EINBLICKE
in die Theorie der Kettenbrüche

B. O. Stratmann

Einleitung.

Im folgenden werden wir einige Einblicke in die faszinierende Welt der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ geben. Dazu erinnern wir zunächst an die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Klar dass, wenn wir zwei Zahlen aus $\mathbb{N}$ addieren, wir wieder eine Zahl aus $\mathbb{N}$ erhalten. Anders sieht das aber aus, wenn wir uns die Menge $\mathbb{N}$ unter der Operation 'Subtraktion' anschauen (es sei daran erinnert, dass die Operation 'Subtraktion' als die Umkehrung der Operation 'Addition' aufzufassen ist, oder, mit anderen Worten, dass die 'Subtraktion' die zur Operation 'Addition' *inverse Operation* ist). Subtrahieren wir z.B. die natürliche Zahl 5 von der natürlichen Zahl 3, so ist das Ergebnis keine natürliche Zahl mehr. Um aber nun einer derartigen aus $\mathbb{N}$ herausführenden Subtraktion dennoch einen Sinn zu geben, führen wir die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ein. Für die Menge $\mathbb{Z}$ gilt, dass sie *invariant unter den Operationen* 'Addition' und 'Subtraktion' ist, d.h. sowohl das Addieren als auch das Subtrahieren zweier beliebiger ganzer Zahlen ergibt stets wieder eine ganze Zahl. Der nächste Schritt in der Evolution der Zahlen war dann die Entdeckung der Operation 'Multiplikation'. Klar dass, wenn wir zwei Zahlen aus $\mathbb{N}$ miteinander multiplizieren, das Ergebnis stets wieder eine natürliche Zahl ist. Mit anderen Worten, es gilt, dass die Menge $\mathbb{N}$ invariant unter der Operation 'Multiplikation' ist. Allerdings handeln wir uns hierbei erneut ein Problem ein. Betrachten wir nun nämlich die zur 'Multiplikation' inverse Operation, die 'Division', so stellen wir fest, dass diese uns aus der Menge $\mathbb{N}$ herausführen kann. Dividieren wir z.B. die natürliche Zahl 1 durch die natürliche Zahl 2, so ist das Ergebnis natürlich keine natürliche Zahl mehr (d.h. die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht invariant unter der Operation 'Division'). Um derartige Ergebnisse dennoch sinnvoll zu beschreiben, müssen wir abermals unsere zugrundeliegende Menge $\mathbb{N}$ erweitern. Dieses geschieht durch die Einführung der Menge der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+ = \{p/q : p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}\}$ (dabei bedeutet '$p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd', dass es keine natürliche Zahl ausser 1 gibt, die Teiler von p und q ist). Wie frau/man sofort nachprüft, gilt für die Menge $\mathbb{Q}^+$, dass sie invariant unter den Operationen Multiplikation und Division ist (ja, man könnte auch sagen, dass die Menge $\mathbb{Q}^+$ gerade so gemacht ist, dass sie diese Eigenschaften hat). Dieses stellt aber natürlich noch nicht das Ende der Geschichte dar. Als nächstes betrachten wir nun die Operation 'Potenzieren' auf der Menge $\mathbb{Q}^+$. Der Einfachheit halber betrachten wir dieses nur hinsichtlich des Potenzierens von Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ durch Zahlen aus $\mathbb{N}$, d.h. also wir betrachten Ausdrücke der Form $(p/q)^n$, für $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $n \in \mathbb{N}$. Klar, da $(p/q)^n = p^n/q^n$ und p^n sowie q^n wieder natürliche Zahlen sind, und somit $(p/q)^n \in \mathbb{Q}^+$, gilt, dass die Menge der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ invariant unter der Operation des Potenzierens durch natürliche Zahlen ist. Interessant wird es nun wieder, wenn wir uns die Umkehrung dieser Operation anschauen, d.h. wenn wir uns die zu dem Potenzieren durch natürliche Zahlen inverse Operation, das 'Wurzelziehen', anschauen. Es stellt sich heraus, wie wir gleich sehen werden, dass diese inverse Operation tatsächlich aus unserer jetzigen Grundmenge $\mathbb{Q}^+$ herausführen kann. Das wohl einfachste Beispiel ist die Zahl, die durch die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit Seitenlänge 1 gegeben ist. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras stellt frau/man sofort fest, dass hierbei von der Zahl $\sqrt{2}$ die Rede ist. Aber ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, oder, mit anderen Worten, gilt dass $\sqrt{2} = p/q$, für irgendwelche teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}$? Tatsächlich hatte bereits Euklid (300 v. Chr.) hierauf eine Antwort. Im zehnten Buch des Euklid findet man den folgenden (Widerspruchs-)Beweis für die Tatsache, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann, und dass somit $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein muss!

