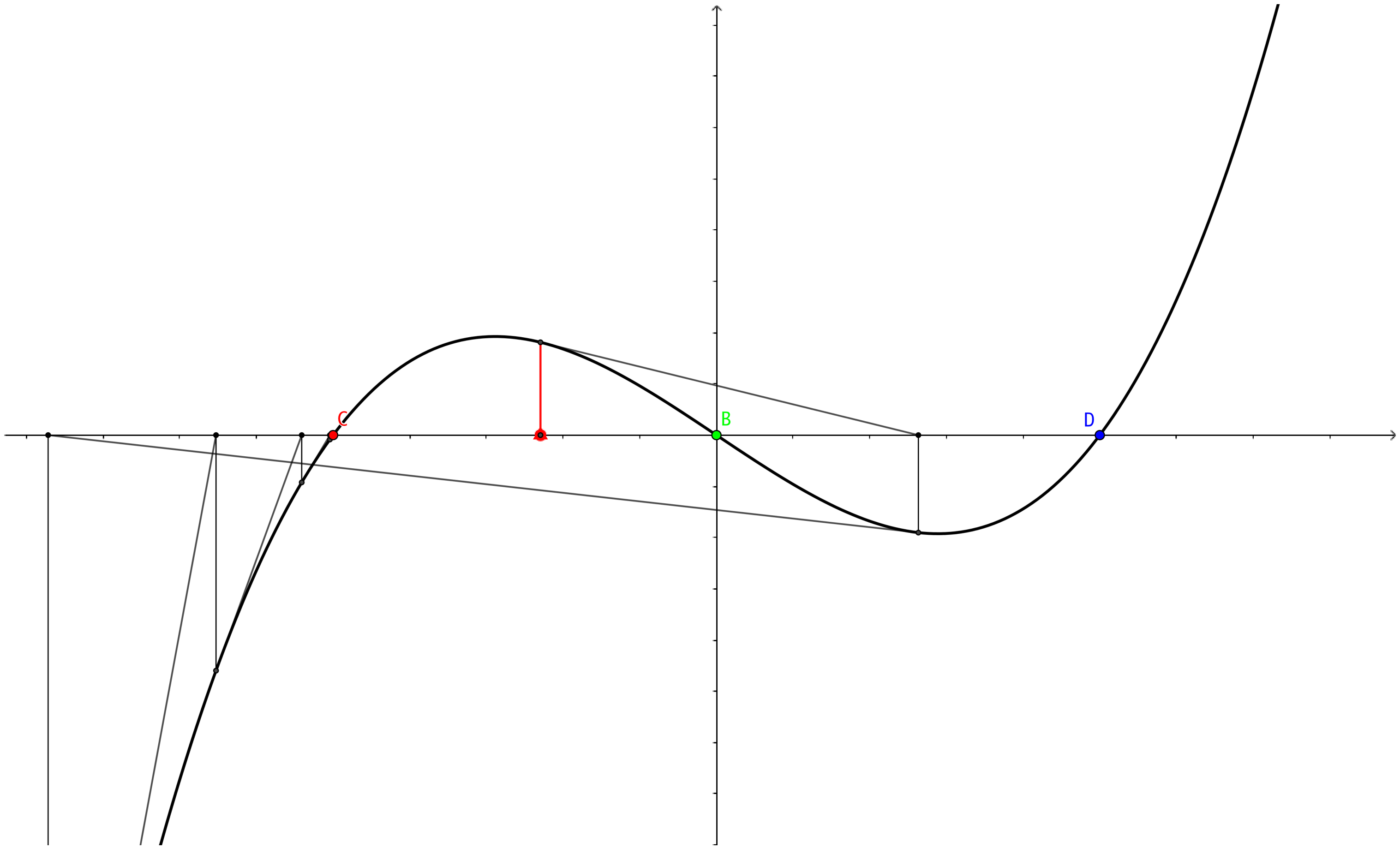
Beim Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle einer Funktion nähert man sich über die Tangente an.
Eine Iteration des Verfahrens führt oft zu genaueren Ergebnissen.

