Das Baseler Problem

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=?$$

Das Baseler Problem Geschichte

1644 durch den italienischen Mathematiker Pietro Mengoli formuliert

Es versuchten sich diverse Mathematiker an dem Problem, vor allem von der Universität Basel

- 1689 Jakob Bernoulli
- Johann Bernoulli
- 1735 Lösung durch Leonard Euler

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

Das Baseler Problem numerische „Lösung“

n	1/n2	Summe
1	1,0000000000	1,0000
2	0,2500000000	1,2500
3	0,1111111111	1,3611
4	0,0625000000	1,4236
5	0,0400000000	1,4636
6	0,0277777778	1,4914
7	0,0204081633	1,5118
8	0,0156250000	1,5274
9	0,0123456790	1,5398
10	0,0100000000	1,5498
11	0,0082644628	1,5580
12	0,0069444444	1,5650
13	0,0059171598	1,5709
14	0,0051020408	1,5760
15	0,0044444444	1,5804
16	0,0039062500	1,5843
17	0,0034602076	1,5878
18	0,0030864198	1,5909
19	0,0027700831	1,5937
20	0,0025000000	1,5962
21	0,0022675737	1,5984
22	0,0020661157	1,6005
23	0,0018903592	1,6024
24	0,0017361111	1,6041
25	0,0016000000	1,6057
26	0,0014792899	1,6072
27	0,0013717421	1,6086
28	0,0012755102	1,6098
29	0,0011890606	1,6110
30	0,0011111111	1,6122
40	0,0006250000	1,6202
50	0,0004000000	1,6251
60	0,0002777778	1,6284
70	0,0002040816	1,6307
80	0,0001562500	1,6325
90	0,0001234568	1,6339
100	0,0001000000	1,6350

$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934$$

$$\sqrt[10]{145} \approx 1,64489$$

Das Baseler Problem übliche Lösungen

and by the monotone convergence theorem we get

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \int_0^1\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}\right)dx\,dy\\ &= \int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy}{1-xy}.\end{aligned}$$

We change variables in this by putting $(u,v)=((x+y)/2,(y-x)/2)$, so that $(x,y)=(u-v,u+v)$. Hence

$$\zeta(2)=2\iint_S\frac{du\,dv}{1-u^2+v^2}$$

where S is the square with vertices $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ and $(1/2,1/2)$. Exploiting the symmetry of the square we get

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 4\int_0^{1/2}\int_0^u\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2}+4\int_{1/2}^1\int_0^{1-u}\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2}\\ &= 4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\\ &\quad +4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du.\end{aligned}$$

Now $\tan^{-1}(u/(\sqrt{1-u^2}))=\sin^{-1}u$, and if $\theta=\tan^{-1}((1-u)/(\sqrt{1-u^2}))$ then $\tan^2\theta=(1-u)/(1+u)$ and $\sec^2\theta=2/(1+u)$. It follows that $u=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$ and so $\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}u=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin^{-1}u$. Hence

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 4\int_0^{1/2}\frac{\sin^{-1}u}{\sqrt{1-u^2}}du+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin^{-1}u}{2}\right)du\\ &= \left[2(\sin^{-1}u)^2\right]_0^{1/2}+\left[\pi\sin^{-1}u-(\sin^{-1}u)^2\right]_{1/2}^1\\ &= \frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}\\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Proof 6: Consider the series

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}.$$

This is uniformly convergent on the real line. Now if $\epsilon>0$, then for $t\in[\epsilon,2\pi-\epsilon]$ we have

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sin nt &= \sum_{n=1}^{N}\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\\ &= \frac{e^{it}-e^{i(N+1)t}}{2i(1-e^{it})}-\frac{e^{-it}-e^{-i(N+1)t}}{2i(1-e^{-it})}\\ &= \frac{e^{it}-e^{i(N+1)t}}{2i(1-e^{it})}+\frac{1-e^{-iNt}}{2i(1-e^{it})}\end{aligned}$$

and so this sum is bounded above in absolute value by

$$\frac{2}{|1-e^{it}|}=\frac{1}{\sin t/2}.$$

Hence these sums are uniformly bounded on $[\epsilon,2\pi-\epsilon]$ and by Dirichlet's test the sum

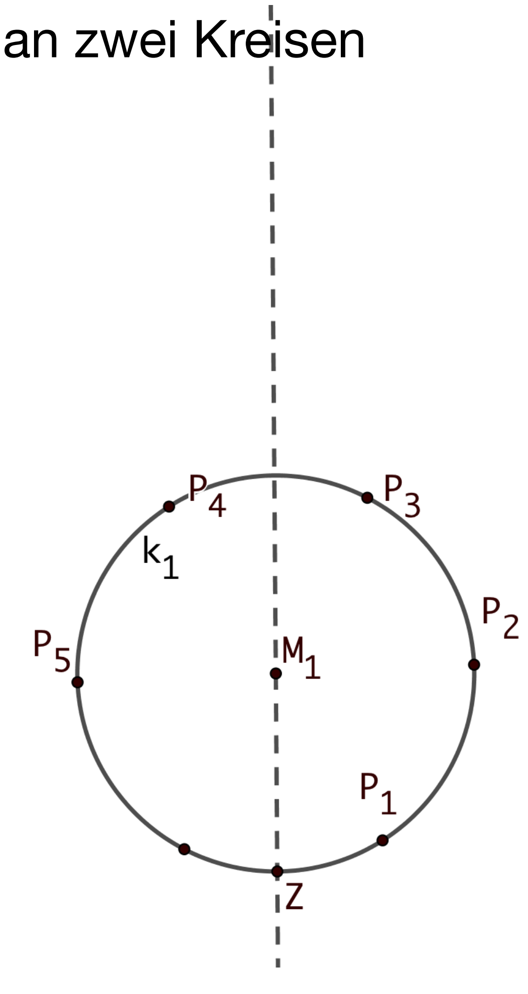
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$$

is uniformly convergent on $[\epsilon,2\pi-\epsilon]$. It follows that for $t\in(0,2\pi)$

$$\begin{aligned}f'(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}\\ &= -\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{int}}{n}\right)\\ &= \mathrm{Im}(\log(1-e^{it}))\\ &= \arg(1-e^{it})\\ &= \frac{t-\pi}{2}.\end{aligned}$$