> *Nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, d.h. dass $\sqrt{2} = p/q$, wobei p und q zwei teilerfremde natürliche Zahlen sind. Dann gilt $p^2 = 2q^2$, was insbesondere zeigt, dass p^2 eine gerade Zahl sein muss (also durch 2 teilbar ist). Da das Produkt zweier ungerader Zahlen stets eine ungerade Zahl ergibt und jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist, ergibt sich hieraus aber insbesondere, dass p eine gerade Zahl sein muss. Somit haben wir $p = 2r$, für irgendeine Zahl $r \in \mathbb{N}$. Setzt man dieses wieder in $p^2 = 2q^2$ ein, so folgt, dass $4r^2 = 2q^2$, also $2r^2 = q^2$. Letzteres zeigt aber, dass q^2 eine gerade Zahl sein muss, woraus hervorgeht, dass auch q eine gerade Zahl sein muss (da, wie bereits oben erwähnt, das Produkt zweier ungerader Zahlen stets eine ungerade Zahl ergibt). Somit haben wir jetzt gezeigt, dass sowohl p als auch q eine gerade Zahl ist, also dass beide durch 2 teilbar sind. Dieses steht aber klar im Widerspruch zu unserer Annahme, dass p und q teilerfremd sind, also keinen gemeinsamen Teiler ausser 1 besitzen. Somit war unsere Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, falsch. Es folgt also, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein muss.*

Aber was bedeutet das wirklich, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist? In welchem Sinn lässt sich die Existenz dieser Zahl überhaupt verstehen? Diese Frage war eine wichtige Frage in der Entwicklung der Mathematik, und streng genommen ist sie das auch noch zum heutigen Zeitpunkt, obwohl man inzwischen natürlich etwas mehr darüber weiß. Dennoch, man stelle sich nur einmal vor, wie man jemanden von der Existenz dieser Zahl überzeugen soll. Dabei wäre z.B. die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ von keiner großen Hilfe, denn für deren erste 70 Stellen hat man das folgende, völlig unregelmäßige Verhalten:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324\ldots$$

Zum Glück gibt es aber andere Möglichkeiten, die Zahl $\sqrt{2}$ darzustellen bzw. zu entwickeln. Eine spezielle Art davon ist die des sogenannten *Kettenbruches*, der einen Grenzwert von rationalen Zahlen darstellt, die etwa $\sqrt{2}$, um bei unserem Beispiel zu bleiben, sehr gut, ja sogar in gewissem Sinne optimal approximieren, und bei dem für $\sqrt{2}$ sogar etwas äußerst Regelmäßiges herauskommt (s. das zweite Beispiel auf Seite 3). Die Grundidee ist, eine rationale Zahl auf eine zunächst eigenartig erscheinende Weise zu schreiben. Betrachten wir etwa die rationale Zahl $57/17$, so rechnet man sofort nach, dass sich diese wie folgt schreiben lässt:

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \frac{\mathbf{1}}{\frac{17}{6}} = 3 + \frac{\mathbf{1}}{2 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{\mathbf{1}}{2 + \frac{\mathbf{1}}{\frac{6}{5}}} = 3 + \cfrac{\mathbf{1}}{2 + \cfrac{\mathbf{1}}{1 + \cfrac{\mathbf{1}}{5}}},$$

und wir werden dafür dann die Schreibweise $57/17 = [3; 2, 1, 5]$ einführen. Der springende Punkt ist dann, dass sich eine derartige Entwicklung auch für irrationale Zahlen finden lässt, diese dann aber nie abbricht, d.h. von unendliche Länge ist. Im folgenden wollen wir uns nun etwas näher mit diesem Konzept 'Kettenbruch' beschäftigen.

Eine Einführung in die Theorie der Kettenbrüche.

Im folgenden werden wir stets annehmen, dass $a_0 \in \mathbb{N}_0$ (d.h. a_0 ist eine nicht-negative ganze Zahl, d.h. $a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) und $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}$ (d.h. für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt dass a_i eine positive ganze Zahl ist, d.h. $a_i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$). Für derartige $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ werden wir uns dann für Ausdrücke der folgenden Form interessieren:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ \ldots}}}.$$

Einen derartigen Ausdruck nennen wir einen *(regulären) Kettenbruch* (abgekürzt:'KB'), und die Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißen die *Eingänge* des KB. Dabei kann die Anzahl der Eingänge eines KB entweder endlich oder unendlich sein. Ist die Anzahl der Eingänge eines KB endlich, so sprechen wir von einem *endlichen KB*. Ist die Anzahl unendlich so sprechen wir von einem *unendlichen KB*. Um derartige Ausdrücke etwas handlicher schreiben zu können, vereinbaren wir die folgende Schreibweise:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ \ldots}}.$$

Für einen endlichen KB ist es unmittelbar klar, dass er eine positive reelle Zahl darstellt (wir werden später sehen, dass dieses in der Tat auch für unendliche KBs zutrifft, und dass sogar die Umkehrung dieser Tatsache richtig ist, d.h. dass sich jede positive reelle Zahl auf eindeutige Weise durch einen KB schreiben lässt). Frau/man kann sich sehr schnell davon überzeugen (?Übung!), dass eine Zahl, die durch einen endlichen KB beschrieben wird immer eine rationale Zahl sein muss! (Wir werden später sehen, dass eine positive reelle Zahl genau dann eine positive irrationale Zahl ist, wenn sie durch einen unendlichen KB dargestellt wird).

Beispiele:

Eine rationale Zahl:

$$\frac{17}{5} = \frac{15+2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 + \frac{1}{\frac{4+1}{2}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [3; 2, 2].$$

Eine irrationale Zahl:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ \ldots}} = [1; 2, 2, 2, 2, \ldots].$$

Beachte, dass bei einem endlichen KB der letzte Eingang gleich 1 sein könnte, was dann zu zwei Arten führen würde eine Zahl durch einen endlichen KB darzustellen. Um Eindeutigkeit zu garantieren, werden wir dieses aber nicht zulassen, d.h. wir vereinbaren, dass der letzte Eingang in einem endlichen KB immer größer als 1 sein soll. In dem obigen Beispiel könnten wir also auch geschrieben haben:

$$\frac{17}{5} = \ldots = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = [3; 2, 1, 1],$$

was wir aber ganz einfach von jetzt ab nicht erlauben werden!

