Python-Generated Math Figures / Mit Python generierte mathematische Figuren

Emily J. King

Table of Contents / Inhaltsverzeichnis

1 Properties of the Real Numbers / Eigenschaften der reellen Zahlen

1.1 Ceiling and Floor / Abrundungs- und Aufrundungsfunktion

Proposition 1.1. *Let $\mathbb{F}$ be an Archimedean ordered field. For all $x \in \mathbb{F}$ there exists a unique $n \in \mathbb{Z}$ with*

$$n \leq x < n+1$$

Proposition 1.2. *Sei $\mathbb{F}$ ein archimedisch geordneter Körper. Zu jedem $x \in \mathbb{F}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$n \leq x < n+1$$

Figure / Abbildung 1: A number line illustrating the proof of Proposition 1.1. / Eine Zahlengerade, die den Beweis Proposition 1.2 veranschaulicht.

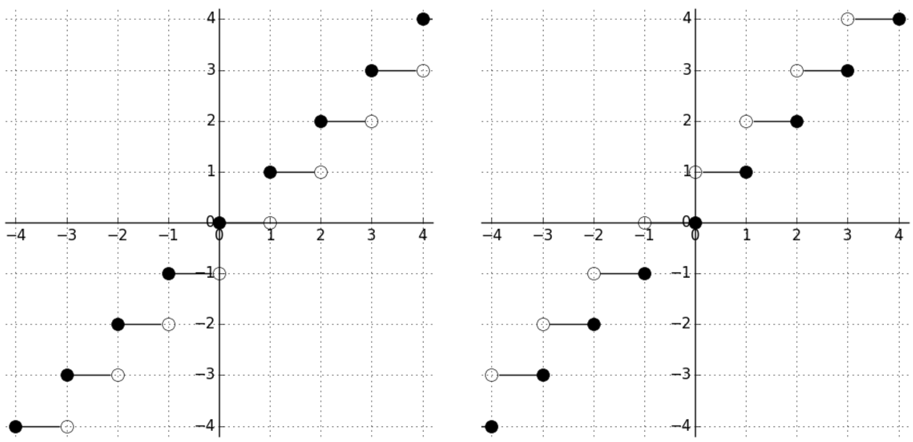

Figure / Abbildung 2: Left: Floor function, Right: Ceiling function / Links: Abrundungsfunktion, Rechts: Aufrundungsfunktion

1.2 Bounded Sets / beschränkte Mengen

Example 1.3.

a. Let $M := \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}$. M is bounded and has both a maximum and infimum in the real numbers but no minimum. Namely, $\max(M) = 2$ and $\inf(M) = 1$. Assume by way of contradiction that $n = \min(M)$. There there exists a ϵ with $0 < \epsilon < 1$ and $n = 1 + \epsilon$. But then $n' = 1 + \epsilon/2 \in M$ and $n' < n$, a contradiction. ↯ Thus M does not have a minimum.

b. Let $M := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Since the elements of M are positive, 0 is a lower bound on M. Also, since for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ and thus $1 \geq 1/n$, 1 is an upper bound on M; more precisely, it is the maximum. It follows from Proposition xxxxx that 0 is the infimum of M since if $\epsilon > 0$ were a lower bound of M, then there would be a $n \in \mathbb{N}$ such that $1/n < \epsilon$. But this contradicts the assumption that ϵ is a lower bound. ↯

c. Let $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. M is bounded since for example $x^2 > 2$ when $x > 2$ or $x < -2$. Furthermore, M has neither a supremum nor an infimum in the rational numbers, since there is no $x \in \mathbb{Q}$ with $x^2 = 2$. (We will prove this fact later in Proposition xxxxx.) M does, however, have both a supremum, resp. infimum, in the real numbers, namely $\sqrt{2}$, resp. $-\sqrt{2}$. (We will explicitly define roots later.)

Beispiel 1.4.

a. Sei $M := \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}$. M ist beschränkt und besitzt ein Maximum und Infimum in den reellen Zahlen aber kein Minimum. Und zwar $\max(M) = 2$ und $\inf(M) = 1$. Angenommen, es sei $n := \min(M)$, dann existiert ein ϵ so dass $0 < \epsilon < 1$ und $n = 1 + \epsilon$ gilt. Aber dann ist $n' := 1 + \epsilon/2 \in M$ und $n' < n$. ↯ Also besitzt M kein Minimum.

b. Sei $M := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Da die Elemente von M positiv sind, ist 0 eine untere Schranke von M. Da für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1/n$, ist 1 eine obere Schranke, eigentlich das Maximum. Es folgt aus Proposition xxxx, dass 0 das Infimum von M ist. Wenn $\epsilon > 0$ ein untere Schranke von M ist, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $1/n < \epsilon$. Dann ist ϵ keine untere Schranke. ↯.

c. Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. M ist beschränkt, da $x^2 > 2$ wenn zum Beispiel $x > 2$ oder $x < -2$. M besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum. Außerdem besitzt M kein Supremum (bzw. Infimum) in den rationalen Zahlen, da es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $x^2 = 2$. (Wir werden das später [Proposition xxxxxx beweisen.) M besitzt ein Supremum bzw. ein Infimum in den reellen Zahlen, nämlich $\sqrt{2}$, bzw. $-\sqrt{2}$. (Wir werden Wurzel später definieren.)

The sets defined in Example 1.3 are illustrated in Figure 1.3. / Die Menge in Beispiel 1.4 wird in Abbildung 3 veranschaulicht.

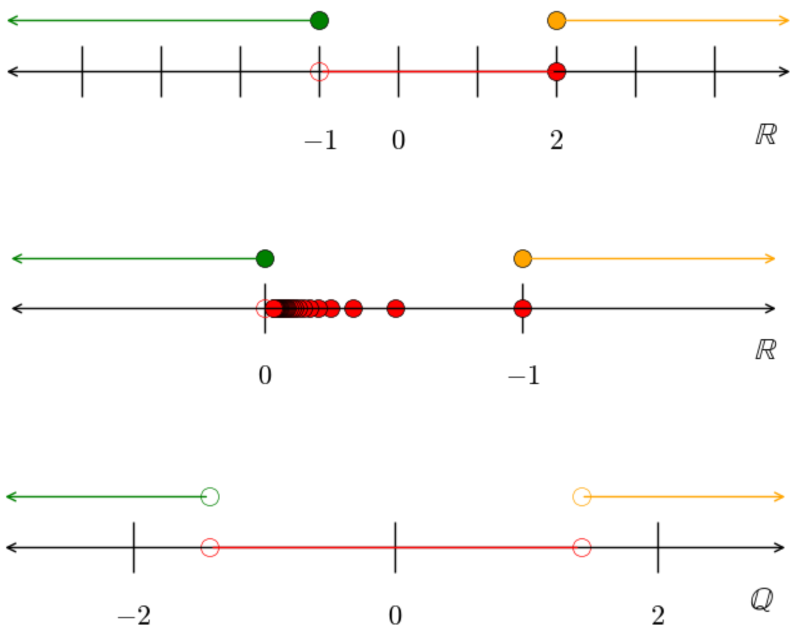

Figure / Abbildung 3: Example 1.3 illustrated on number lines. Red stands for the points in M, yellow the upper bounds of M, and green the lower bounds. A filled circle means that the value is an element of the particular set, while an open disc meanss that the value does not lie in the set. Top: Beispiel 1.3.a, Middle: Beispiel 1.3.b, Bottom: Beispiel 1.3.c. / Beispiel 1.4 veranschaulicht. Rot entspricht Punkten in M, gelb entspricht den oberen Schranken von M und grün entspricht den unteren Schranken von M. Ein gefüllter Kreis bedeutet, dass der Wert ein Element der Menge ist, und ein offenener Kreis bedeutet, dass der Wert kein Element der Menge ist. Oben: Beispiel 1.4.a, Mitte: Beispiel 1.4.b, Unten: Beispiel 1.4.c

2 Sequences / Folgen

2.1 Various Sequence Examples / verschiedene Beispiele von Folgen

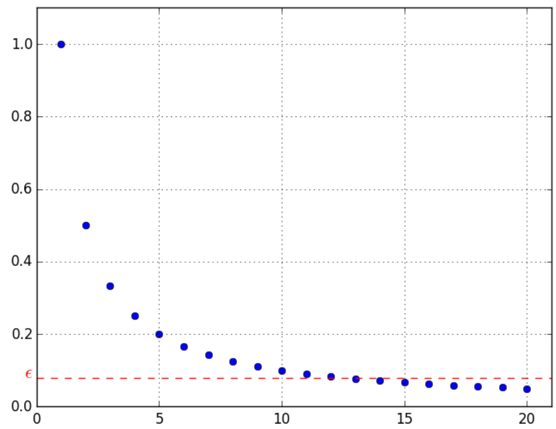

Figure / Abbildung 4: $f(n) = 1/n$

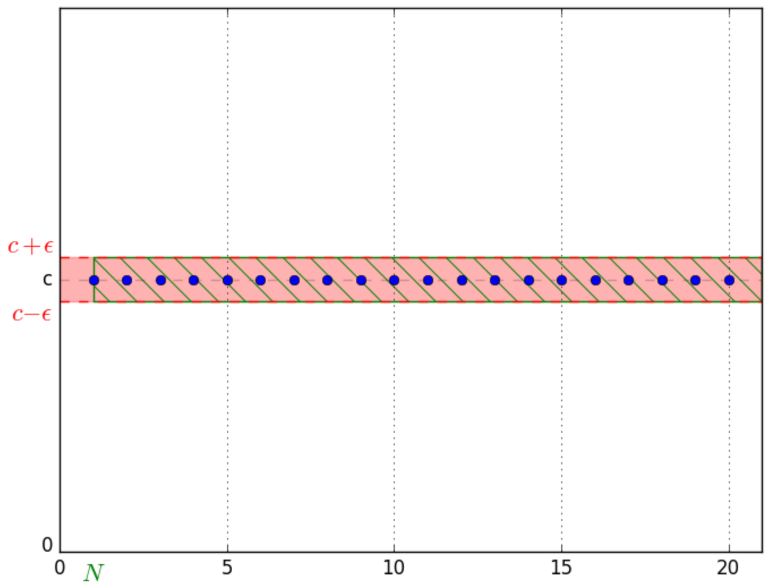

Figure / Abbildung 5: $a_n = c$: The constant sequence with all components equal to c converges trivially to c. / Die konstante Folge $(c, c, c, c, \ldots)$ konvergiert trivialerweise gegen c.

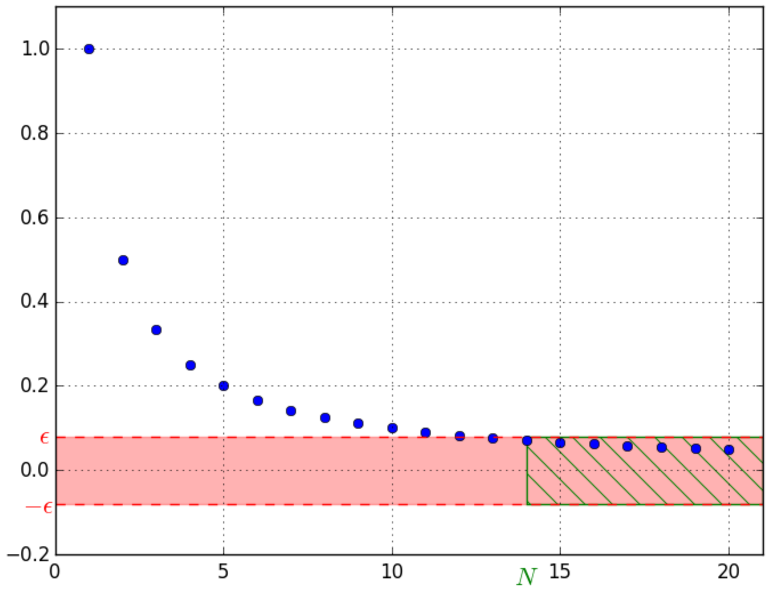

Figure / Abbildung 6: $a_n = 1/n$: The sequence $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a null sequence. That means that is converges to 0. / Die Folge 1 durch n ist eine Nullfolge. Das heißt, dass sie gegen 0 konvergiert.