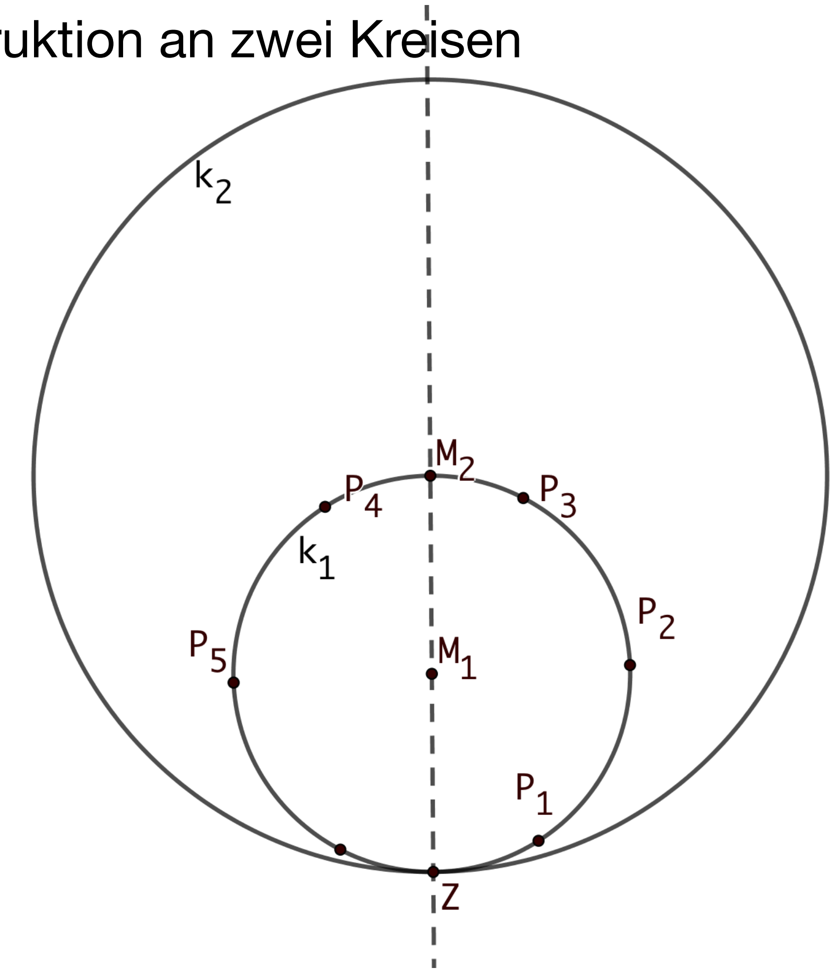
Eine geometrische Lösung
1. Vorbereitung