Der KB-Algorithmus:
Gegeben sei eine positive reelle Zahl x *. Mit* $[[x]]$ *bezeichnen wir dann die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich* x *ist. Als Nächstes setzen wir dann* $a_0 = [[x]]$ *. Falls* $a_0 = x$ *, so bricht der Algorithmus bereits ab, und wir sind fertig. In diesem Fall ist der KB von* x *gegeben durch* $[a_0]$ *. Ist hingegen* $a_0 \neq x$ *, dann gibt es eine reelle Zahl* $r_1 > 1$ *, sodass*

$$x = a_0 + \frac{1}{r_1}.$$

Wir betrachten dann r_1 *, und bezeichen mit* $[[r_1]]$ *die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich* r_1 *ist. Dann setzen wir* $a_1 = [[r_1]]$ *. Entweder gilt dann* $x = a_0 + \frac{1}{a_1}$ *, und der Algorithmus bricht an dieser Stelle ab (da dann der KB von* x *gleich* $[a_0; a_1]$ *ist), oder es gilt* $x \neq a_0 + \frac{1}{a_1}$ *. Falls der letztere Fall zutrifft, dann gibt es eine reelle Zahl* $r_2 > 1$ *, sodass*

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_2}}.$$

Wir betrachten dann r_2 *, und bezeichnen mit* $[[r_2]]$ *die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich* r_2 *ist. Wir setzen dann* $a_2 = [[r_2]]$ *, und verfahren ähnlich wie zuvor......*
Der induktive Mechanismus mit dem sich dann ein beliebiges a_n *finden lässt, gegeben das* $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *bereits bestimmt wurden, ist dann wie folgt.*
Nehme an, dass $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *bereits befunden wurden, für irgendein* $n \in \mathbb{N}$ *. Gilt dann*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ \ldots \ \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

so bricht der Algorithmus bereits an dieser Stelle ab, und wir wissen dann, dass x *eine rationale Zahl ist die durch den KB* $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$ *dargestellt wird. Gilt hingegen*

$$x \neq a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ \ldots \ \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

so gibt es eine reelle Zahl $r_n > 1$ *, sodass*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + + \cfrac{1}{a_2 + \ \ldots \ \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{r_n}}}}.$$

Wir betrachten dann r_n *, und bezeichnen mit* $[[r_n]]$ *die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich* r_n *ist. Wir setzen dann* $a_n = [[r_n]]$ *.*
Offensichtlich haben wir dann dass dieser Prozess der Bestimmung von a_n *entweder an irgendeiner Stelle abbricht (was dann bedeutet, dass* x *eine rationale Zahl ist), oder dieser Prozess geht immer weiter, d.h. er bricht niemals ab (was dann bedeutet, dass* x *eine irrationale Zahl sein muss).*

Definition 1 *Für einen gegebenen KB* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *(der entweder endlich oder unendlich ist) definieren wir, für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$, *die folgenden Zahlen:*

- $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *(wobei* $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ *teilerfremd sind);*
- $r_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$.

Die Zahl $\frac{p_n}{q_n}$ *heißt* Approximant n-ter Ordnung, *und* r_n *heißt* Rest n-ter Ordnung.

Theorem 2 *Sei* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *ein gegebener KB (der endlich oder unendlich sein kann). Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt dann*

1. $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$,
2. $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$,
3. $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$,

wobei wir $p_{-1} = q_0 = 1, q_{-1} = 0$ *und* $p_0 = a_0$ *gesetzt haben.*

Beweis: 1. und 2.: (Mittels Induktion!)
Für $n = 0$ gilt

$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}.$$

Dieses zeigt, dass die Behauptung des Theorems für $n = 0$ richtig ist. Also ist damit der *Induktionsanfang* geschafft.
Für den *induktiven Schritt* nehmen wir an, dass die Aussage des Theorems für irgendein $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) und für alle $k < n$ (mit $k \in \mathbb{N}_0$), und somit für alle KBs mit höchstens n Eingängen, richtig ist (diese Annahme stellt die *Induktionsannahme* dar).
Wir betrachten dann zunächst die folgenden Zahlen (wobei wir annehmen, dass die A_i/B_i immer gekürzte Brüche darstellen, d.h. A_i und B_i sollen immer teilerfremd sein):

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}, [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}] = \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}} \text{ und } [a_1; a_2, \ldots, a_{n-2}] = \frac{A_{n-3}}{B_{n-3}}.$$