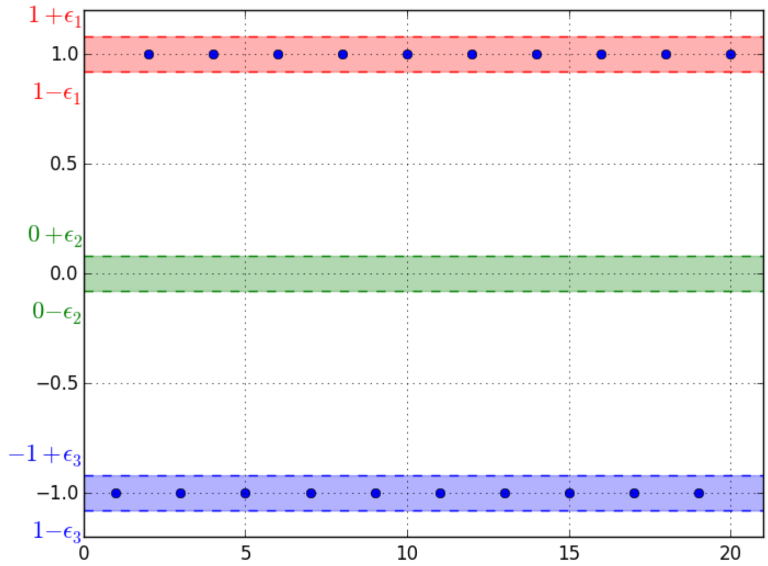

Figure / Abbildung 7: $a_n = (-1)^n$: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergence. For all $2 > \epsilon > 0$ and $a \in \mathbb{R}$, there are infinitely many $n \in \mathbb{N}$ with $|a - a_n| > \epsilon$. / $(a_n) := ((-1)^n)$ ist divergent. Für alle $2 > \epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$, es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| > \epsilon$.

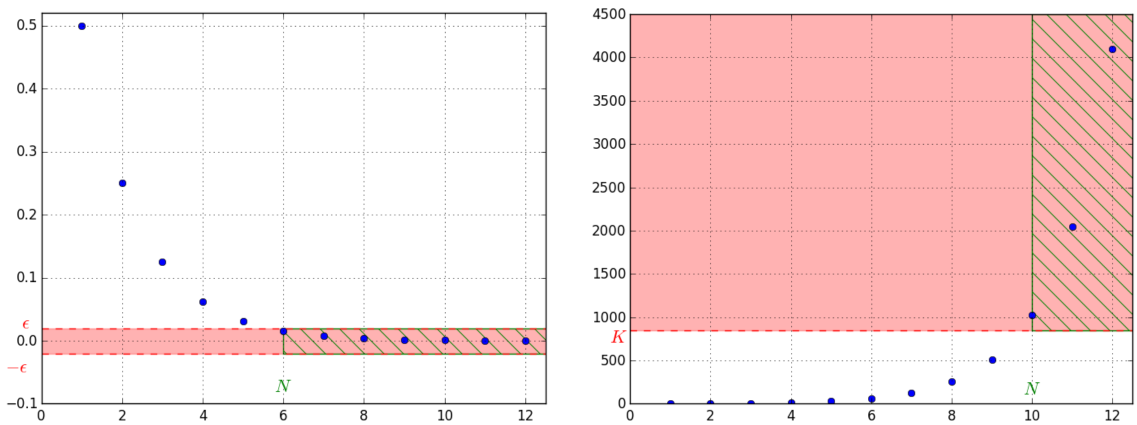

Figure / Abbildung 8: $a_n = x^n$: Left $0 < x < 1$, Right $x > 1$. / Links $0 < x < 1$, Rechts $x > 1$.

2.2 Cluster Points and the Bolzano-Weierstrass Theorem / Häufungspunkte und der Satz von Bolzano-Weierstraß

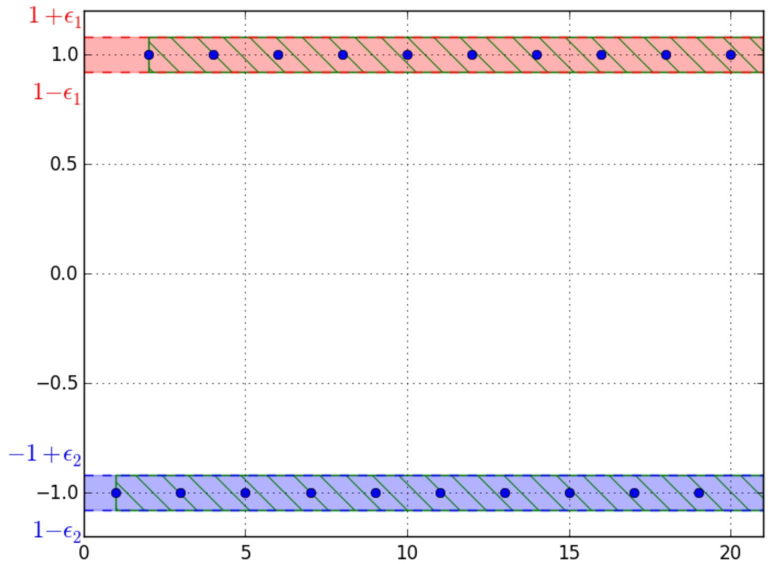

Figure / Abbildung 9: $a_n = (-1)^n$ does not converge but does have two cluster points (± 1). / $a_n = (-1)^n$ besitzt keinen Grenzwert aber zwei Häufungspunkte (± 1).

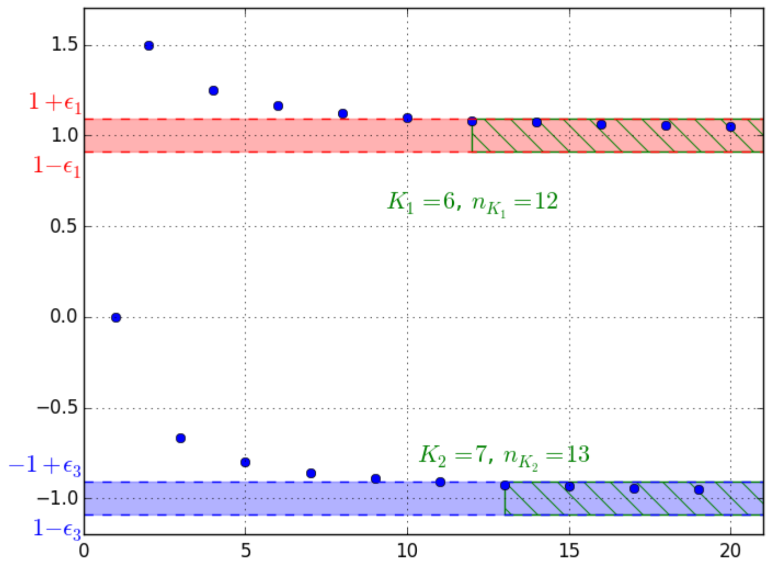

Figure / Abbildung 10: $a_n = (-1)^n + 1/n$

Theorem 2.1 (Bolzano-Weierstrass). *Every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has a convergent subsequence.*

Satz 2.1 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

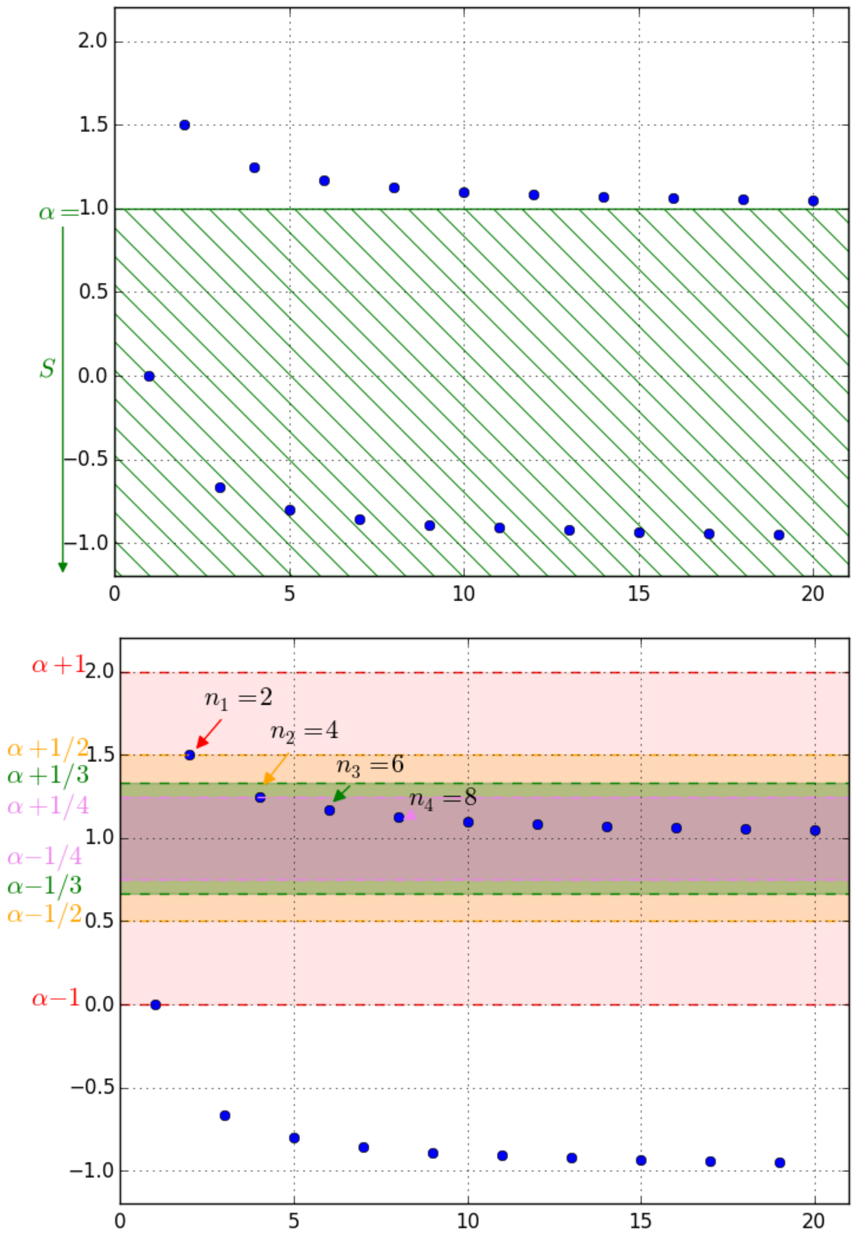

Figure / Abbildung 11: The proof of Bolzano-Weierstrass. (Theorem 2.1) / Der Beweis des Satzes Bolzano-Weierstraß (Satz 2.1)

3 Cantor Diagonalization Arguments / Cantor'sche Diagonalverfahren

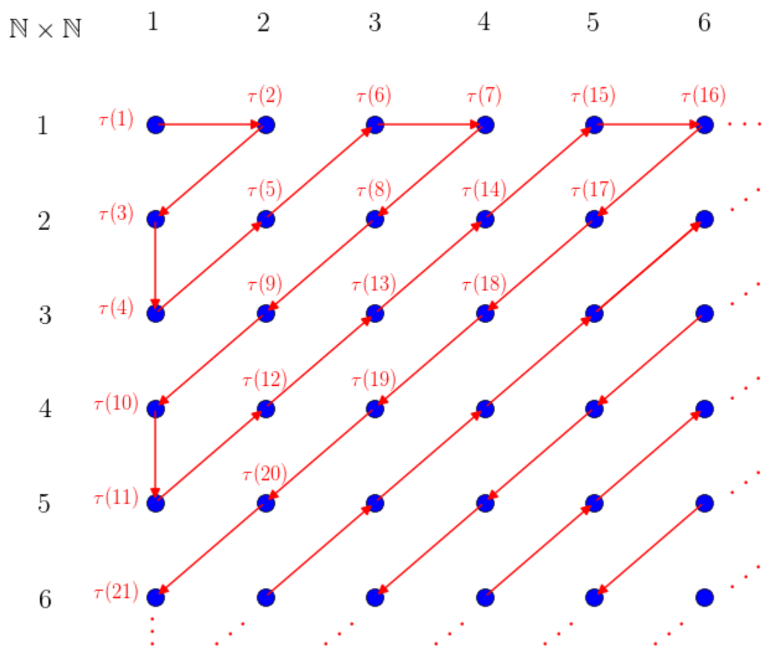

Figure / Abbildung 12: The bijective Cantor pairing function $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. / Die bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ aus dem ersten Cantor'schen Diagonalverfahren