Eine Konstruktion an zwei Kreisen

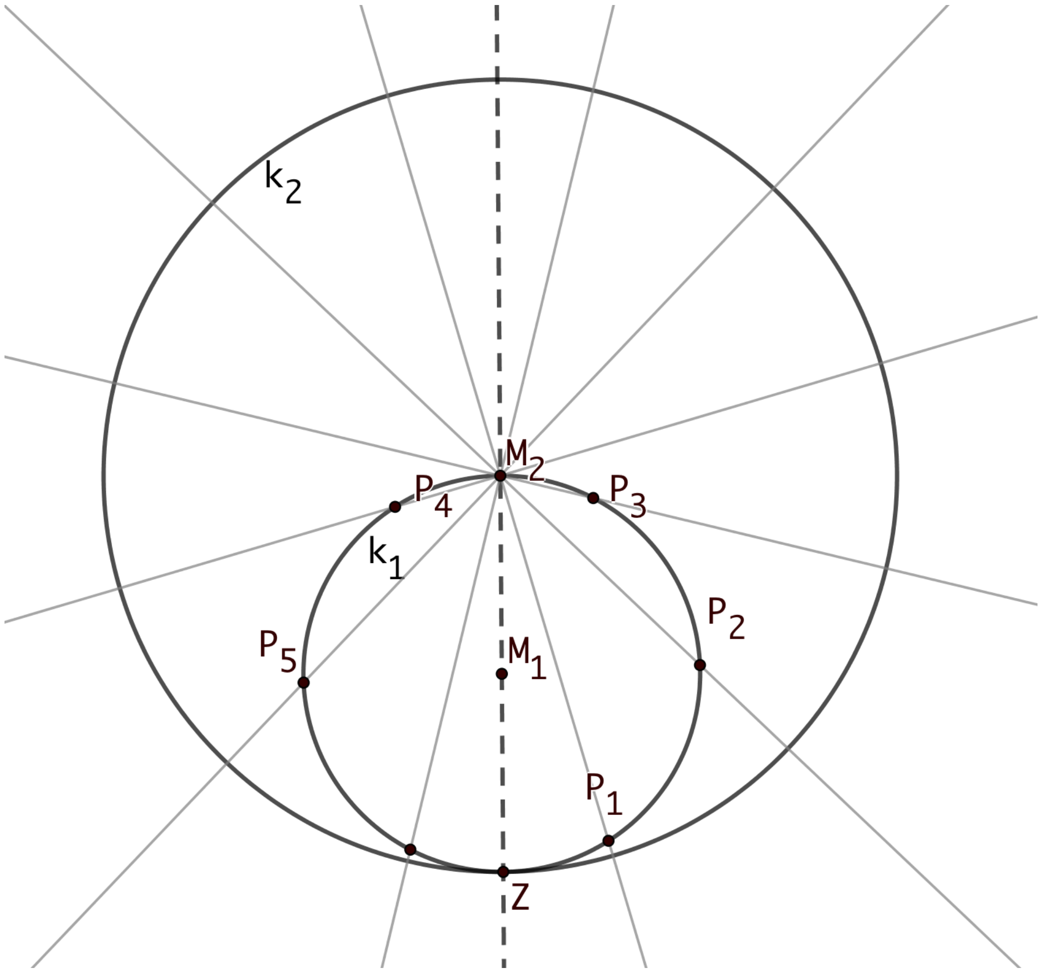


Eine geometrische Lösung
1. Vorbereitung

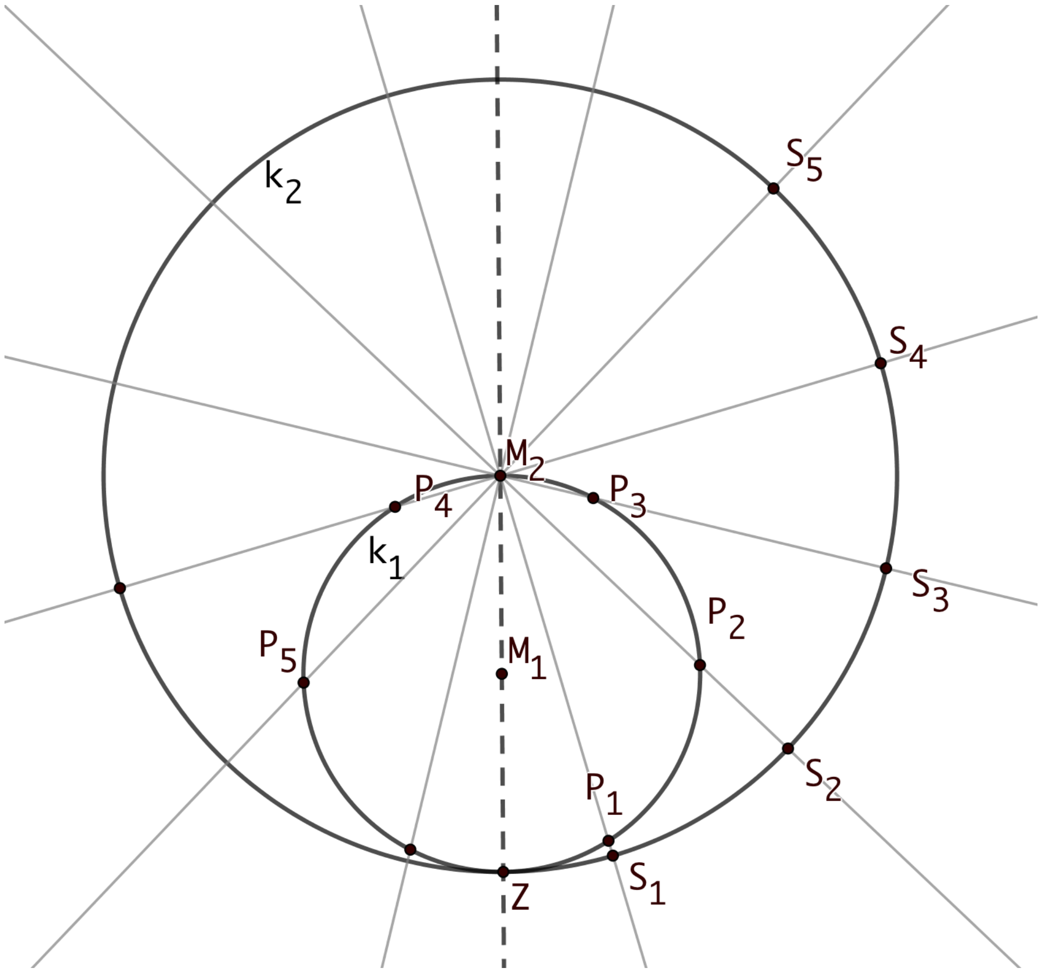
Eine Konstruktion an zwei Kreisen



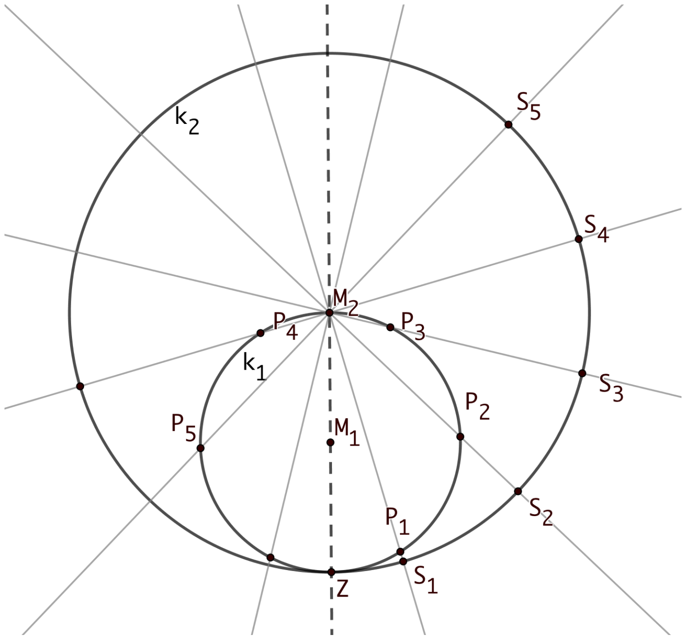
Eine geometrische Lösung
1. Vorbereitung



Eine geometrische Lösung
1. Vorbereitung



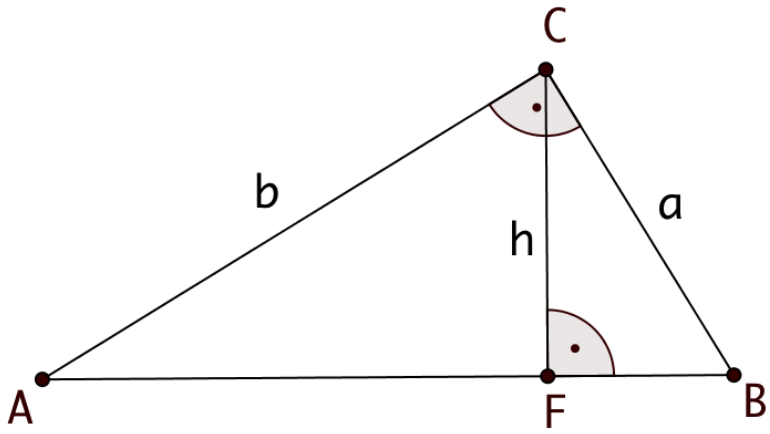
Eine geometrische Lösung
1. Vorbereitung



Die neuen Punkte S_i auf $Kreis_2$ haben folgende Eigenschaften:

1. Sie liegen ebenfalls äquidistant auf der Kreislinie 2.
2. Die Bogenlänge $\overset{\frown}{S_i S_{i+1}}$ ist genau so lang wie die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_i P_{i+1}}$.