Da es sich bei diesen KBs sämtlichst ausschließlich um KBs mit höchstens n Eingängen handelt, können wir auf diese die Induktionsannahme anwenden. Somit folgt, dass

$$A_{n-1} = a_n A_{n-2} + A_{n-3} \text{ und } B_{n-1} = a_n B_{n-2} + B_{n-3}.$$

Ausserdem haben wir

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}]} = a_0 + \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}} = \frac{a_0 A_{n-2} + B_{n-2}}{A_{n-2}},$$

woraus dann folgt, dass

$$p_{n-1} = a_0 A_{n-2} + B_{n-2} \text{ und } q_{n-1} = A_{n-2}.$$

Durch eine ähnliche derartige Rechnung (?Übung!) erhalten wir dann auch, dass

$$p_{n-2} = a_0 A_{n-3} + B_{n-3} \text{ und } q_{n-2} = A_{n-3}.$$

Diese beiden Beobachtungen benutzen wir nun in der folgenden Rechnung:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} = a_0 + \frac{a_n B_{n-2} + B_{n-3}}{a_n A_{n-2} + A_{n-3}} = \frac{a_0(a_n A_{n-2} + A_{n-3}) + (a_n B_{n-2} + B_{n-3})}{a_n A_{n-2} + A_{n-3}}$$

$$= \frac{a_n(a_0A_{n-2}+B_{n-2})+a_0A_{n-3}+B_{n-3}}{a_nA_{n-2}+A_{n-3}} = \frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

Hieraus ergeben sich dann sofort die Aussagen in 1. und 2..
Um die Aussage in 3. zu beweisen, multipliziere frau/man die Gleichung in 1. auf beiden Seiten mit q_n, und die Gleichung in 2. mit p_n. Dann ziehe die erste der so erhaltenen Gleichungen von der zweiten ab. Auf diese Weise erhalten wir:

$$q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = -(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}).$$

Wir verfahren dann völlig analog mit den beiden Gleichungen $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$ und $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$, woraus sich dann ergibt, dass

$$q_np_{n-1} - p_nq_{n-1} = -(q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2}).$$

Offensichtlich können wir das genau $(n+1)$-mal machen (bis wir bei $q_0p_{-1}-p_0q_{-1}$ angekommen sind), und hieraus ergibt sich dann, dass

$$q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = -(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) = \ldots = (-1)^{n+1}(q_0p_{-1} - p_0q_{-1}) = (-1)^{n+1},$$

also genau die Aussage in 3.. □

Korollar 3 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}.$$

Beweis: ?Übung!.

Theorem 4 *Sei* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *ein gegebener KB (der endlich oder unendlich sein kann). Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt dann*

$$q_{n+1}p_{n-1} - p_{n+1}q_{n-1} = (-1)^n a_{n+1}.$$

Beweis: Multipliziere 1. im vorherigen Theorem mit q_{n-1}, und 2. mit p_{n-1}. Subtrahiere die erste der so erhaltenen Gleichungen von der zweiten. Daraus ergibt sich:

$$q_{n+1}p_{n-1} - p_{n+1}q_{n-1} = a_{n+1}(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) = (-1)^n a_{n+1},$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Aussage 3. in Theorem 2 benutzt haben. □

Korollar 5 *Sei* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *ein gegebener KB (der endlich oder unendlich sein kann). Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt dann*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n a_{n+1}}{q_{n+1}q_{n-1}}.$$

Beweis: ?Übung!.

