Reimund Albers

Einführung in logistisches Wachstum
Mit Arbeitsanweisungen für GeoGebra

Logistisches Wachstum ist ein exponentielles Wachstum, das durch eine Obergrenze begrenzt ist. Dadurch sind Wachstumsmodellierungen realistischer als ein reines, exponentielles Wachstum.
Beginnen wir mit einer realitätsnahen und zudem aktuellen Situation.

1. Aufstellen des mathematischen Modells

Grippewelle im Schullandheim

Die Klasse 9c fährt in ein großes Schullandheim, in dem noch zwei weitere Klassen sind, genau 100 Personen leben nun für eine Woche unter einem Dach. Leider hat einer der Schüler der 9c eine ansteckende Grippe, und da alle zusammen essen, wandern und spielen, bleibt es nicht aus, dass weitere Kinder angesteckt werden. Dieses Ausbreiten der Grippe wollen wir mathematisch nachbilden und die Rechnungen und eine grafische Realisierung mit einem GeoGebra-Arbeitsblatt durchführen.

Aufstellen des Modells

Die Anzahl der erkrankten Schülerinnen und Schüler bezeichnen wir mit x. Wir wollen die Entwicklung dieser Anzahl in Zeitabständen von jeweils einem Tag untersuchen und verwenden daher folgende Bezeichnung: x_i steht für die Erkrankten am i-ten Tag. Also ist ganz konkret x_4 die Zahl der Erkrankten am 4. Tag. x_0 ist die Zahl der erkrankten Schüler am Anfang unserer Betrachtung, also $x_0 = 1$. Dann ist die Grundüberlegung für die Ausbreitung der Grippe, dass die Zahl der Kranken x_n an einem Tag die Zahl der Kranken x_{n-1} vom Vortag ist plus den Neuerkrankungen N.
Als Formel kurz: $x_n = x_{n-1} + N$.
Für die Berechnung der Neuerkrankungen ist einsichtig, dass es um so mehr geben wird, je größer die Zahl der bereits Erkrankten ist. Im einfachsten Fall können wir für diese "Je mehr, desto mehr"-Beziehung eine Proportionalität annehmen, es gilt also zunächst $N \sim x_{n-1}$. Diese Annahme ist die Grundlage für exponentielles Wachstum.
Andererseits hängt es aber auch davon ab, wieviel gesunde Menschen es gibt. Z.B. wird es keine Neuerkrankungen geben können, wenn es keine Gesunden mehr gibt, die angesteckt werden können. Auch hier nehmen wir für die Beziehung „Je mehr Gesunde es gibt, desto mehr Neuerkrankungen gibt es“ eine Proportionalität an. Da es 100 Menschen insgesamt im Schullandheim gibt ist $100 - x_{n-1}$ die Zahl der Gesunden. Also lautet unsere zweite Proportionalität: $N \sim (100 - x_{n-1})$.
Setzen wir beide Proportionalitäten zusammen und führen den Proportionalitätsfaktor k ein, so erhalten wir die Gleichung $N = k \cdot x_{n-1} \cdot (100 - x_{n-1})$. Zur Berechnung des Proportionalitätsfaktors k nehmen wir an, dass der erste erkrankte Schüler am ersten Tag zwei Personen neu ansteckt, also haben wir $N = 2$ und $x_{n-1} = x_0 = 1$. Damit lautet die Gleichung $2 = k \cdot 1 \cdot 99$, was auf $k \approx 0{,}02$ führt. Nun ist unsere Modellierung abgeschlossen. Wir setzen unsere Formel für die Berechnung der Neuerkrankten N in unsere Grundgleichung $x_n = x_{n-1} + N$ ein und erhalten so als Gleichung für die Entwicklung der Erkrankten:

$$x_n = x_{n-1} + 0{,}02 \cdot x_{n-1} \cdot (100 - x_{n-1})$$

Für die Berechnung der Erkrankten am 1. Tag, also für n = 1 erhalten wir:
$x_1 = x_0 + 0{,}02 \cdot x_0 \cdot (100 - x_0) = 1 + 0{,}02 \cdot 99 = 2{,}98$
Da es hier um eine theoretische Betrachtung handelt, berücksichtigen wir einige Stellen nach dem Komma und rechnen damit auch weiter.

Aufgaben:

1. Berechne mit dem Taschenrechner die nächsten Werte x_2, x_3, x_4, ... so lange, bis 100 erreicht ist (zur Erinnerung: es sind insgesamt 100 Leute im Schullandheim).
2. Die Entwicklung der Kranken ist bei der Rechnung mit k = 0,02 recht stürmisch. Wiederhole die Entwicklung der Kranken mit der Veränderung k = 0,01. Starte wieder mit x_0 = 1.

Lösungen:
1. auf 2 Stellen gerundet
x_1 = 2,98 , x_2 = 8,76 , x_3 = 24,75 , x_4 = 62,00 , x_5 = 109,12

2. auf 2 Stellen gerundet
x_1 = 1,99 , x_2 = 3,94 , x_3 = 7,73 , x_4 = 14,85 , x_5 = 27,50 , x_6 = 47,44 , x_7 = 72,37 , x_8 = 92,37
x_9 = 99,42 , x_{10} = 99,99 , x_{11} = 100

Vergleicht man beide Zahlenfolgen, so sieht man, dass der kleinere Wert für k (Aufg.2) die Zahl der Kranken deutlich langsamer anwachsen lässt. In k steckt also ein Maß, wie schnell/langsam sich die Krankheit ausbreitet oder ansteckend ist.

Mathematischer Hintergrund: Rekursiv definierte Zahlenfolgen

Die obige Formel für die Entwicklung der Anzahl der Kranken
$x_n = x_{n-1} + 0{,}02 \cdot x_{n-1} \cdot (100 - x_{n-1})$ ist ein typisches, wenn auch schon recht kompliziertes Beispiel für eine rekursiv definierte Zahlenfolge. Wir wollen eine Abfolge von Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, ...berechnen und haben neben der Formel für x_n einen Startwert, genannt x_0. Mit diesem Start können wir die nächste Zahl der Folge, x_1, berechnen. Wenn wir x_1 kennen, sind wir in der Lage, wieder mit der Formel x_2 zu berechnen u.s.w. Man kommt damit erfolgreich voran, kann aber keine großen Sprünge machen. Wenn wir z.B. in einer rekursiv definieren Zahlenfolge x_{30} ausrechnen wollen, müssen wir uns schrittweise von x_0 über x_1, x_2, ... bis x_{30} voranarbeiten.