Eine geometrische Lösung
2. Vorbereitung



Der inverse Pythagoras

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

Beweis

$$a^2+b^2=c^2$$

$$c\cdot h=a\cdot b\left(=2\cdot\text{Flächeninhalt}\right)$$

$$c^2=\frac{a^2\cdot b^2}{h^2}$$

$$a^2+b^2=\frac{a^2\cdot b^2}{h^2} \quad | \;:\left(a^2\cdot b^2\right) \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

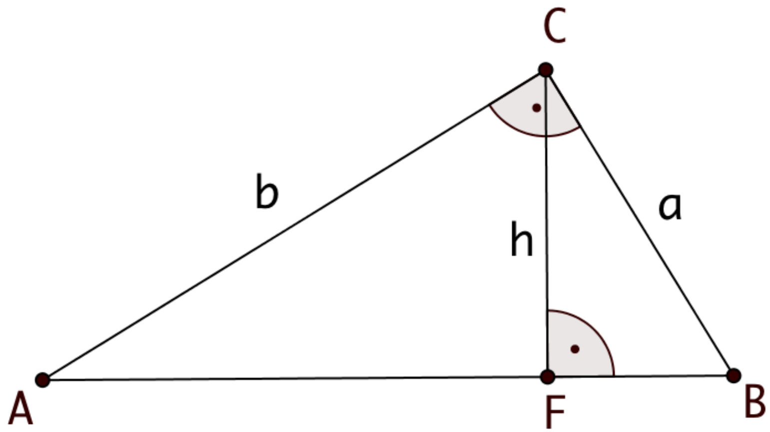
Eine geometrische Lösung
3. Vorbereitung

Ein neuer Begriff

Die Intensität eines Punktes A in Bezug auf einen Punkt B.

$$I_B(A) = \frac{1}{|AB|^2}$$

Eine geometrische Lösung 2.und 3. Vorbereitung



Der inverse Pythagoras

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

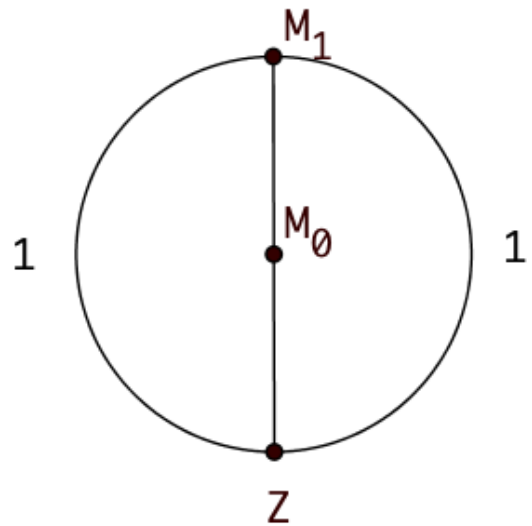
$$I_c(B)+I_c(A)=I_c(F)$$

In Worten

Die Intensität (in Bezug auf den Scheitelpunkt des rechten Winkels) des Höhenfußpunktes ist gleich der Summe der beiden Intensitäten der Endpunkte der Hypotenuse.

„Die Intensität des Höhenfußpunktes kann auf die Enden der Hypotenuse verteilt werden.“

Der Konstruktionsprozess



Wir starten mit einem Kreis um einen Punkt M_0, der den Umfang 2 hat.

Auf dem Kreis liegt ein Punkt Z, ihm genau gegenüber der Punkt M_1.

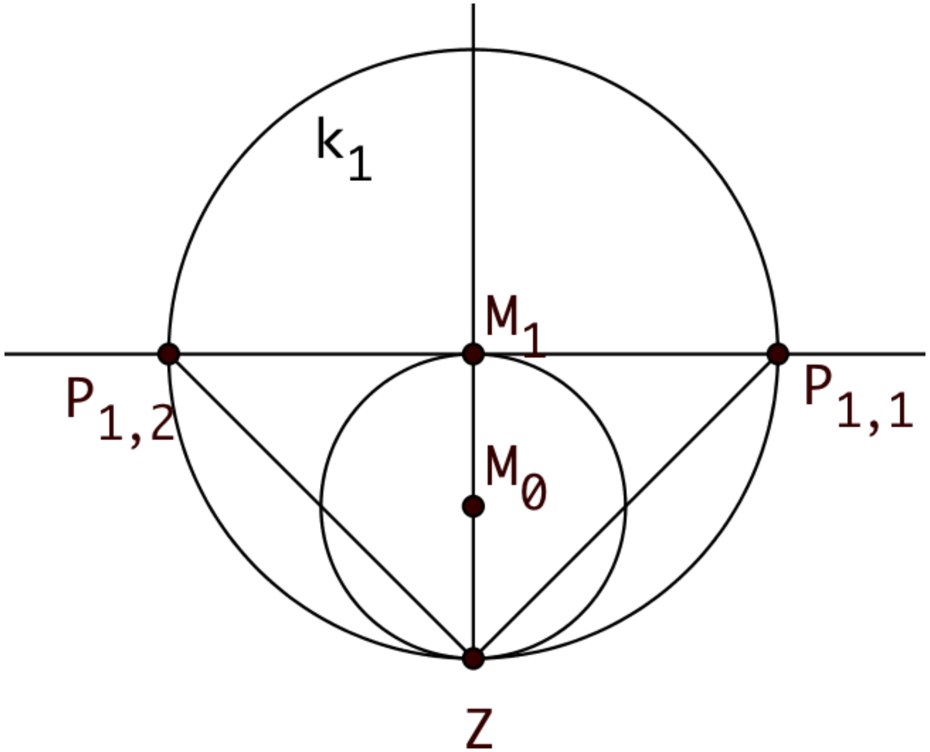
$$U = 2 = \pi d$$

$$d = \frac{2}{\pi} = \left|\mathrm{M}_1\mathrm{Z}\right|$$

Alle nachfolgenden Intensitäten werden in Bezug auf den Punkt Z berechnet. Daher lassen wir Z im Index weg.