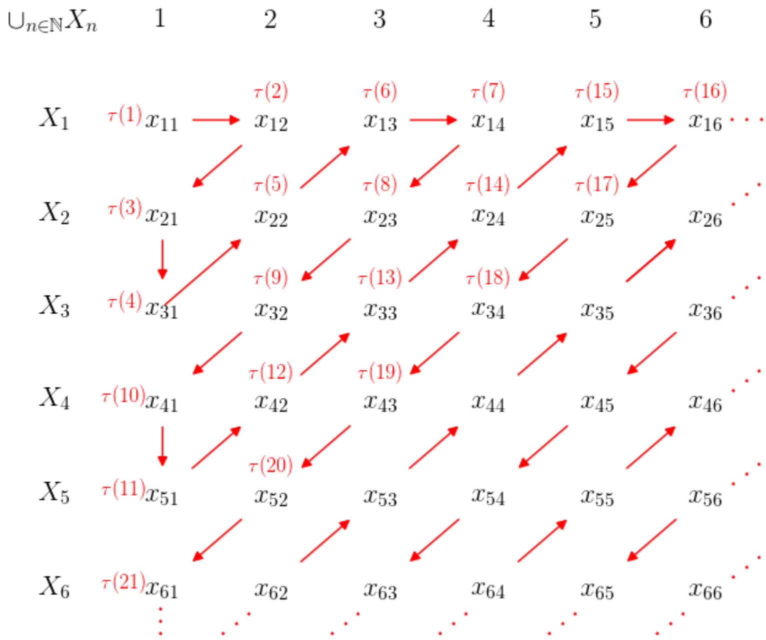

Figure / Abbildung 13: The surjective function $\tau : \mathbb{N} \to \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ arising from the Cantor pairing function. / Die surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ aus dem ersten Cantor'schen Diagonalverfahren

s_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\ldots$
s_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\ldots$
s_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\ldots$
s_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\ldots$
s_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\ldots$

Figure / Abbildung 14: Cantor diagonalization argument. / Das zweite Cantor'schen Diagonalverfahren.

4 Limits of Functions and Continuity / Grenzwerte bei Funktionen und Stetigkeit

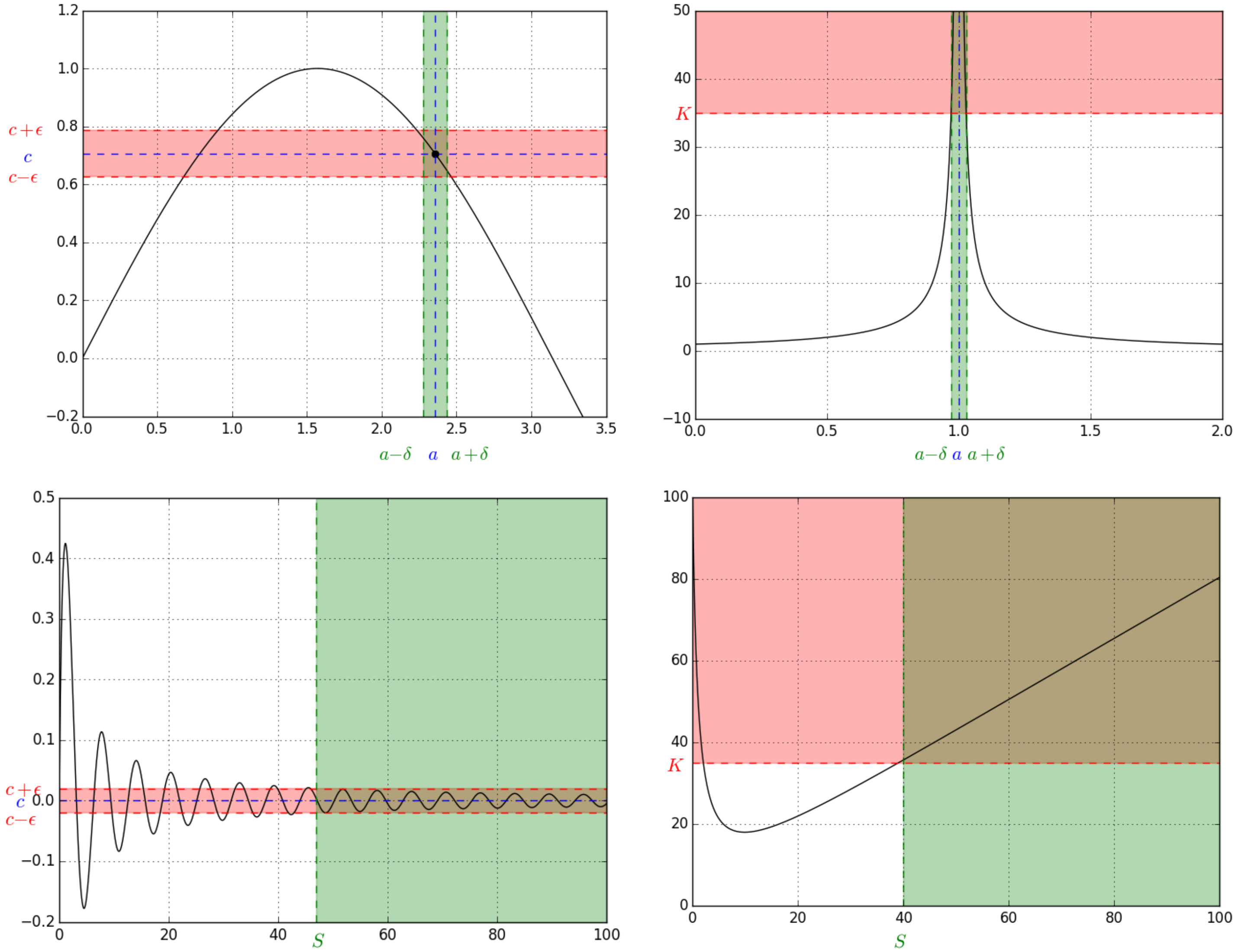

Figure / Abbildung 15: Upper left / Oben links: $\lim_{x \to a} f(x) = c$, upper right / oben rechts: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, lower left / unten links: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$, lower right / unten rechts: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

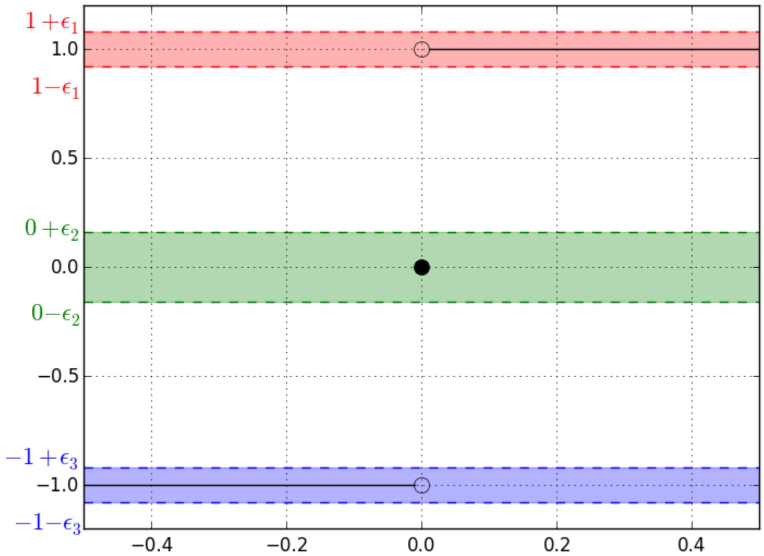

Figure / Abbildung 16: The sign function does not converge at 0. / Die Vorzeichenfunktion hat keinen Grenzwert an der Stelle 0.

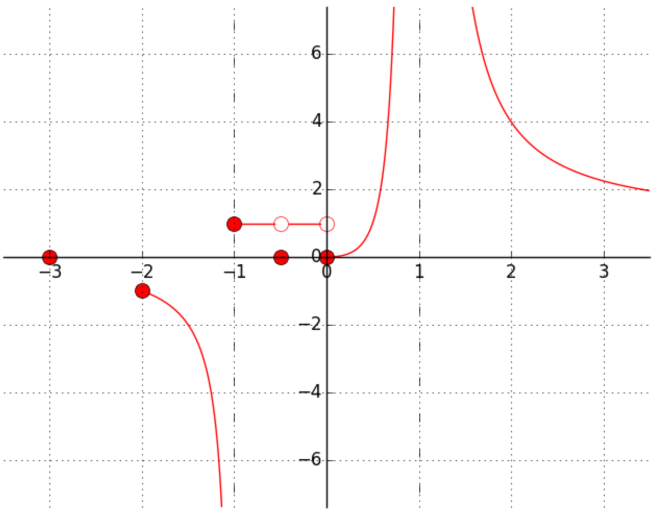

Figure / Abbildung 17: The function f from Example 4.1. / Die Abbildung f im Beispiel 4.2

Example 4.1. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{(x-1)^2}; & (0 \leq x < 1) \vee (1 < x) \\ 1; & (-1 \leq x < -1/2) \vee (-1/2 < x < 0) \\ 0; & x = -1/2 \\ \frac{1}{x+1}; & -2 \leq x < -1 \\ 0; & x = -3 \end{cases}.$$

.

- The domain is $D = \{-3\} \cup [-2, 1) \cup (1, \infty)$. -3 is an isolated point of D and thus also in the closure $\overline{D}$, 2 is a limit point lying in D and thus also in the closure, 1 is a limit point of D lying in $\overline{D}$ but not in D.
- We note that $-1 \in D$, although $x = -1$ is a vertical asymptote of f. The reason is that $f(-1)$ is defined, namely $f(-1) = 1$.
- It follows from the definition of a limit of a function (Definition xxxxx) that if $\lim_{x\to a} f(x)$ exists, then a must either be a limit point of the domain of f or equal to $\pm\infty$ (in the case that $D \subseteq \mathbb{R}$ is unbounded from above or below).
- Some limits of f:
  - $\lim_{x\to-3} f(x)$: Does not exist since -3 is an isolated point of D.
  - $\lim_{x\to-1} f(x)$: Does not exist since for all $\delta > 0$, there are $x_1, x_2 \in B_\delta(-1)\backslash\{-1\}$ such that $f(x_1)$ is arbitrarily large and negative while $f(x_2) = 1$. (Cf. the proof in Example xxxxxx.)
  - $\lim_{x\to-1/2} f(x) = 1$: For all $\epsilon > 0$ and $0 < \delta < 1/2$,

    $$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon \quad \text{for all } x \in B_\delta(-1/2)\backslash\{-1/2\}.$$

    (This is not a typical case, since it is possible to use the same δ for all values of ϵ.)
  - $\lim_{x\to-1/4} f(x) = 1$: For the same reasons as above.
  - $\lim_{x\to0} f(x)$: Does not exist since for all $\delta > 0$ there are $x_1, x_2 \in B_\delta(0)\backslash\{0\}$ such that $f(x_1) = 1$ and $f(x_2) = 0$. (Cf. the proof in Example xxxxx.)
  - $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$: For all $K > 3$ it follows from Proposition xxxx that for all $x \in B_{1/K}(1)\backslash\{1\}$

    $$0 < (x-1)^2 = |x-1|^2 < \frac{1}{K},$$

    $$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} > x^2K^2 > (2/3)^2K^2 > 4/3K > K.$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. (We will prove this later, but note that using the methods you know now, you could show that $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.)

