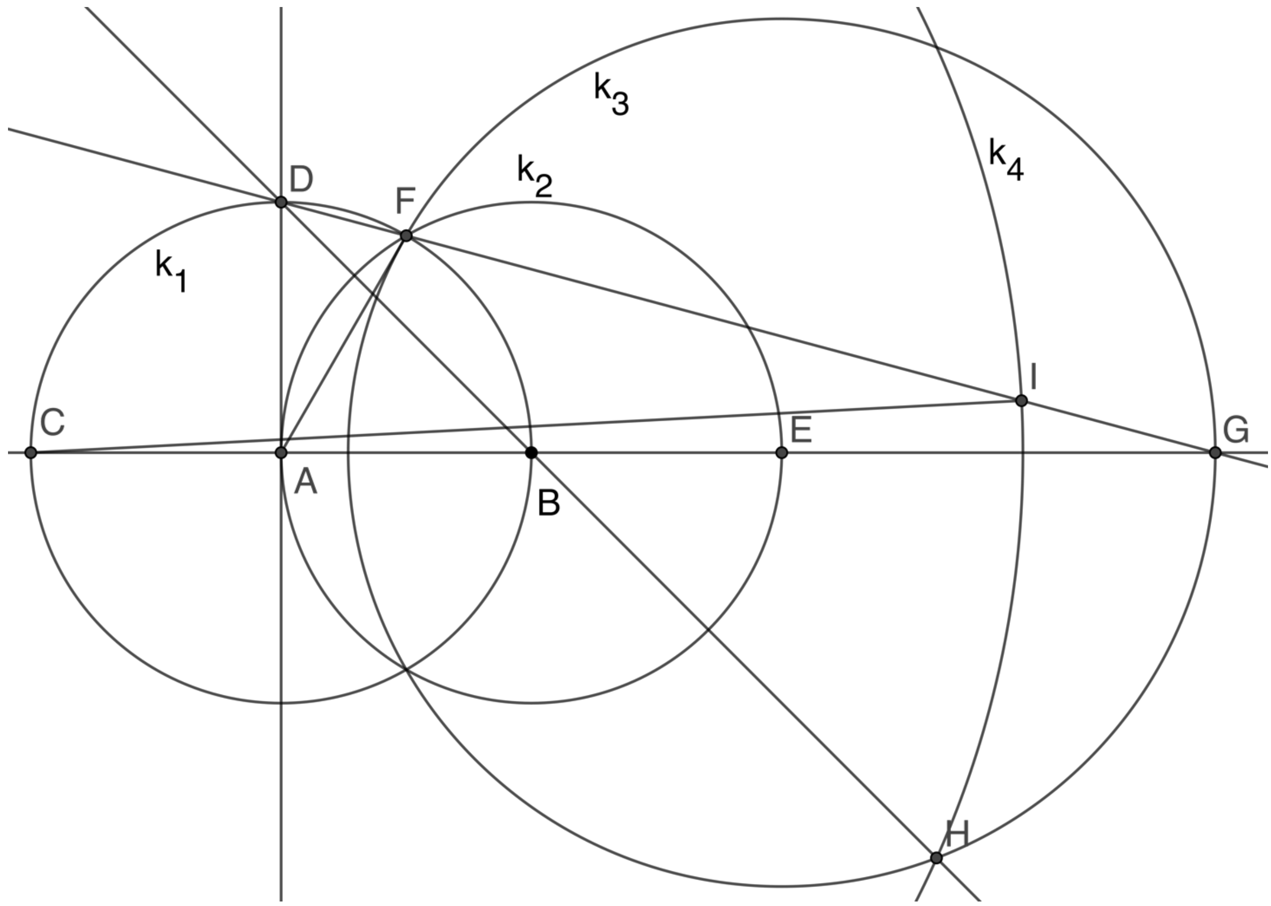
Konstruktion eines Winkels von 3°

A Eine Konstruktion mit minimalem Aufwand



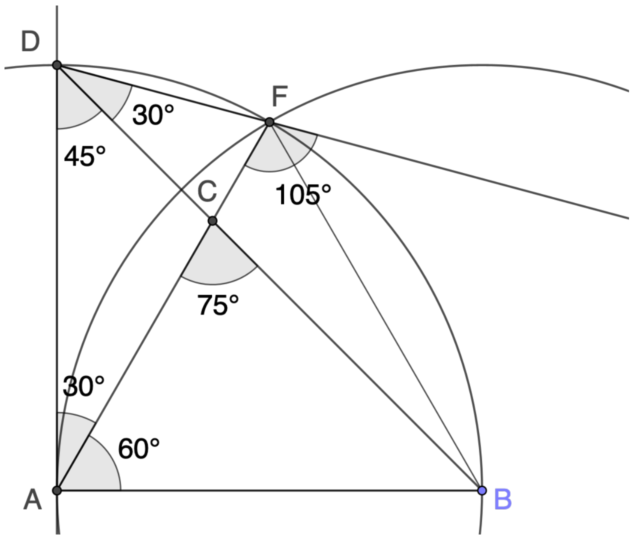
Konstruktionsbeschreibung
Zu den Lagebeziehungen, insbesondere Schnitte mit Kreisen, siehe Abbildung

Punkte A, B
g_1 = Gerade AB   s = Senkrechte zu g_1 durch A
k_1 = Kreis um A mit dem Radius |AB| k_2 = Kreis um B mit dem Radius |AB|
C = Schnitt k_1 mit g_1 D = Schnitt k_1 mit s   E = Schnitt k_2 mit g_1 F = Schnitt k_1 mit k_2
g_2 = Gerade DF   G = Schnitt g_1 mit g_2
