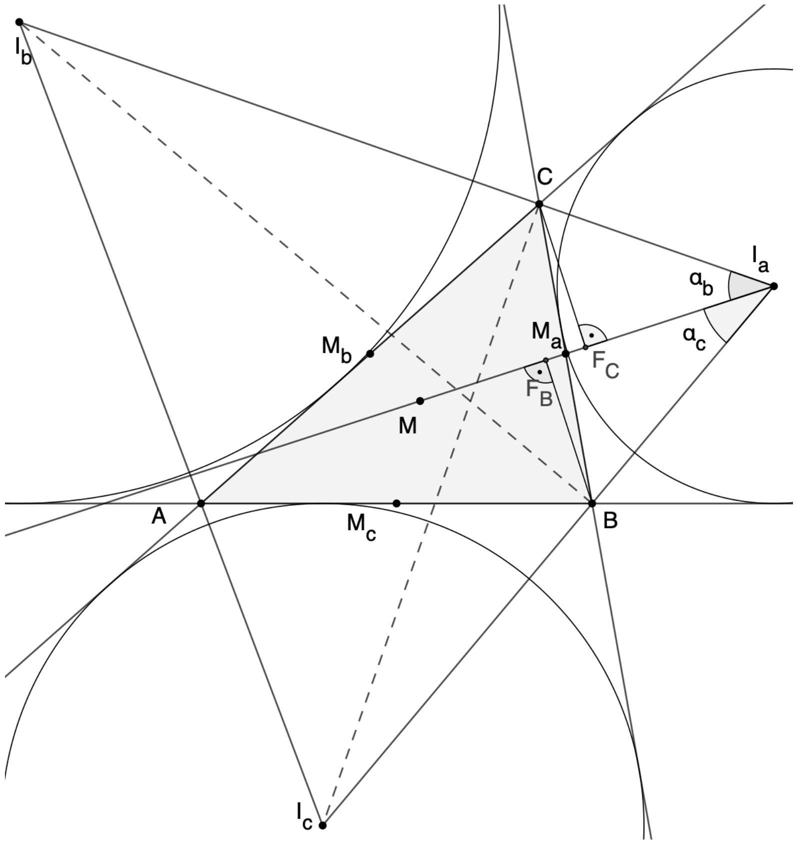
Behauptung

Die den Mittenpunkt definierenden Geraden schneiden sich in einem Punkt.



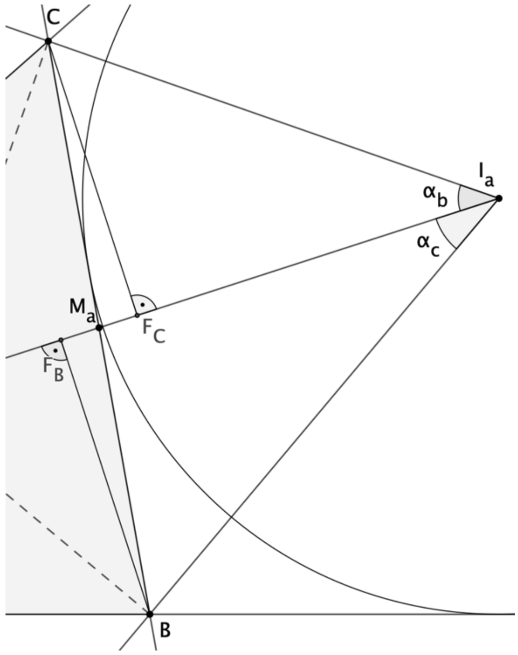
Beweisskizze

In der Umkehrung des Satzes von Ceva in trigonometrischer Form werden die charakteristischen Brüche mit den Sinus der Teilwinkel umgeformt. Die Gleichung erweist sich dann als Satz von Ceva für die Höhen.

Beweis

Für den Beweis werden folgende Hilfslinien und Beschriftungen eingeführt.

Die wesentliche Bezugsfigur ist das Dreieck $I_aI_bI_c$. In Bezug auf dieses sind die Linien I_bB und I_cC (gestrichelt) Höhen und das Ausgangsdreieck ABC ist das Höhenfußpunktdreieck. M ist der Mittenpunkt des Dreiecks $I_aI_bI_c$. Dafür ist die Gerade I_aM_a eine Ecktransversale, die den Winkel mit dem Scheitelpunkt I_a in zwei Teilwinkel zerteilt, α_b und α_c. Für diese Winkel sind in der Umkehrung des Satzes von Ceva die Sinus maßgeblich. Für deren geometrische Umsetzung werden von B und C die Lote auf I_aM_a gefällt. Die Fußpunkte sind F_B und F_C.



$$\sin\alpha_b = \frac{|F_CC|}{|CI_a|} \qquad \sin\alpha_c = \frac{|F_BB|}{|BI_a|}$$

Die Dreiecke M_aF_CC und M_aF_BB sind kongruent, da $|M_aC| = |M_aB|$ und die rechten Winkel und die Scheitelwinkel bei M_a gleich groß sind. Folglich gilt auch $|F_CC| = |F_BB|$.

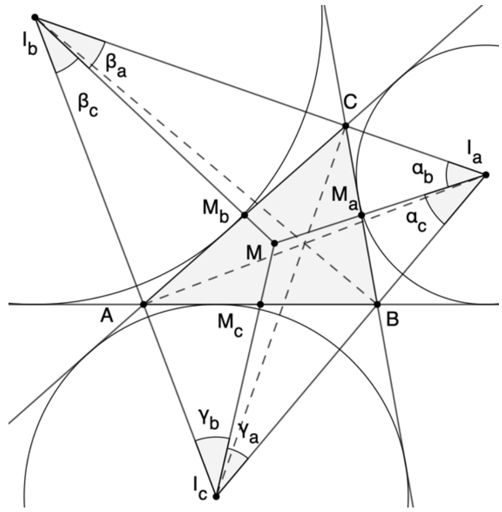
Damit gilt $\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_c} = \frac{|F_C C|}{|CI_a|} \cdot \frac{|BI_a|}{|F_B B|} = \frac{|BI_a|}{|CI_a|}$.

Analog ergibt sich für die anderen, durch die Ecktransversalen zum Mittenpunkt erzeugten Teilwinkel:

$\frac{\sin\beta_c}{\sin\beta_a} = \frac{|CI_b|}{|AI_b|}$ $\qquad$ $\frac{\sin\gamma_a}{\sin\gamma_b} = \frac{|AI_c|}{|BI_c|}$

Setzt man nun diese Brüche zum Ausdruck für den Satz von Ceva zusammen, erhält man:

$$\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_c} \cdot \frac{\sin\beta_c}{\sin\beta_a} \cdot \frac{\sin\gamma_a}{\sin\gamma_b} = \frac{|BI_a|}{|CI_a|} \cdot \frac{|CI_b|}{|AI_b|} \cdot \frac{|AI_c|}{|BI_c|}$$



Die rechte Seite ist der Ausdruck für den Satz von Ceva für die Höhen des Dreiecks $I_aI_bI_c$, deren Fußpunkte die Ecken A, B und C sind.
Da sich die Höhen bewiesener Maßen in einem Punkt schneiden, ist dieser Ausdruck = 1 und somit auch der Ausdruck für die Geraden und Winkel für den Mittenpunkt.