- In follows from the definition of continuity (Definition xxxx) that when f is continuous at a, a must lie in D.

- We will investigate the continuity of f.
  - f is continuous at -3 since -3 is an isolated point in the domain.
  - f is not continuous at -1 (resp., 0) since -1 (resp., 0) is a limit point of the domain but $\lim_{x\to-1} f(x)$ (resp., $\lim_{x\to 0} f(x)$) does not exist.
  - f is not continuous at $-1/2$ since $-1/2$ is a limit point and element of the domain but $\lim_{x\to-1/2} f(x) \neq f(-1/2)$.
  - f is continuous at $-1/4$ since $-1/4$ is a limit point and element of the domain and $\lim_{x\to-1/4} f(x) \neq f(-1/4)$.
  - f is not continuous at 1. Although 1 is a limit point of the domain, it does not lie in the domain.
  - f is continuous over $\{-3\} \cup [-2,-1) \cup (-1,-1/2) \cup (-1/2,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

Beispiel 4.2. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{(x-1)^2}; & (0 \le x < 1) \vee (1 < x) \\ 1; & (-1 \le x < -1/2) \vee (-1/2 < x < 0) \\ 0; & x = -1/2 \\ \frac{1}{x+1}; & -2 \le x < -1 \\ 0; & x = -3 \end{cases}$$

definiert.

- Der Definitionsbereich ist $D = \{-3\} \cup [-2,1) \cup (1,\infty)$. Dann ist -3 isolierter Punkt von D also auch Berührpunkt, 2 ist Häufungspunkt von D also auch Berührpunkt, 1 ist Häufungspunkt von D also auch Berührpunkt aber kein Element von D.

- Wir bemerken, dass $-1 \in D$, obwohl $x = -1$ eine senkrechte Asymptote von f ist. Der Grund dafür ist, dass $f(-1)$ definiert ist und zwar $f(-1) = 1$.

- Nach der Definition von Grenzwerten von einer Abbildung (Definition xxxx), wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert, dann muss a entweder ein Häufungspunkt vom Definitionsbereich oder $\pm\infty$ (falls $D \subseteq \mathbb{R}$ und nach oben bzw. nach unten unbeschränkt) sein.

- Ein paar Grenzwerte von der oben definierten f:
  - $\lim_{x\to -3} f(x)$: Existiert nicht, da -3 ein isolierter Punkt von D ist.
  - $\lim_{x\to -1} f(x)$: Existiert nicht, da für alle $\delta > 0$ es $x_1, x_2 \in B_\delta(-1)\backslash\{-1\}$ gibt, sodass $f(x_1)$ beliebig groß und negativ ist und $f(x_2) = 1$ gilt. (Vgl. dem Beweis im Beispiel xxxx.)
  - $\lim_{x\to -1/2} f(x) = 1$: Für alle $\epsilon > 0$ und $0 < \delta < 1/2$, gilt für alle $x \in B_\delta(-1/2)\backslash\{-1/2\}$ $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$. (In diesem nicht typischen Fall funktionieren die gleichen δ für alle $\epsilon > 0$.)
  - $\lim_{x\to -1/4} f(x) = 1$: Aus dem gleichen Grund.
  - $\lim_{x\to 0} f(x)$: Existiert nicht, da für alle $\delta > 0$ es $x_1, x_2 \in B_\delta(0)\backslash\{0\}$ gibt, sodass $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 0$ gilt. (Vgl. mit dem Beweis im Beispiel xxxxx.)
  - $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$: Für $K > 3$ gilt nach Proposition xxxx für alle $x \in B_{1/K}(1)\backslash\{1\}$

$$0 < (x-1)^2 = |x-1|^2 < \frac{1}{K},$$

$$\text{also } f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} > x^2K^2 > (2/3)^2K^2 > 4/3K > K.$$

  - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. (Wir werden diese Aussage später zeigen aber bemerken, dass es einfach wäre direkt zu beweisen, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.)

- In der Definition der Stetigkeit (Definition xxxx) ist es notwendig, dass wenn f in a stetig ist, $a \in D$ ist.

- Wir untersuchen die Stetigkeit der oben definierten f:
  - f ist in -3 stetig, da -3 ein isolierter Punkt ist.
  - f ist nicht in -1 (bzw. 0) stetig, da -1 (bzw. 0) ein Häufungspunkt und Element von D ist und ein Grenzwert von f in -1 nicht existiert.
  - f ist nicht in $-1/2$ stetig, da $-1/2$ ein Häufungspunkt und Element von D ist aber $\lim_{x\to -1/2} f(x) \neq f(-1/2)$ gilt.
  - f ist in $-1/4$ stetig, da $-1/4$ ein Häufungspunkt und Element von D ist und $\lim_{x\to -1/4} f(x) = f(-1/4)$ gilt.
  - f ist nicht in 1 stetig; obwohl 1 ein Häufungspunkt von D ist, ist sie kein Element von D.
  - f ist in $\{-3\}\cup[-2,-1)\cup(-1,-1/2)\cup(-1/2,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ stetig.

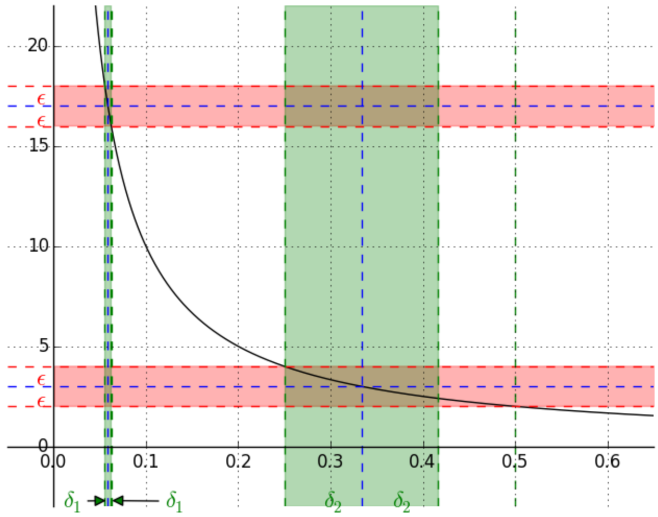

Figure / Abbildung 18: The function $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto 1/x$ is continuous but not uniformly continuous. / Die Abbildung $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto 1/x$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig.

5 Trigonometry / Trigonometrie

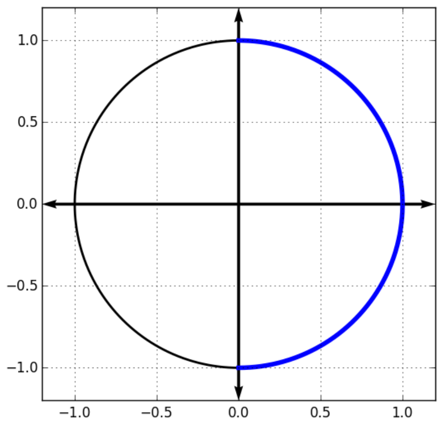

Figure / Abbildung 19: Unit circle, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ / Einheitskreis, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

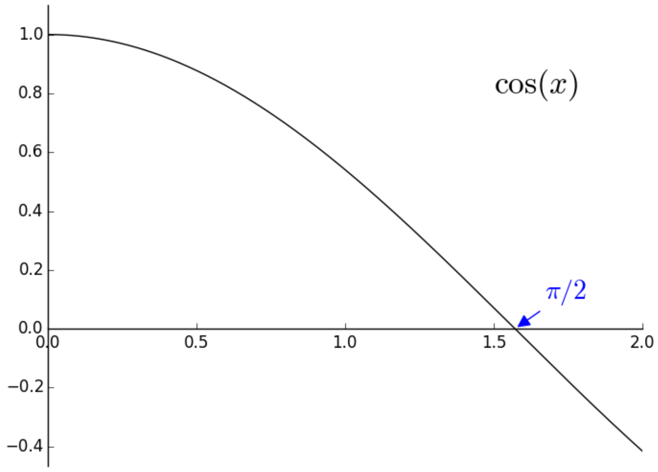

Figure / Abbildung 20: The function cos has exactly one zero in the interval $[0, 2]$. We define $\pi/2$ to be the location of this zero. / Die Abbildung cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Wir definieren $\pi/2$ als diese Nullstelle.

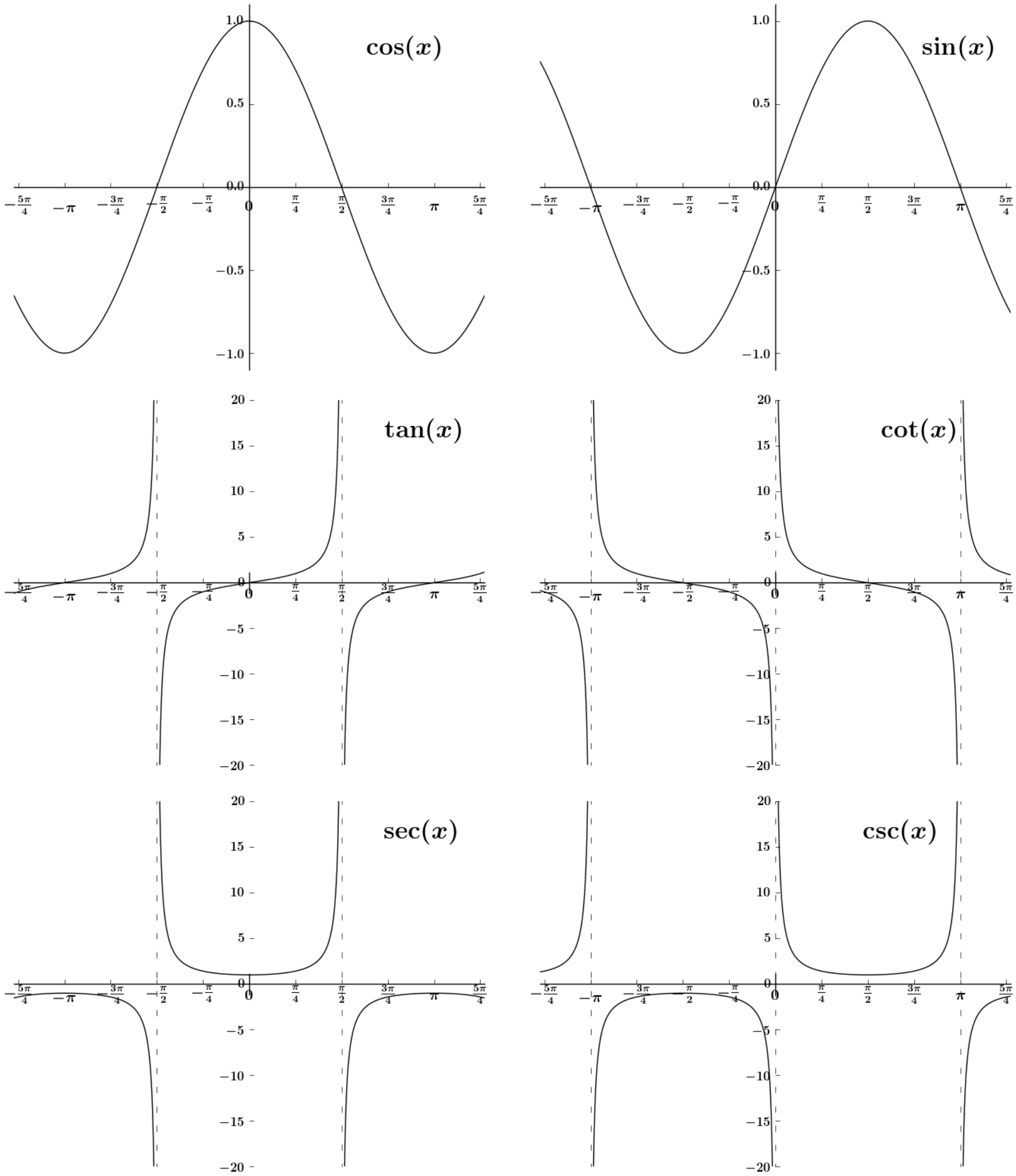

Figure / Abbildung 21: The trigonometric functions. Upper left: cosine, upper right: sine, middle left: tangent, middle right: cotangent, lower left: secant, lower right: cosecet. / Die trigonometrische Abbildungen. Oben links Cosinus, oben rechts Sinus, mitte links Tangens, mitte rechts Cotangens, unten links Secans, unten rechts Cosecans.