k_3 = Kreis um E mit dem Radius |EF|
H = Schnitt DB mit k_3
k_4 = Kreis um C mit dem Radius |CH|
I = Schnitt von DF mit k_4

Behauptung: $|\sphericalangle \mathbf{ACI}| = \mathbf{3°}$

Zur Erinnerung für die nachfolgenden Betrachtungen:
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ mit den Eigenschaften $\Phi^2 = \Phi + 1$ und $\Phi - 1 = \varphi$

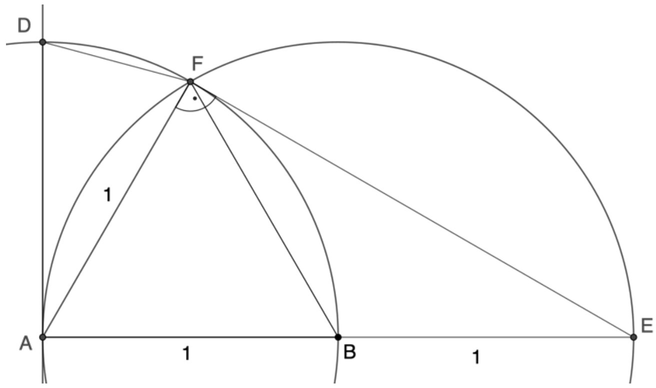
Winkel im ersten Teil der Konstruktion



Für die nachfolgenden Längenberechnungen setzen wir die Länge der Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ zu 1.