$$I\left(\mathrm{M}_1\right) = \frac{1}{\left|\mathrm{M}_1\mathrm{Z}\right|^2} = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Der Konstruktionsprozess



Wir zeichnen um M_1 einen weiteren Kreis k_1 mit dem Radius $|M_1Z|$.

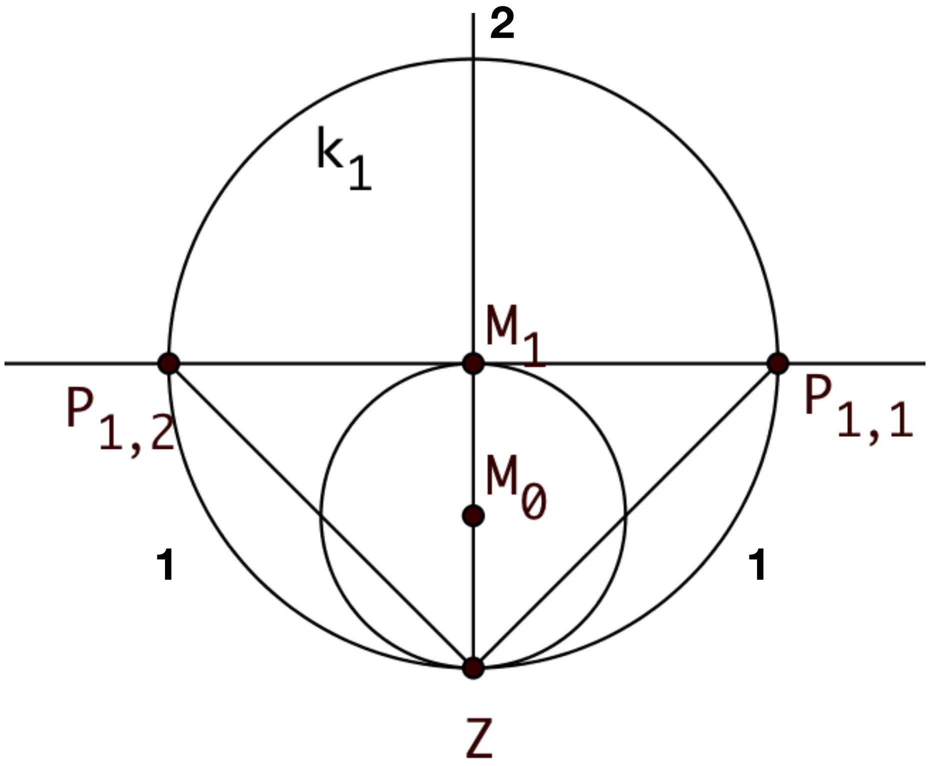
Durch M_1 zeichnen wir die Senkrechte zu ZM_1. und erhalten die Punkte $P_{1,1}$ und $P_{1,2}$.

Das Dreieck $P_{1,1}P_{1,2}Z$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei Z. (Satz des Thales)

M_1 ist der Höhenfußpunkt in diesem Dreieck. Also kann die Intensität von M_1 auf die beiden Punkte $P_{1,1}$ und $P_{1,2}$ verteilt werden.

$$I\left(\mathrm{M}_1\right) = \frac{\pi^2}{4} = I\left(\mathrm{P}_{1,1}\right) + I\left(\mathrm{P}_{1,2}\right)$$

Der Konstruktionsprozess



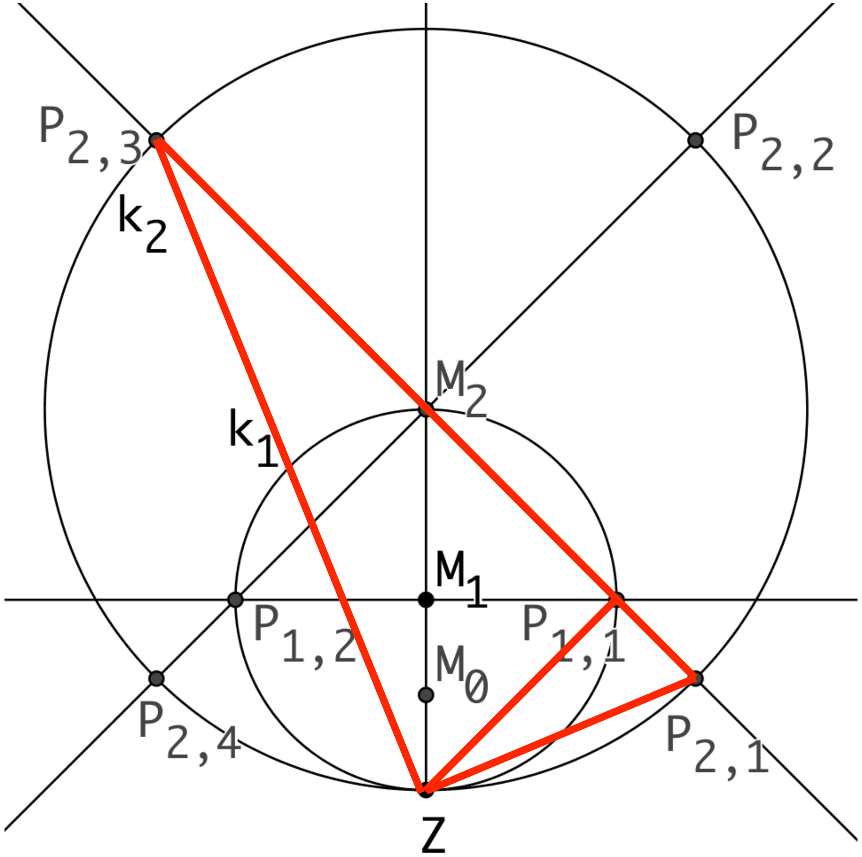
$$I\left(M_1\right)=\frac{\pi^2}{4}=I\left(P_{1,1}\right)+I\left(P_{1,2}\right)$$

Der Kreis k_1 ist doppelt so groß wie k_0, hat also den Umfang 4.