Allerdings kann dieses Iteration auch chaotisch sein.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Newtonverfahren

an der kubischen Parabel (3 Nullstellen)



NewtonReell.ggb

4. Newtonverfahren

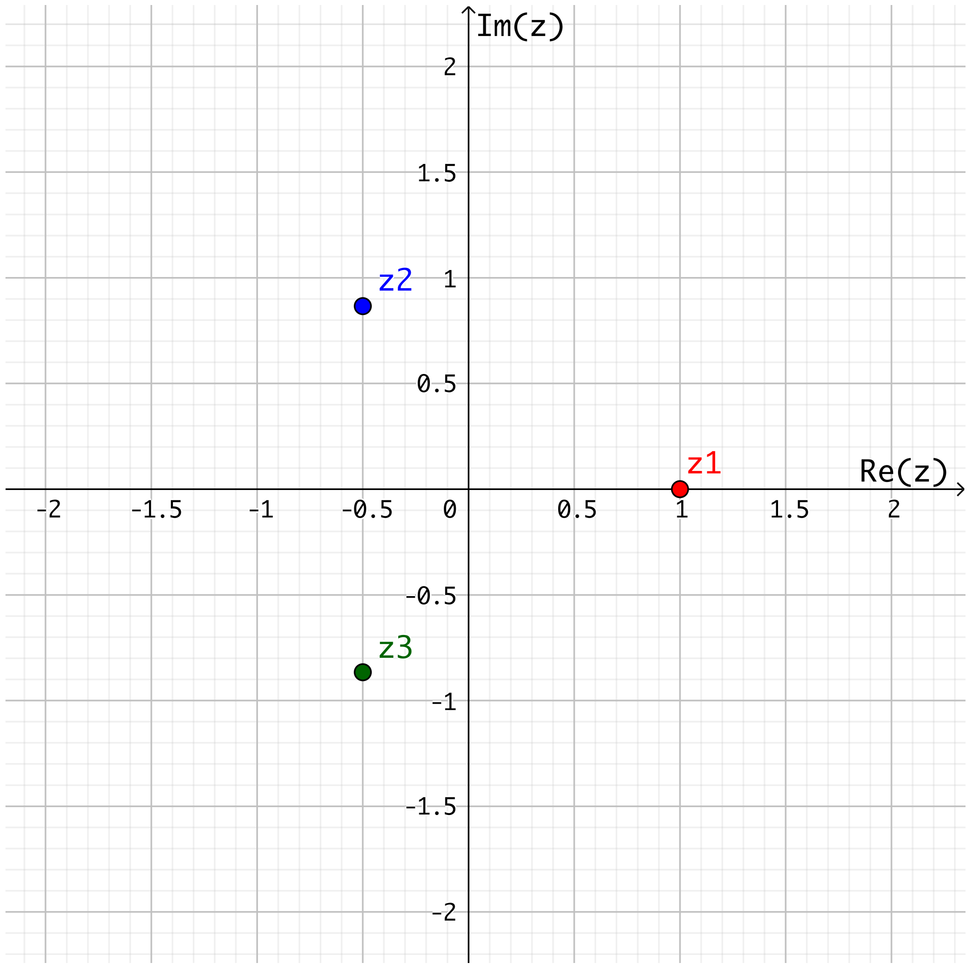
für $z^3 = 1$ mit komplexen Zahlen

Es gibt drei Lösungen für $z^3 = 1$

1) $z_1 = 1$

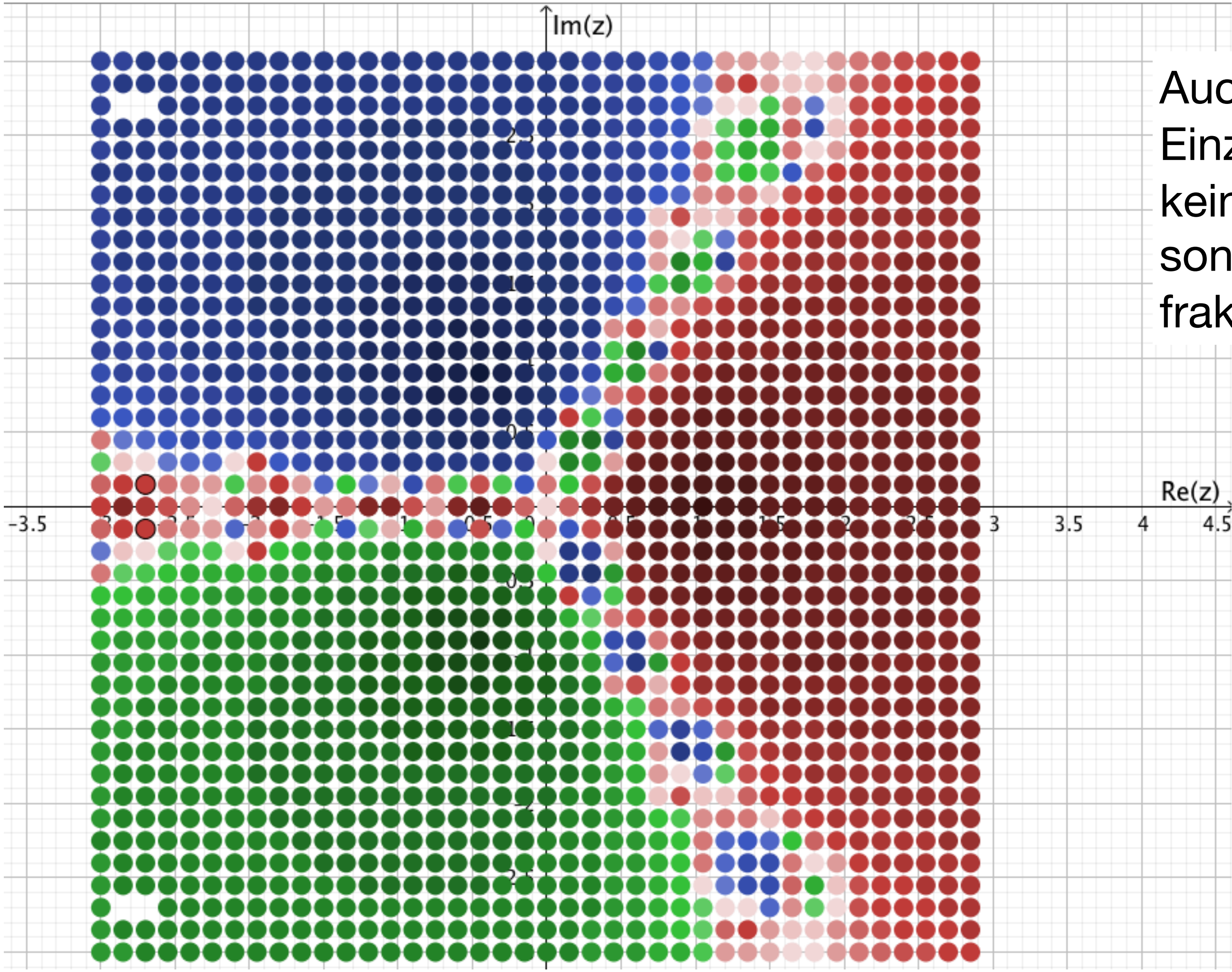
2) $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

3) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$



4. Newtonverfahren

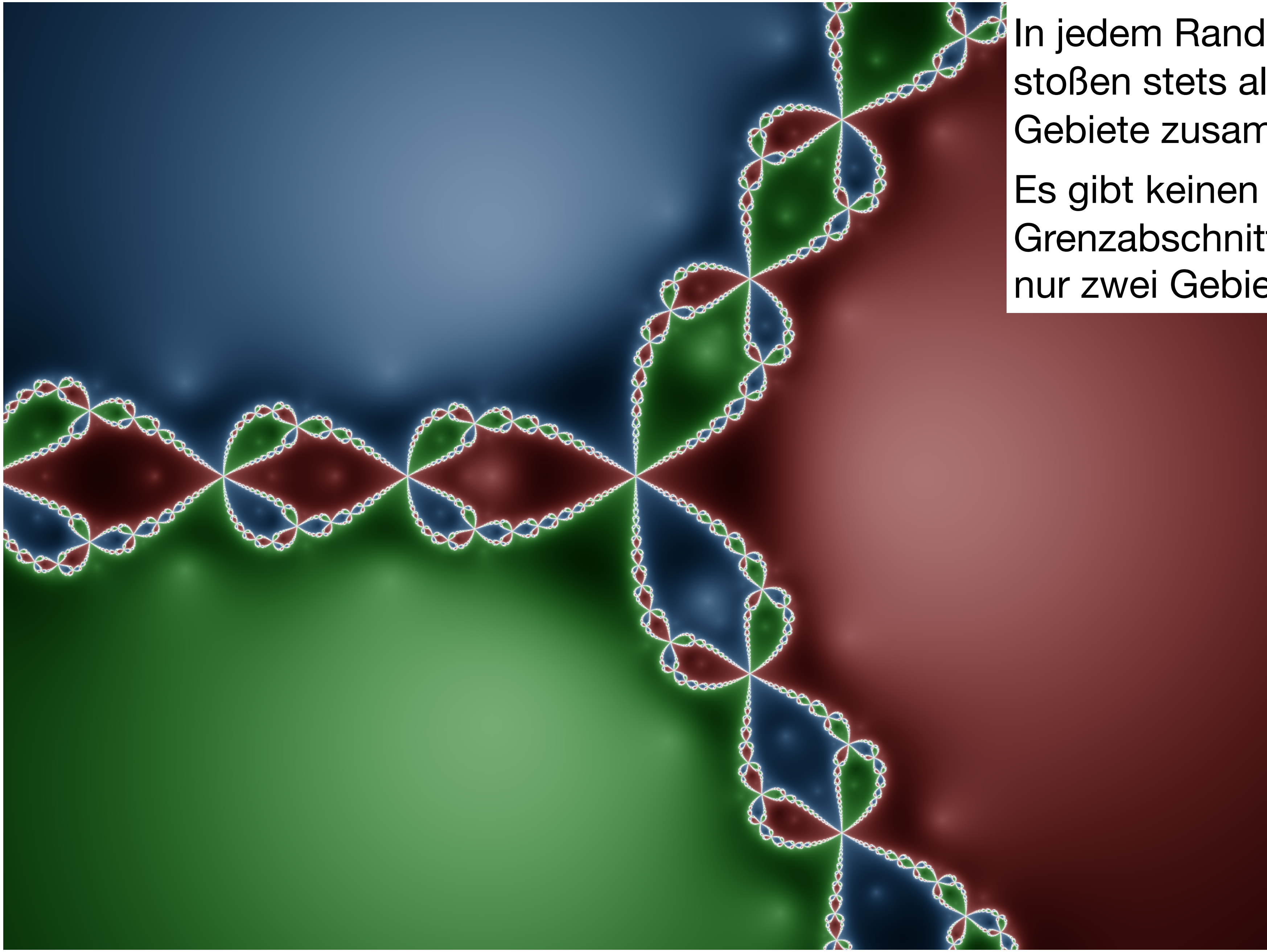
für $z^3 = 1$ mit komplexen Zahlen



Auch hier haben die Einzugsgebiete keinen glatten Rand, sondern sie sind fraktal zerklüftet.

NewtonKomplexIter.ggb

4. Newtonverfahren



In jedem Randpunkt stoßen stets alle drei Gebiete zusammen.

Es gibt keinen Grenzabschnitt für nur zwei Gebiete.