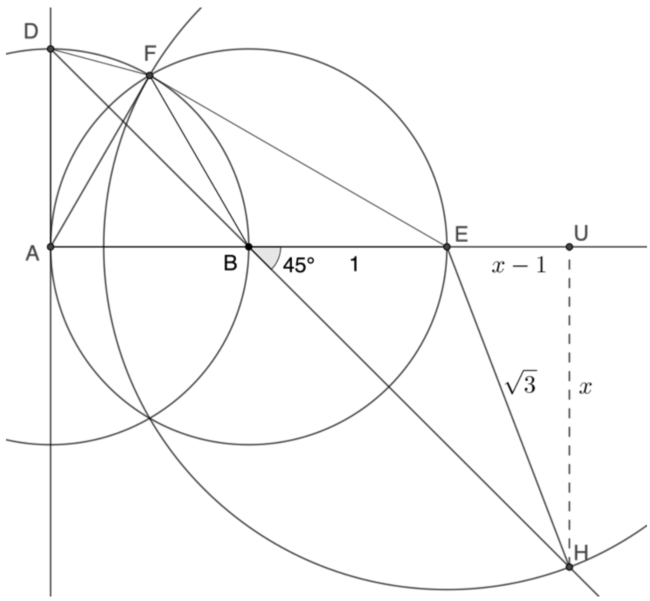
$$|\mathrm{AB}| = 1$$

Der Radius des Kreises k3



Aufgrund der Konstruktion ist $|\sphericalangle \mathrm{AFE}| = 90°$ (Thaleskreis).
Die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks ist $|\mathrm{AE}| = 2$. Die Kathete $\overline{\mathrm{AF}}$ hat die Länge 1. Also gilt
$2^2 = |\mathrm{FE}|^2 + 1^2$ und somit $|\mathrm{FE}| = \sqrt{3}$.

Die „Koordinaten" des Punktes H

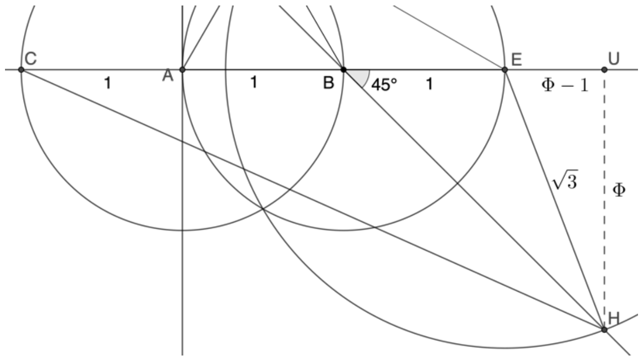


Das Dreieck EBH ist bestimmt durch $|\mathrm{BE}| = 1$, $|\sphericalangle \mathrm{HBE}| = 45°$ und, wie oben berechnet, $|\mathrm{EH}| = \sqrt{3}$.
Das Lot von H auf die Gerade AB hat den Fußpunkt U. Die Länge $|\mathrm{HU}| = x$ soll berechnet werden. Wegen des 45°-Winkels ist dann auch $|\mathrm{BU}| = x$, also $|\mathrm{EU}| = 1 - x$.
Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck EHU:

$$(1-x)^2 + x^2 = 3$$
$$1 - 2x + 2x^2 = 3$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \begin{cases} \Phi \\ -\varphi \end{cases}$$

Die geometrisch sinnvolle Lösung ist also
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Damit sind wir beim goldenen Schnitt angelangt, eine Länge, die wir für das regelmäßige Fünfeck brauchen.
Die Strecke $\overline{\mathrm{EU}}$ hat dann die Länge $\Phi - 1 = \varphi$.

Der Radius des Kreises k4



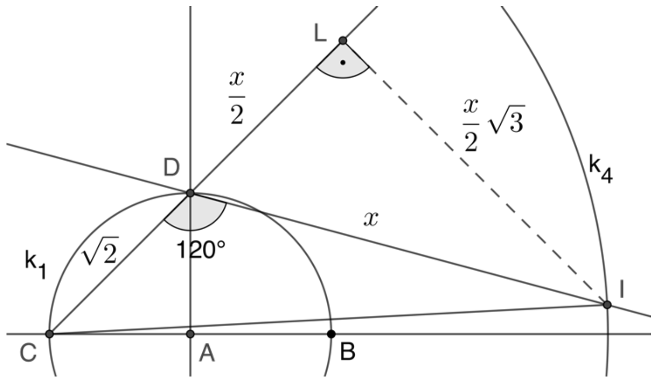
Im rechtwinkligen Dreieck CHU ist die Kathete $|\mathrm{CU}| = 2 + \Phi$, die Kathete $|\mathrm{UH}| = \Phi$, also gilt:

$$|\mathrm{CH}|^2 = (2+\Phi)^2 + \Phi^2 = 2\Phi^2 + 4\Phi + 4$$
$$= 2\Phi^2 + 4\Phi + 4 = 2\Phi^2 + 4(\Phi + 1) = 6\Phi^2$$