Die Bögen zwischen den Punkten haben dann, wie angegeben, die Längen

$$\overset{\frown}{ZP_{1,1}}=1 \qquad \overset{\frown}{P_{1,1}P_{1,2}}=2 \qquad \overset{\frown}{P_{1,2}Z}=1$$

Der Konstruktionsprozess



Wir zeichnen um M_2 einen weiteren Kreis k_2 mit dem Radius $|M_2Z|$.

Die Gerade $M_2P_{1,1}$ erzeugt auf k_2 die Punkte $P_{2,1}$ und $P_{2,3}$ und die Gerade $M_2P_{1,2}$ die Punkte $P_{2,2}$ und $P_{2,4}$.

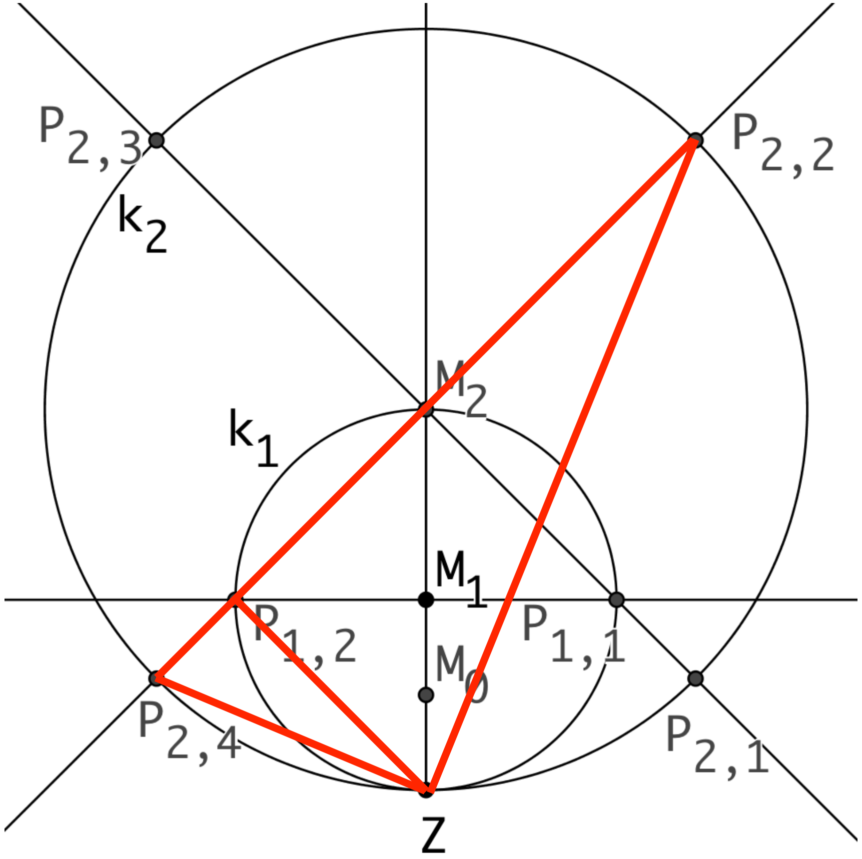
Das Dreieck $P_{2,1}P_{2,3}Z$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei Z. (Satz des Thales)

$P_{1,1}$ ist der Höhenfußpunkt in diesem Dreieck.

Also kann die Intensität von $P_{1,1}$ auf die beiden Punkte $P_{2,1}$ und $P_{2,3}$ verteilt werden.

$$I\left(\mathrm{P}_{1,1}\right)=I\left(\mathrm{P}_{2,1}\right)+I\left(\mathrm{P}_{2,3}\right)$$

Der Konstruktionsprozess



Analog ist das Dreieck $P_{2,2}P_{2,4}Z$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei Z. (Satz des Thales)

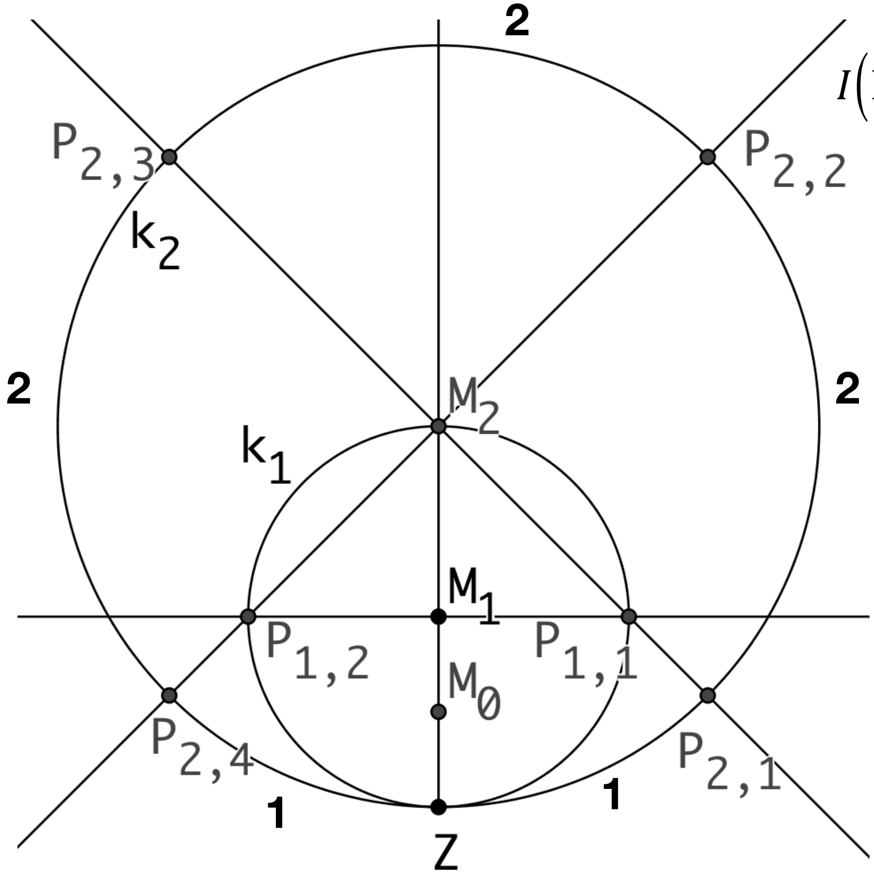
$P_{1,2}$ ist der Höhenfußpunkt in diesem Dreieck.