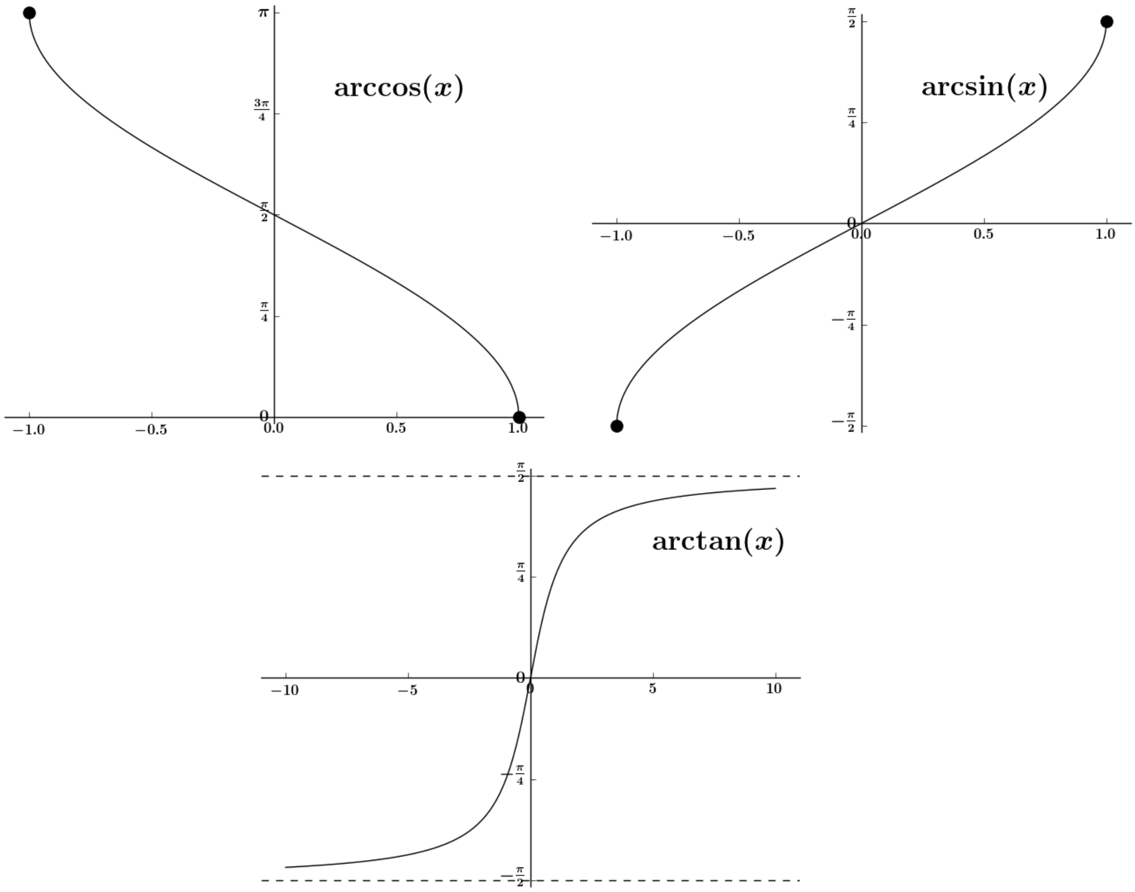

Figure / Abbildung 22: The inverse trigonometric functions. Top left: inverse cosine, top right: inverse sine, bottom: inverse tangent. / Die trigonometrische Umkehrabbildungen. Oben links Arcus-Cosinus, oben rechts Arcus-Sinus, unten Arcus-Tangens

6 Misc. Elementary Functions / sonst. elementare Funktionen

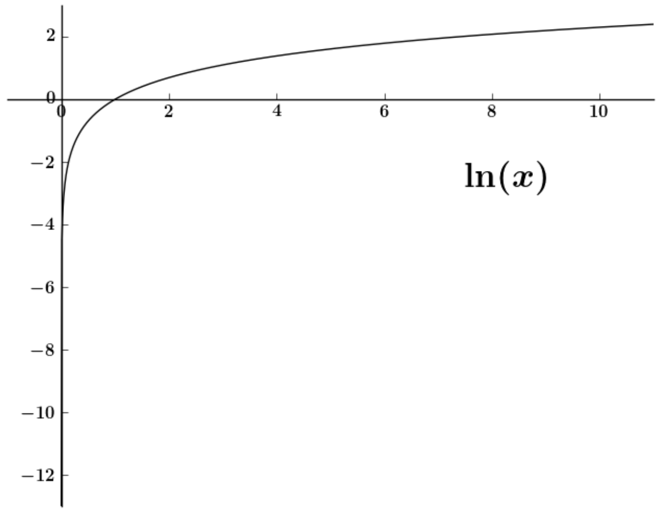

Figure / Abbildung 23: Natural logarithm, $\ln : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ / Natürlicher Logarithmus, $\ln : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$

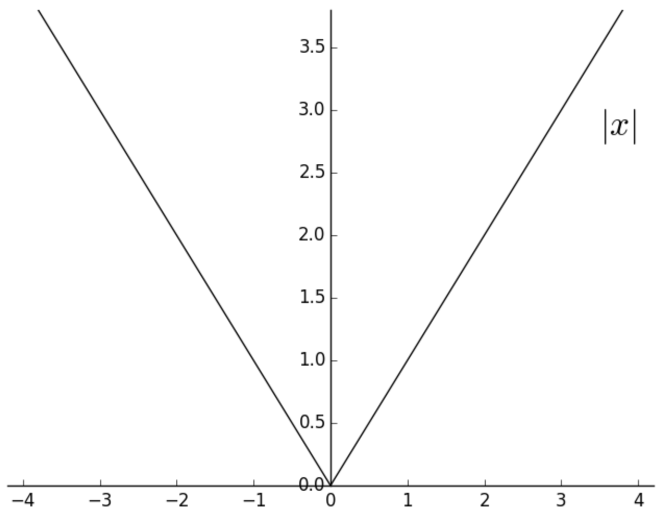

Figure / Abbildung 24: $x \mapsto |x|$

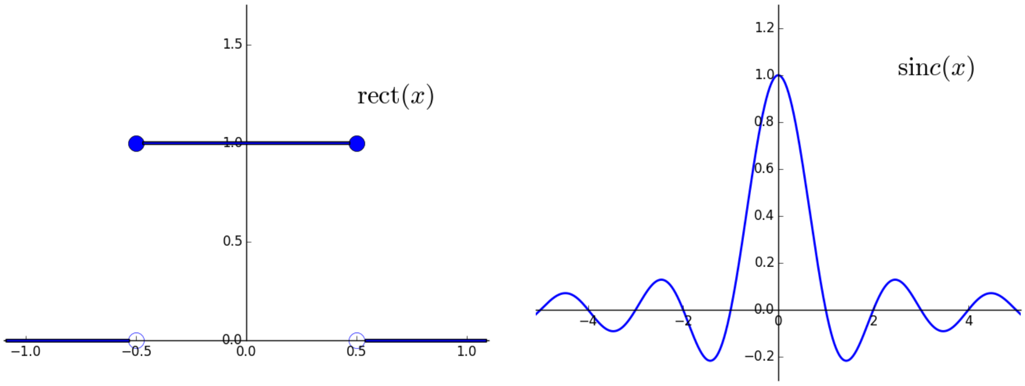

Figure / Abbildung 25: Left: rect $= \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$. Right: sinc, its Fourier transform. / Links: rect $= \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$. Rechts: sinc, die Fourier-Transformation von rect.

7 Differentiation / Differentiation

7.1 Tangent and Secant Lines / Sekanten und Tagenten

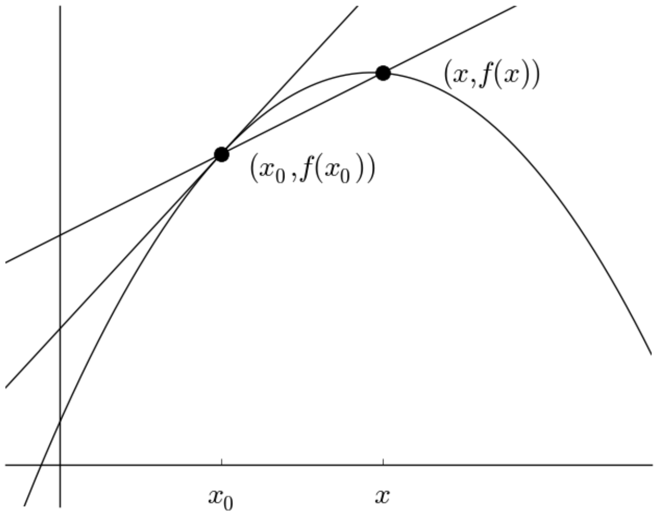

Figure / Abbildung 26: The secant line through $(x, f(x))$ and $(x_0, f(x_0))$ and the tangent line at $(x_0, f(x_0))$. / Die Gerade (Sekante) durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ und die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

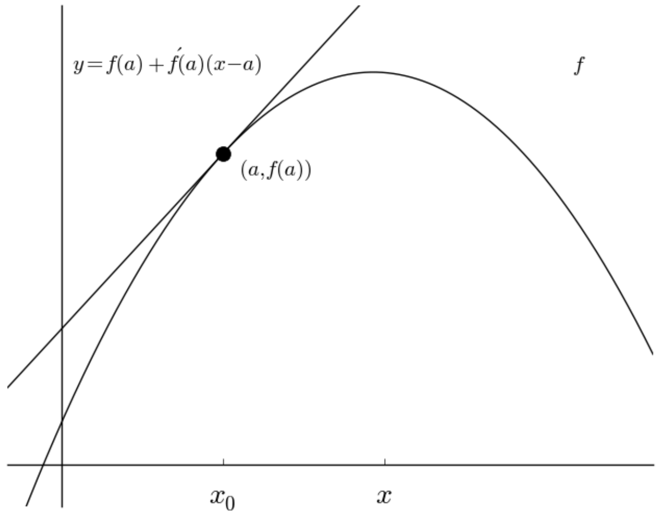

Figure / Abbildung 27: The first Taylor polynomial: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ / Der erste Taylorpolynom: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

7.2 Optima / Optima

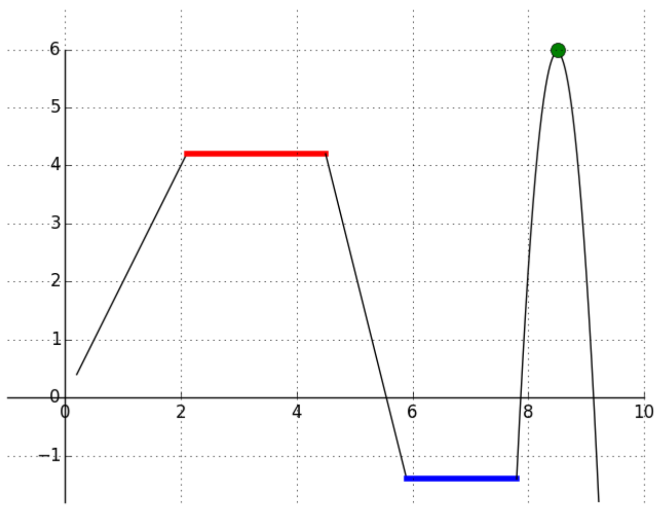

Figure / Abbildung 28: The local maxima of the function are marked in red and the local minima in blue. The green point is a strict global maximum. / Die Abbildung hat in den roten Punkten lokale Maxima, in den blauen Punkten lokale Minima und in dem grünen Punkt ein striktes globales Maximum.