Also

$$|\mathrm{CH}| = \sqrt{6}\Phi = \sqrt{6}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Die „Koordinaten“ des Punktes I



Der Punkt I ist der Schnitt des Kreises K4 mit der Strecke $\overline{\mathrm{DG}}$.
Ziel ist es, mit trigonometrischen Mitteln den Winkel ∢ICD zu bestimmen. Ergibt sich 42°, so haben wir alles gezeigt.
Das Lot von I auf die Gerade CD hat den Fußpunkt L. Wegen $|\sphericalangle \mathrm{CGI}| = 120°$ ist das Dreieck DIL ein halbes gleichseitiges Dreieck. Ist $|\mathrm{ID}| = x$, so ist $|\mathrm{DL}| = \frac{x}{2}$ und $|\mathrm{IL}| = \frac{x}{2}\sqrt{3}$. Folglich gilt im Dreieck CIL:

$$\left(\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2 = |\mathrm{CI}|^2 = 6\Phi^2$$
$$\frac{x^2}{4} + x\sqrt{2} + 2 + \frac{x^2}{4}\cdot 3 = 6\cdot(1+\Phi)$$
$$x^2 + x\sqrt{2} - 4 - 6\Phi = 0$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\pm\sqrt{6\sqrt{5}+15} - 1\right)$$

wobei nur das +-Zeichen vor der Wurzel zu einer geometrisch sinnvollen Lösung führt. Dann ist

$$|\mathrm{IL}| = \frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{6}\left(\sqrt{6\sqrt{5}+15} - 1\right)$$

Berechnung des Winkels ∢ICD

Im rechtwinkligen Dreieck CLI gilt

$$\sin\left(\sphericalangle \mathrm{ICD}\right) = \frac{|\mathrm{IL}|}{|\mathrm{CI}|} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6}\left(\sqrt{6\sqrt{5}+15}-1\right)}{\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{6\sqrt{5}+15}-1}{2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{6\sqrt{5}+15}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{6\sqrt{5}+15}\left(\sqrt{5}-1\right) - \sqrt{5} + 1\right] \quad (1)$$

Der genaue Wert für sin 42° ergibt sich über das Additionstheorem
$\sin 42° = \sin(72° - 30°) = \sin 72° \cdot \cos 30° - \cos 72° \cdot \sin 30°$.
Die Werte für 72° und 30° kann man einfach Formelsammlungen entnehmen.

$$\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)} \qquad \cos 72° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 42° = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{6\left(\sqrt{5}+5\right)} - \sqrt{5}+1\right] \quad (2)$$

Der Vergleich von (1) mit (2) zeigt, dass noch die Gleichheit von $\sqrt{6\sqrt{5}+15}\,\left(\sqrt{5}-1\right)$ und $\sqrt{6\left(\sqrt{5}+5\right)}$ überprüft werden muss.