Also kann die Intensität von $P_{1,2}$ auf die beiden Punkte $P_{2,2}$ und $P_{2,4}$ verteilt werden.

$$I\left(\mathrm{P}_{1,2}\right)=I\left(\mathrm{P}_{2,2}\right)+I\left(\mathrm{P}_{2,4}\right)$$

Also gilt insgesamt $$I\left(\mathrm{P}_{1,1}\right)+I\left(\mathrm{P}_{1,2}\right)=I\left(\mathrm{P}_{2,1}\right)+I\left(\mathrm{P}_{2,3}\right)+I\left(\mathrm{P}_{2,2}\right)+I\left(\mathrm{P}_{2,4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

Der Konstruktionsprozess



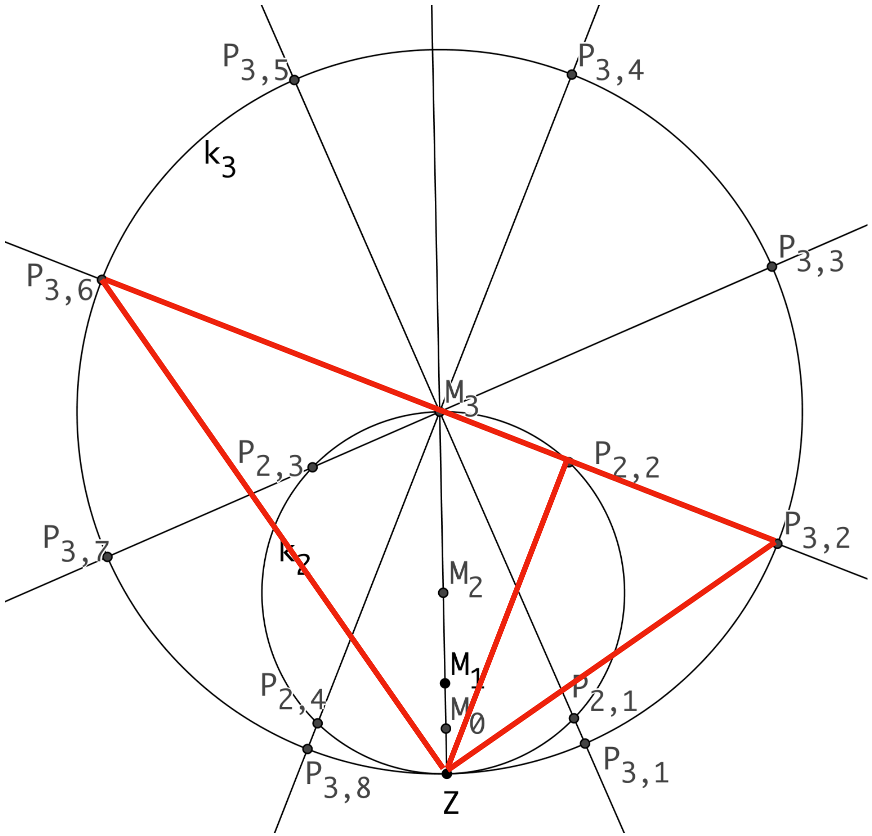
$$I(\mathrm{P}_{1,1})+I(\mathrm{P}_{1,2})=I(\mathrm{P}_{2,1})+I(\mathrm{P}_{2,3})+I(\mathrm{P}_{2,2})+I(\mathrm{P}_{2,4})=\frac{\pi^2}{4}$$

Der Kreis k_2 ist doppelt so groß wie k_1, hat also den Umfang 8.

Die Bögen zwischen den Punkten haben dann, wie angegeben, die Längen

$$\overset{\frown}{\mathrm{ZP}_{2,1}}=1 \qquad \overset{\frown}{\mathrm{P}_{2,1}\mathrm{P}_{2,2}}=2 \qquad \overset{\frown}{\mathrm{P}_{2,2}\mathrm{P}_{2,3}}=2 \qquad \overset{\frown}{\mathrm{P}_{2,3}\mathrm{P}_{2,4}}=2 \qquad \overset{\frown}{\mathrm{P}_{2,4}\mathrm{Z}}=1$$

Der Konstruktionsprozess



Analoges gilt für jeden Punkt $P_{2,...}$ auf k_2.