7.3 Convexity / Konvexität

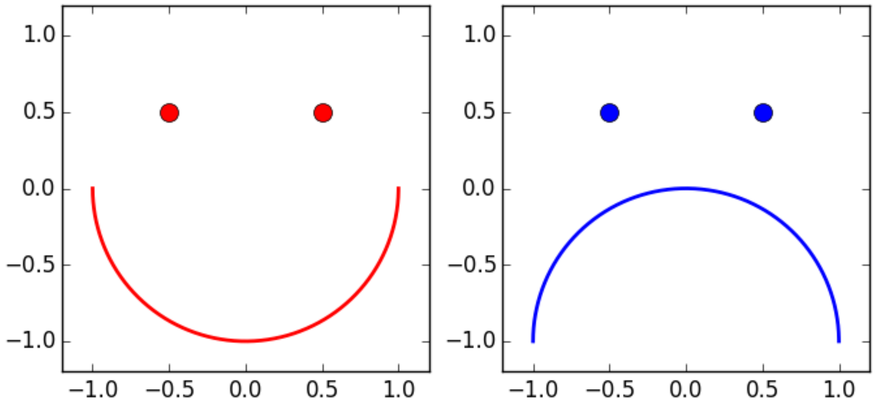

Figure / Abbildung 29: Left: CONVEX!!, right: concaaaaaaaave / Links: KONVEX!!, rechts: konkaaaaaaaaav

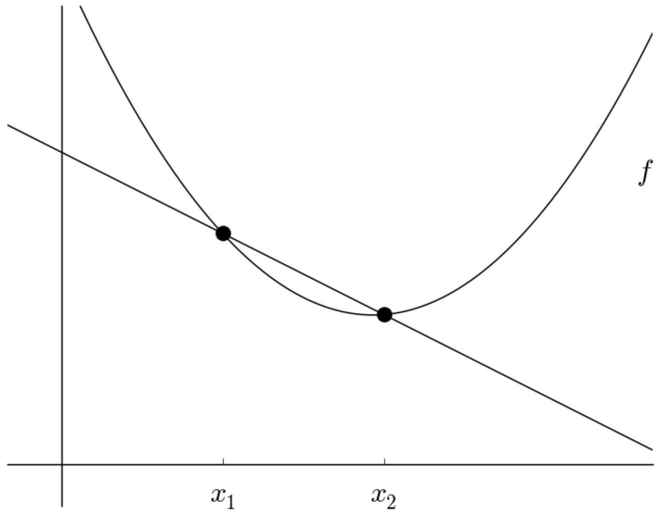

Figure / Abbildung 30: The graph of the convex function f over $[x_1, x_2]$ lies under the secant line through $(x_1, f(x_1))$ and $(x_2, f(x_2))$. / Der Graph von der konvexen f im Intervall $[x_1, x_2]$ liegt unterhalb der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

8 Metrics and Norms / Metriken und Normen

Definition 8.1. Let $p \geq 1$ be a real number and $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. We define a norm $\|\cdot\|_p$ over $\mathbb{F}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{F}, k = 1, \dots, n\}$ by

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

For $p = \infty$ we define

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_k| : k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

The corresponding metrics for $p \in [1, \infty]$ are

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p.$$

We further define the *discrete metric* on $\mathbb{F}^n$ by

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{if } x = y \\ 1, & \text{o.w.} \end{cases} \quad \text{for } x, y \in \mathbb{F}^n.$$

Definition 8.2. Sei p eine reelle Zahl ≥ 1 und $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann definiert man für Vektoren $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ eine Norm $\|x\|_p \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Für $p = \infty$ definieren wir

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_k| : k \in \{1, \dots, n\}\}$$

Die entsprechenden Metriken für $p \in [1, \infty]$ sind

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p.$$

Weiter definieren wir die *diskrete Metrik* auf $\mathbb{F}^n$:

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{F}^n.$$

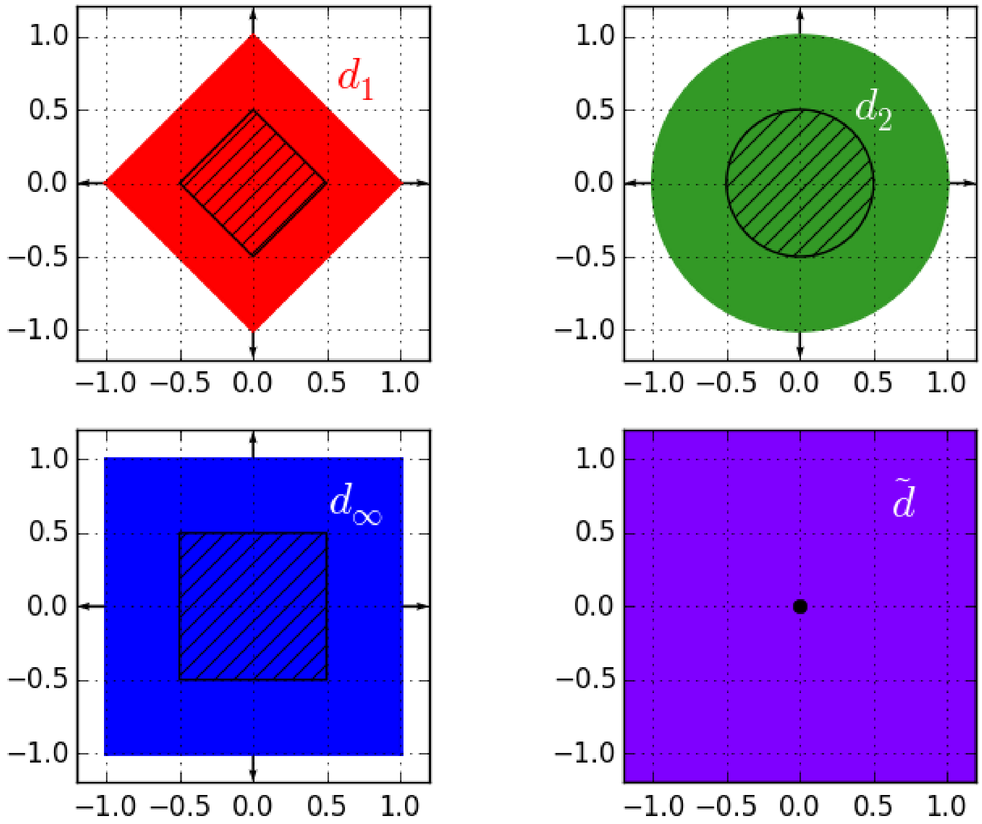

Figure / Abbildung 31: $\overline{B_1(0)}$ (colored region) and $\overline{B_{1/2}}(0)$ (hatched region) with respect to the metrics d_1 (upper left), d_2 (upper right) d_∞ (lower left), and $\tilde{d}$ (lower right) / $\overline{B_1(0)}$ (gefärbte Bereiche) und $\overline{B_{1/2}(0)}$ (schraffierte Bereiche) bzgl. den Metriken d_1 (links oben), d_2 (rechts oben), d_∞ (links unten) und $\tilde{d}$ (rechts unten)

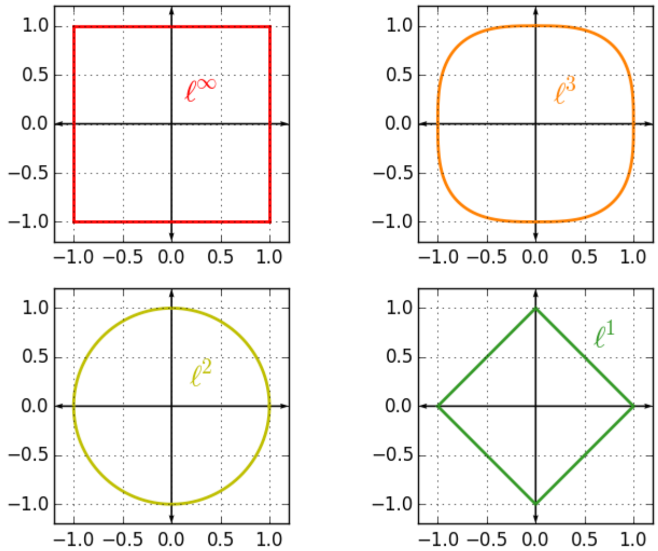

Figure / Abbildung 32: Unit circles of the metrics d_∞ (upper left), d_3 (upper right), d_2 (lower left) und d_1 (lower right) in two dimensions. / Einheitskreise der Metriken d_∞ (oben links), d_3 (oben rechts), d_2 (unten links) und d_1 (unten rechts) in zwei Dimensionen.

9 Integration and Step Functions / Integration und Treppenfunktionen

9.1 Step Functions / Treppenfunktionen

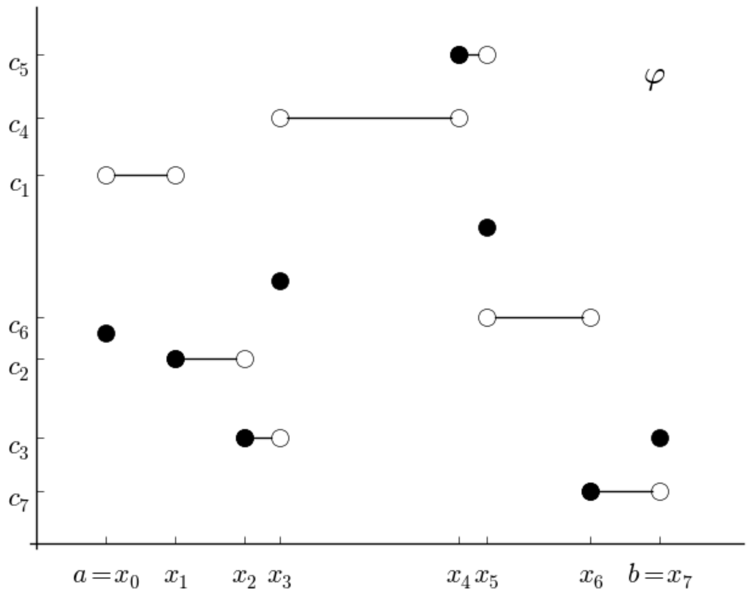

Figure / Abbildung 33: A step function $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ / Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

Theorem 9.1. *Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then for each $\epsilon > 0$ there exist step functions $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ with the following properties:*

1. *$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ for all $x \in [a, b]$ and*

2. *$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon$ for all $x \in [a, b]$.*

Satz 9.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und*

2. *$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$.*

Figure 34 illustrates Theorem 9.1. / Die Abbildung 34 veranschaulicht die Aussage von Satz 9.1.

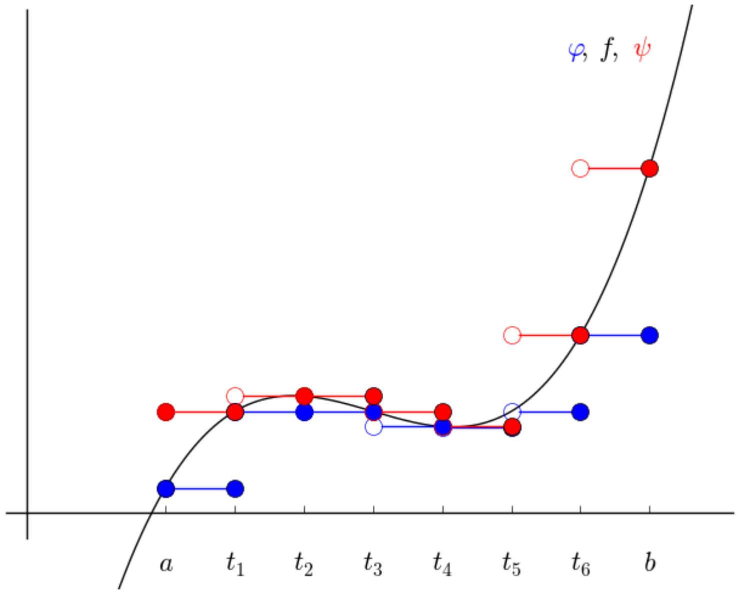

Figure / Abbildung 34: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is approximated above and below by step functions $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$. / $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird durch Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ approximiert.