$$T_1 = \sqrt{6\sqrt{5}+15}\,\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$T_1^2 = \left(6\sqrt{5}+15\right)\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(6\sqrt{5}+15\right)\left(6-2\sqrt{5}\right) = 36\sqrt{5}+90-60-30\sqrt{5}$$

$$T_1^2 = 6\sqrt{5}+30$$

$$T_2 = \sqrt{6\left(\sqrt{5}+5\right)}$$

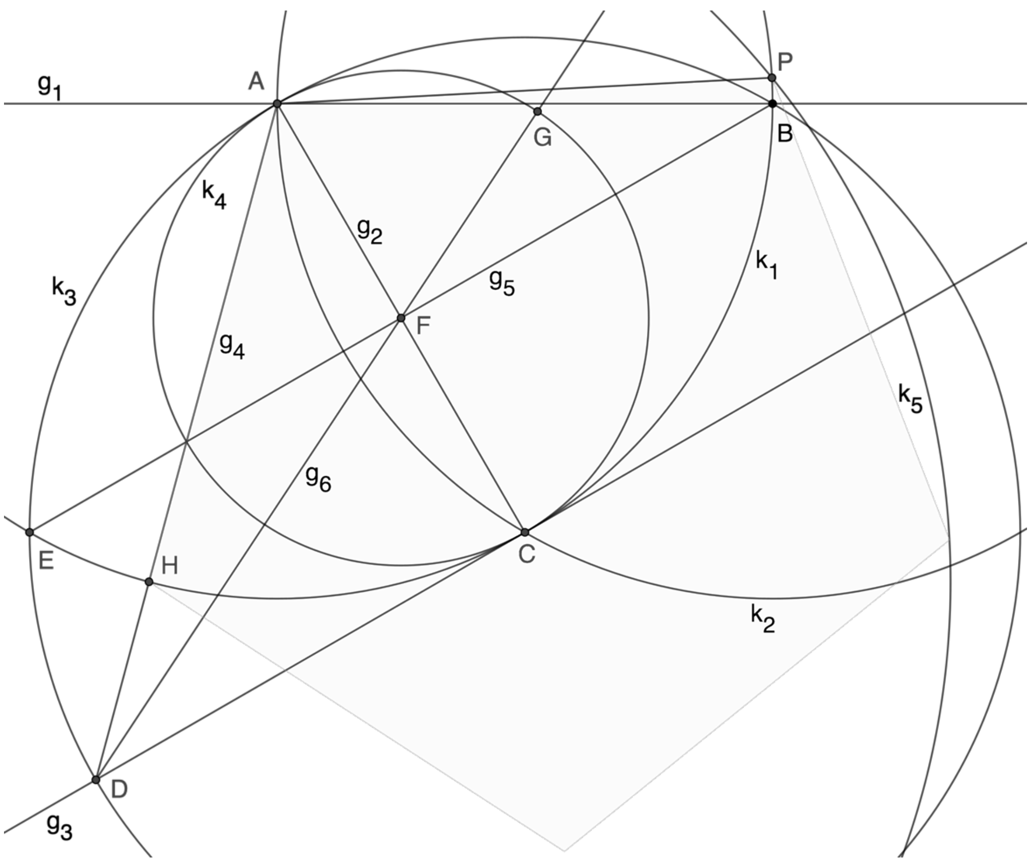
$$T_2^2 = 6\left(\sqrt{5}+5\right) = 6\sqrt{5}+30$$

Damit ist gezeigt, dass beide Terme gleich sind, folglich $|\sphericalangle \mathrm{ICD}| = 42°$.
Da $|\sphericalangle \mathrm{GCD}| = 45°$, gilt $|\sphericalangle \mathrm{GCI}| = 3°$, was zu zeigen war.

B Eine einfacher einzusehende Konstruktion

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte A und B. Es ist ein Punkt P zu konstruieren, so dass der Winkel $|\sphericalangle \mathrm{ABP}| = 3°$ groß ist.