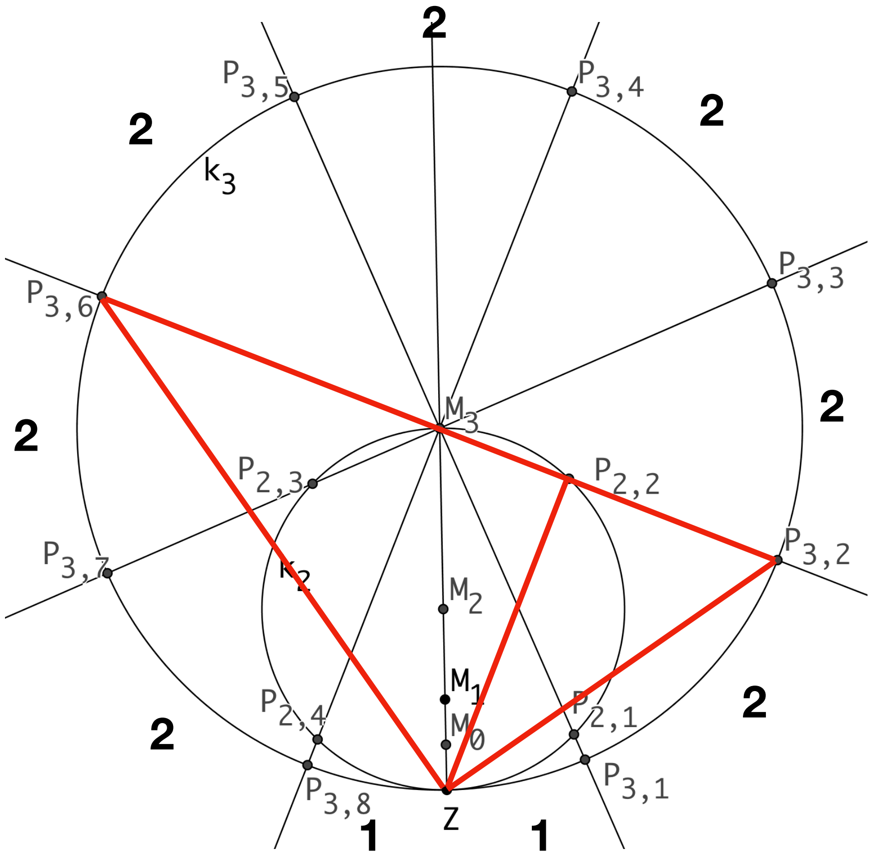
Wir zeichnen um M_3 einen weiteren Kreis k_3 mit dem Radius $|M_3Z|$.

Wir ziehen die Geraden $M_3P_{2,...}$. Sie erzeugen auf k_3 die Punkte $P_{3,...}$.

Beispiel:
Das Dreieck $P_{3,2}P_{3,6}Z$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei Z. (Satz des Thales)

$P_{2,2}$ ist der Höhenfußpunkt in diesem Dreieck. Also kann die Intensität von $P_{2,2}$ auf die beiden Punkte $P_{3,2}$ und $P_{3,6}$ verteilt werden.

Der Konstruktionsprozess



Also können die Intensitäten aller Punkte auf k_2 auf die entsprechenden Punkte auf k_3 verteilt werden.

Es gibt zwei Konstanten in diesem schrittweisen Konstruktionsprozess:

Die Summe aller Intensitäten aller Punkte auf einem Kreis bleibt $\frac{\pi^2}{4}$.

Entsprechend der Vorbereitung 1 liegen die Punkte auf einem Kreis äquidistant und die Bögen haben konstant die Länge 2.

Der Grenzübergang r → ∞

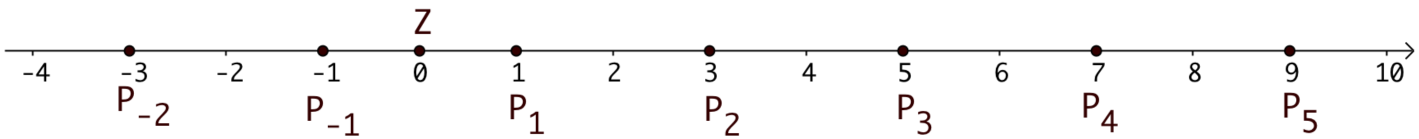
Im Grenzübergang erhält man einen unendlich großen Kreis durch Z, also eine Gerade durch Z.

Wegen der konstanten Bogenlängen 1, 2, 2, … liegen die Punkte auf der Geraden im Abstand 1, 3, 5, 7, … zu beiden Seiten von Z.

Die Summe aller Intensitäten aller Punkte ist weiterhin $\frac{\pi^2}{4}$.

$$\left(I\left(\mathrm{P}_1\right)+I\left(\mathrm{P}_2\right)+I\left(\mathrm{P}_3\right)+I\left(\mathrm{P}_4\right)+\ldots\right)+\left(I\left(\mathrm{P}_{-1}\right)+I\left(\mathrm{P}_{-2}\right)+I\left(\mathrm{P}_{-3}\right)+I\left(\mathrm{P}_{-4}\right)+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

Wegen der Symmetrie gilt $\left(I\left(\mathrm{P}_1\right)+I\left(\mathrm{P}_2\right)+I\left(\mathrm{P}_3\right)+I\left(\mathrm{P}_4\right)+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}$



Der Grenzübergang r → ∞

$$\left(I\left(P_1\right)+I\left(P_2\right)+I\left(P_3\right)+I\left(P_4\right)+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}$$

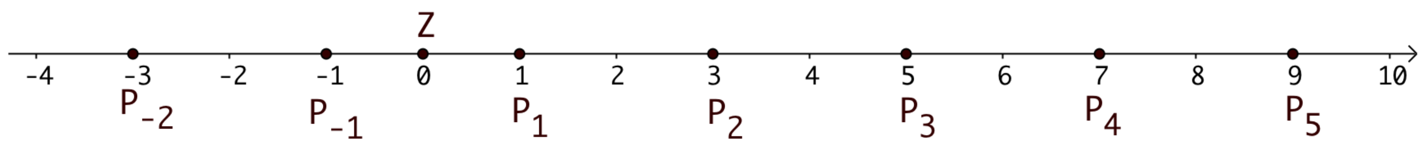
Die Intensitäten können nun explizit bestimmt werden.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}\quad=S_u$$

Nennen wir diese Summe S_u

Das Ziel unserer Betrachtung ist

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$



Der Grenzübergang r → ∞

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots \qquad S_u=\frac{\pi^2}{8}$$

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=S_u+S_g$$

$$S_g=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{1}{4}S$$

Also

$$S=S_u+S_g=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{4}S=\frac{\pi^2}{8} \quad\Rightarrow\quad S=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}$$

$$S=\frac{\pi^2}{6}$$