Proposition 9.2. *Let $\mathcal{T}[a, b]$ be the set of step functions $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Then $\mathcal{T}[a, b]$ is a vector space.*

Proposition 9.3. *Sei $\mathcal{T}[a, b]$ die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Vektorraum.*

Let $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$. Then $\varphi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$. This is shown in Figure 35. / Sei $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$. Dann liegt $\varphi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$. Dies wird im Abbildung 35 veranschaulicht.

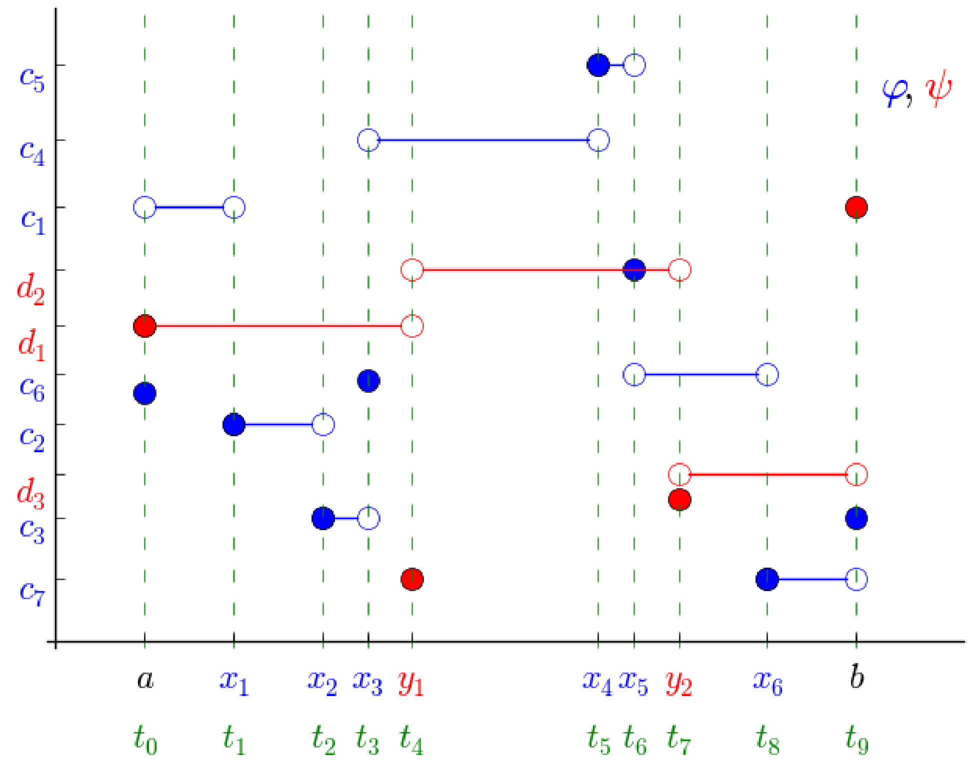

Figure / Abbildung 35: The step function $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (resp., $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$) is defined via the partition $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_7 = b\}$ (resp., $\{y_0 = a, y_1, y_2, y_3 = b\}$). Both φ und ψ are piecewise constant with respect to the refinement $\{t_0 = a, t_1, \ldots, t_9 = b\}$. / Treppenfunktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (bzw. $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$), die bzgl. der Unterteilung $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_7 = b\}$ (bzw. $\{y_0 = a, y_1, y_2, y_3 = b\}$) definiert wird. φ und ψ sind auf der Verfeinerung der Unterteilung $\{t_0 = a, t_1, \ldots, t_9 = b\}$ konstant.

Definition 9.4. Given a function $f : D \to \mathbb{R}$, we define the functions f_+ und f_- as

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{when } f(x) > 0 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{when } f(x) < 0 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

f_+ is called the *positive part* and f_- the *negative part* of f.

Definition 9.5. Für eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildungen

f_+ und f_- durch

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f_+ heißt der *Positivteil* und f_- der *Negativteil.*

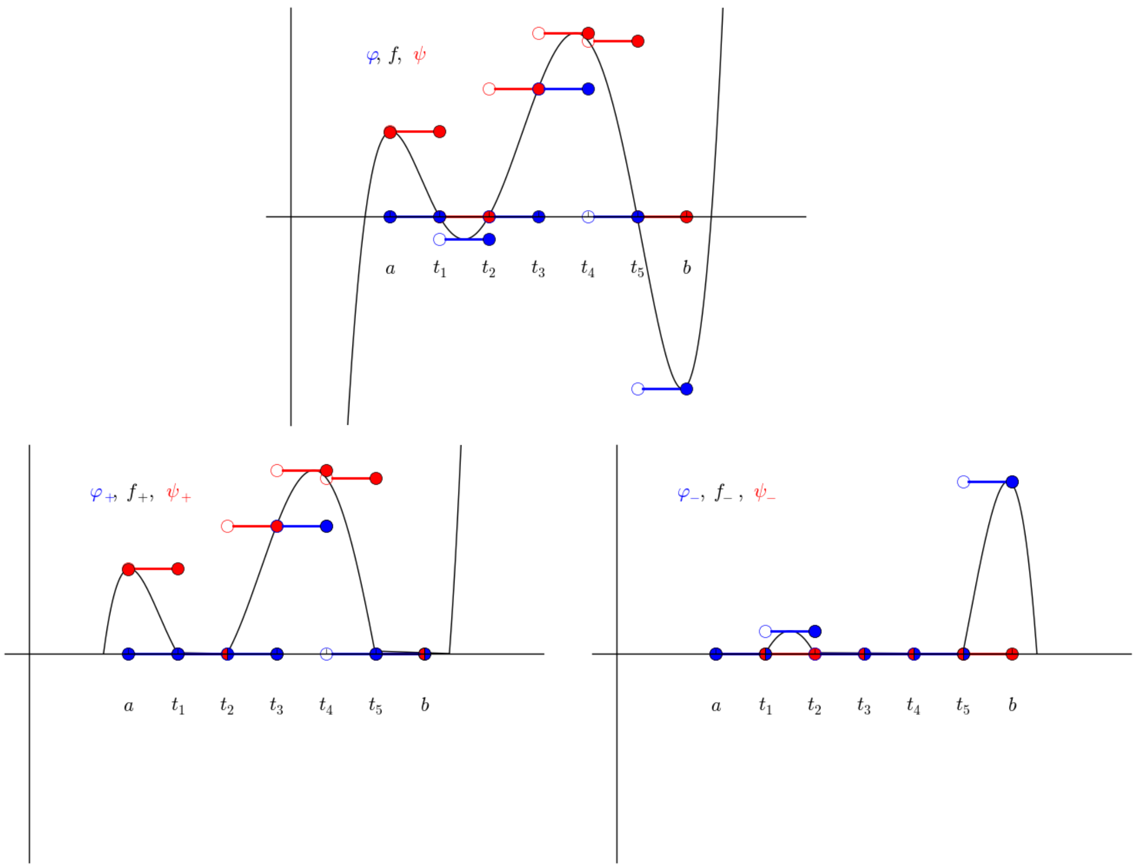

Figure / Abbildung 36: Top: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$, so that $\varphi \leq f|_{[a,b]} \leq \psi$. Bottom left: f_+, φ_+ and ψ_+. Bottom right: f_-, φ_- und ψ_-. / Oben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$, sodass $\varphi \leq f|_{[a,b]} \leq \psi$. Unten links: f_+, φ_+ und ψ_+. Unten rechts: f_-, φ_- und ψ_-.

9.2 Riemann Integration / Riemann-Integration

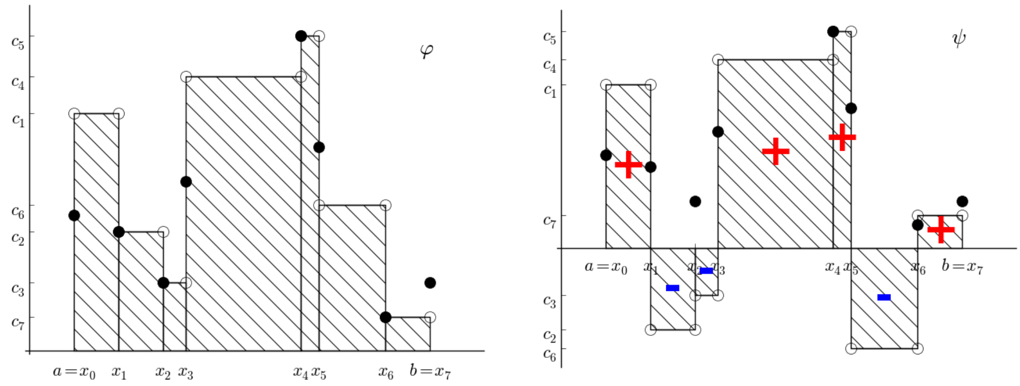

Figure / Abbildung 37: Left: The integral of a positive step function. Right: The integral of a step function with positive and negative values. / Links: Das Integral einer positiven Treppenfunktion. Rechts: Das Integral einer Treppenfunktion mit positiven und negativen Werten.

Proposition 9.6. *The Riemann integral is well-defined over step functions, i.e., it is not dependent on the choice of the underlying partition.*

Proposition 9.7. *Das Riemann-Integral für Treppenfunktionen ist wohldefiniert, das heißt es hängt nicht von der Wahl der Unterteilung* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *ab.*

(A part of the proof of Proposition 9.6 is shown in Figure 38. / Einige Konzepte des Beweises der Proposition 9.7 werden im Bild 38 veranschaulicht.)

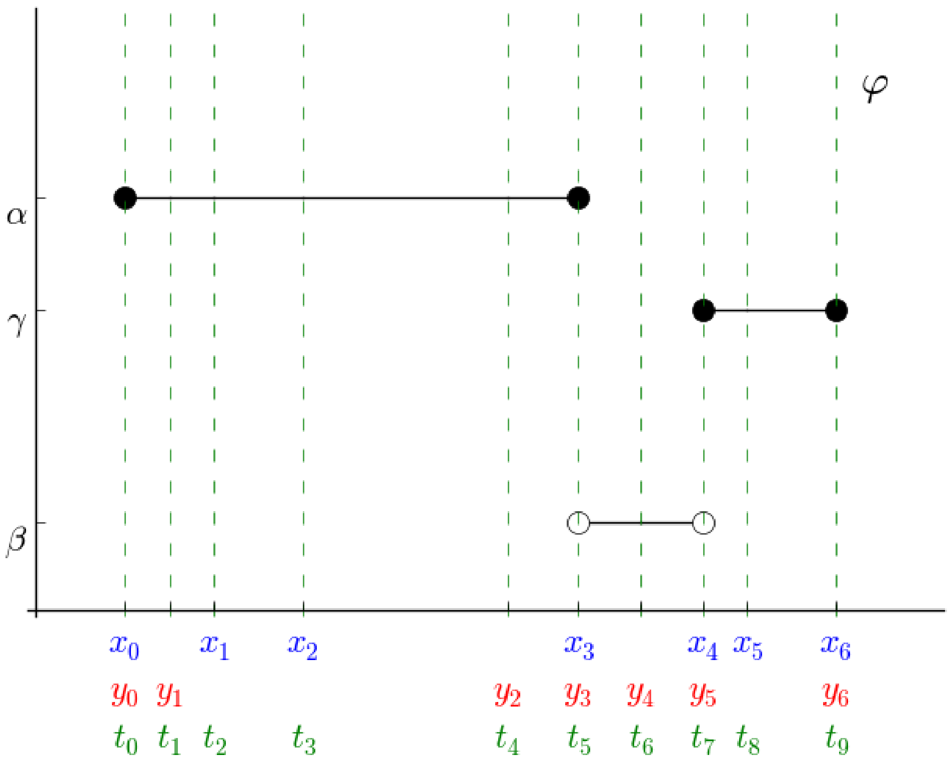

Figure / Abbildung 38: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ is a step function. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_6 = b$, $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_6 = b$, and $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_9 = b$ are partitions such that φ is constant on the subintervals. It also holds that $\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} =: c_k$, $\varphi|_{(y_{j-1},y_j)} =: d_j$, and $\varphi|_{(t_{i-1},t_i)} =: e_i$. Further, $\alpha = c_1 = c_2 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5$, $\beta = c_4 = d_4 = d_5 = e_6 = e_7$, and $\gamma = c_5 = c_6 = d_6 = e_8 = e_9$. / $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_6 = b$, $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_6 = b$ und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_9 = b$ sind Unterteilungen, auf deren Teilintervallen φ konstant ist und gilt $\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} =: c_k$, $\varphi|_{(y_{j-1},y_j)} =: d_j$ und $\varphi|_{(t_{i-1},t_i)} =: e_i$. Es gilt weiter $\alpha = c_1 = c_2 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5$, $\beta = c_4 = d_4 = d_5 = e_6 = e_7$ und $\gamma = c_5 = c_6 = d_6 = e_8 = e_9$.