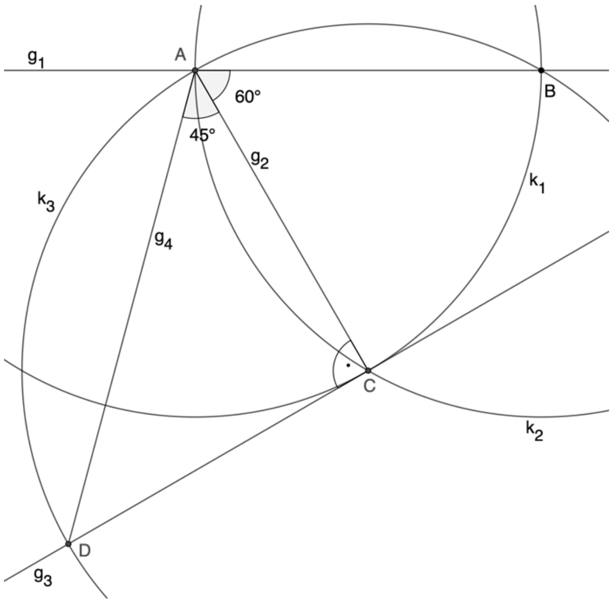
Lösungsskizze
An die Gerade AB wird in A ein Winkel von 105° = 60° + 45° angetragen. Dann wird ein regelmäßiges Fünfeck auf die klassische Weise konstruiert. Der Winkel von 3° ergibt sich durch die Differenz 3° = 108° - 105°. Das Fünfeck, das nicht vollständig konstruiert wird, ist leicht angedeutet.



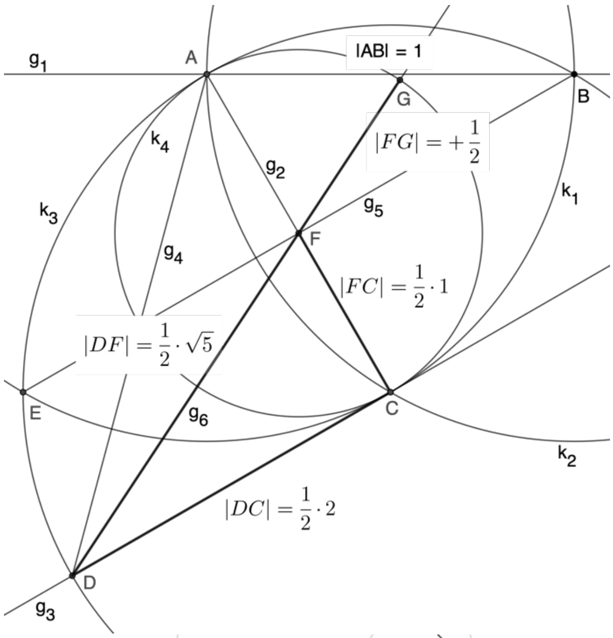
Konstruktionsbeschreibung und Erläuterung

Zu den Lagebeziehungen, insbesondere Schnitte mit Kreisen, siehe Abbildungen

Punkte A, B g_1 = Gerade AB
k_1 = Kreis um A mit dem Radius |AB|
k_2 = Kreis um B mit dem Radius |BA|
C = Schnitt von k_1 mit k_2
k_3 = Kreis um C mit dem Radius |CA|
g_2 = Gerade AC
g_3 = Senkrechte zu g_2 durch C
D = Schnitt von g_3 mit k_3
g_4 = Gerade DA
Damit ist $|\sphericalangle DAB| = 105°$ *konstruiert.*



E = Schnitt von k_1 mit k_3
g_5 = Gerade BE
F = Schnitt von g_2 mit g_5
g_6 = Gerade DF
k_4 = Kreis um F mit dem Radius |FC|
G = Schnitt von g_6 mit k_4
G liegt sehr knapp neben der Geraden AB
Damit gilt $|DG| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}|AB| = |AB|\Phi$.
Das ist die Länge der Diagonale für das zu konstruierende Fünfeck.



H = Schnitt von g_4 mit k_1
k_5 = Kreis um H mit dem Radius |DG|
P = Schnitt von k_1 mit k_5
Damit ist $|\sphericalangle ABP| = 3°$ *als Differenz des Innenwinkels des Fünfecks* ($|\sphericalangle EAP| = 108°$) *und des Winkels* $|\sphericalangle DAB| = 105°$.