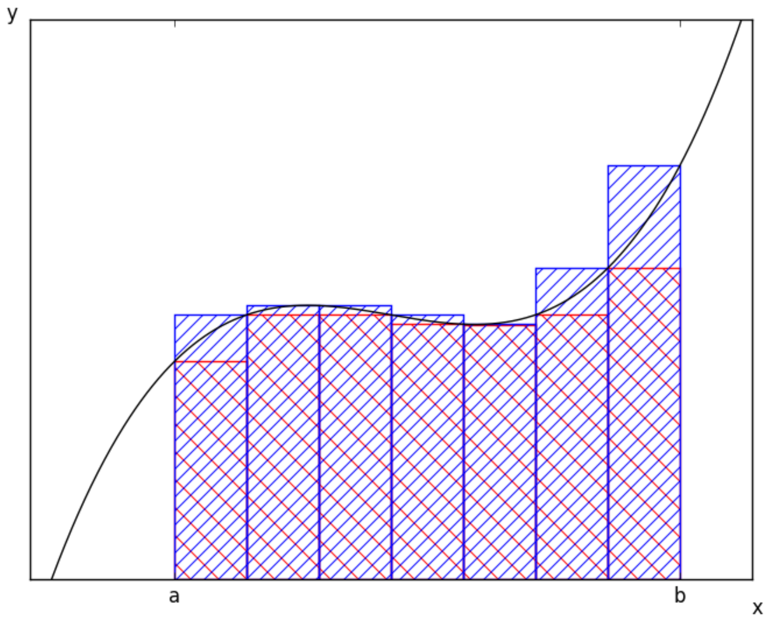

Figure / Abbildung 39: Approximation of a definite integral of a positive function. The area of the blue-hatched region is larger than $\int_a^b f(x)dx$, the area of the red-hatched region smaller. / Approximation des Werts eines bestimmten Integrals einer positiven Abbildung. Der Flächeninhalt des blau-schraffierten Bereichs ist größer als $\int_a^b f(x)dx$, der Flächeninhalt des rot-schraffierten Bereichs kleiner.

10 Linear Algebra / lineare Algebra

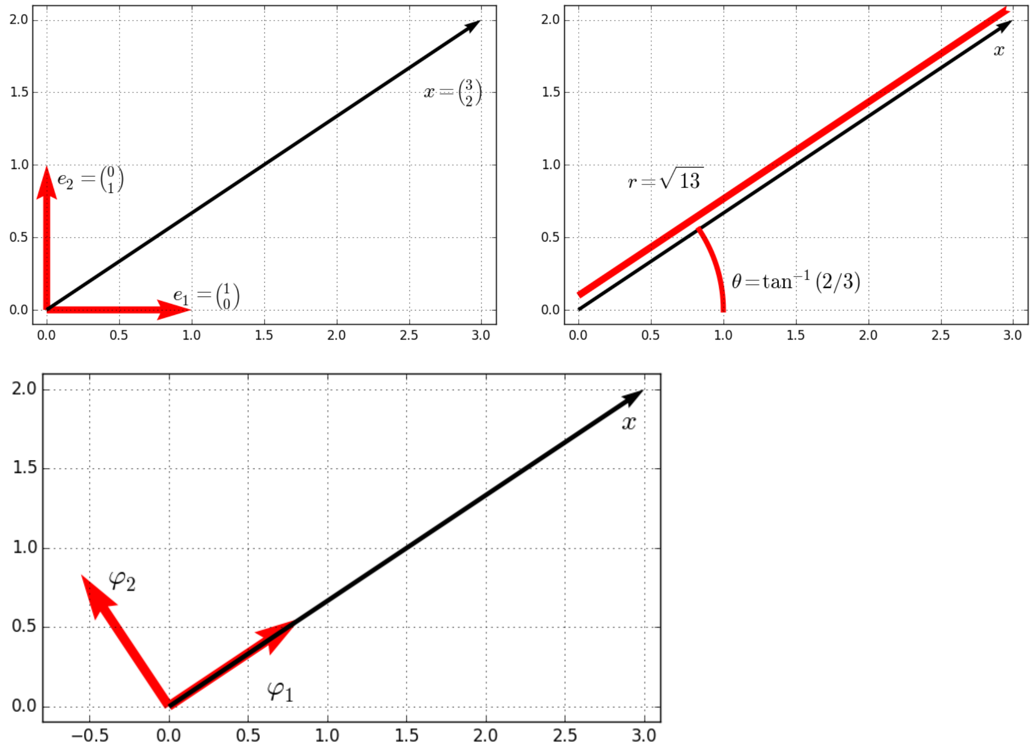

Figure / Abbildung 40: x is $3e_1 + 2e_2$, length $\sqrt{13}$ and an angle of $\tan^{-1}(2/3)$ counterclockwise from the horizontal axis, and $\sqrt{13}\varphi_1$. / $x = 3e_1 + 2e_2$, x hat Länge $= \sqrt{13}$ und Winkel $= \tan^{-1}(2/3)$ und $x = \sqrt{13}\varphi_1$.

11 Harmonic Analysis / harmonische Analysis

11.1 Time-Frequency Analysis / Zeit-Frequenz-Analysis

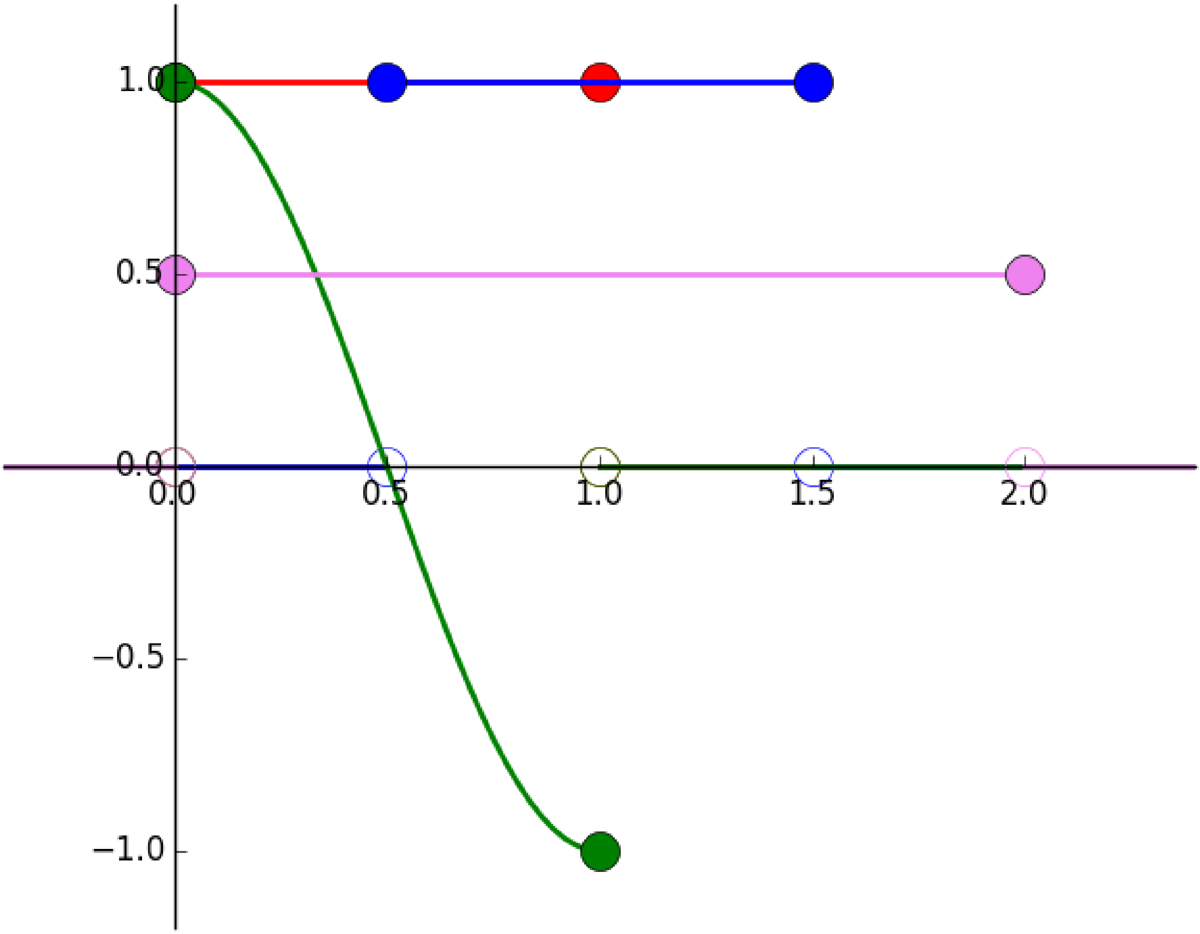

Figure / Abbildung 41: $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ is shown in red. $T_{1/2}f = \mathbb{1}_{[1/2,3/2]}$ is shown in blue. $\Re M_{1/2}f = \cos(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1]}$ is shown in green. $f_{1/2} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}$ is shown in purple. / $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ (rot); $T_{1/2}f = \mathbb{1}_{[1/2,3/2]}$ (blau); $\Re M_{1/2}f = \cos(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1]}$ (grün); $f_{1/2} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}$ (lila).

11.2 Wavelets / Wavelets

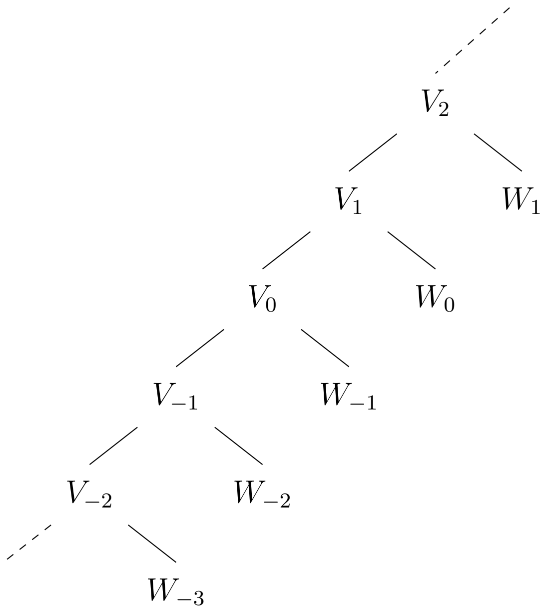

Figure / Abbildung 42: Multiresolution structure with detail and approximation spaces. / Multiskalenanalyse mit Waveletunterräumen und Skalierungsunterräumen.