Lemma 6 *Für die Nenner* q_n *der Approximanden eines KBs gilt, für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$,

$$q_nq_{n-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n-1}.$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1},$$

woraus folgt, dass

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}.$$

Durch $n/2$-maliges, bzw. $(n-1)/2$-maliges (davon anhängig ob n gerade oder ungerade ist), Anwenden dieser Ungleichung ergibt sich dann

$$q_n \geq \ldots \geq \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} q_0 & \text{für} \quad \text{gerades } n \\ 2^{\frac{n-1}{2}} q_1 & \text{für} \quad \text{ungerades } n \end{cases}$$

$$\geq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Unter Benutzung dieser Abschätzung, erhält frau/man dann

$$q_n q_{n-1} \geq 2^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-2}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n-1}.$$

$\square$

Proposition 7 *Für jeden unendlichen KB* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Die Folge* $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *der Approximanden von* x *mit geradzahliger Ordnung ist eine streng steigende Folge von Zahlen (d.h.* $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \ldots$*).*
2. *Die Folge* $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ *der Approximanden von* x *ungerader Ordnung ist eine streng fallende Folge von Zahlen (d.h.* $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \ldots$*).*
3. *Jeder Approximand von* x *mit ungerader Ordnung ist größer als jeder Approximand von* x *mit gerader Ordnung. Gleichfalls ist jeder Approximand von* x *mit gerader Ordnung stets kleinerer als jeder Approximand von* x *mit ungerader Ordnung.*
4. *Für den Abstand von aufeinanderfolgenden Approximanden von* x *gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) = 0.$$

Mit anderen Worten, für jedes x mit unendlichem KB und dessen Approximanden p_n/q_n gilt

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \nearrow x \swarrow \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \ldots \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Insbesondere haben wir somit, dass

$$x = \lim_{n \to \infty} p_n/q_n.$$

Beweis: Unter Verwendung von Korollar 5 erhält frau/man:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1} a_{2n+2}}{q_{2n} q_{2n+2}} = \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{a_{2n+2}}{q_{2n} q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}},$$

und

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n} a_{2n+1}}{q_{2n-1} q_{2n+1}} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} + \frac{a_{2n+1}}{q_{2n-1} q_{2n+1}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Hieraus ergeben sich die ersten beiden Aussagen der Proposition. Zum Nachweis der dritten Aussagen benutzen wir Korollar 3 und das was wir soeben bewiesen haben. Auf diese Weise erhalten wir

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n-3}}{q_{2n-3}} < \ldots < \frac{p_1}{q_1}.$$

Dieses zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ echt kleiner ist als jene Approximanden von x die eine ungerade Ordnung kleiner oder gleich $2n+1$ besitzen. - Wir zeigen nun (durch einen *Widerspruchsbeweis*), dass letzteres auch für **alle** Approximanden ungerader Ordnung größer als $2n+1$ gültig ist. Dazu nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist, d.h. wir nehmen an, dass es eine ungerade Zahl $2k+1$ gibt, die echt größer ist als $2n+1$, so dass gilt

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \geq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Die Aussage 1. der Proposition, die wir ja bereits bewiesen haben, ergibt dann

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \ldots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.$$

Die Kombination dieser beiden Ergebnisse ergibt dass

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.$$

Ganz offensichtlich steht diese Aussage aber im Widerspruch zu dem was wir eingangs des Beweises bereits festgestellt haben, nämlich dass

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Somit haben wir einen Widerspruch erhalten, und daher kann unsere obige Annahme nicht richtig gewesen sein. Mit anderen Worten, wir haben jetzt gezeigt dass es **keine** ungerade Ordnung $2k+1$ gibt, die echt größer ist als $2n+1$ und für die gilt, dass $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \geq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$. Somit ist der Nachweis der Aussage in 3. geführt.
Der Beweis der Aussage in 4. folgt sofort aus dem was wir in Korollar 3 und Lemma 6 bereits gefunden haben (?Übung!).

□

Theorem 8 *Für* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$x = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Beweis: (Mittels Induktion!) Für $n = 0$ haben wir

$$\frac{p_0 r_1 + p_{-1}}{q_0 r_1 + q_{-1}} = \frac{a_0 r_1 + 1}{r_1} = a_0 + \frac{1}{r_1} = x.$$

Dies liefert den Induktionsanfang. Für den induktiven Schritt nehme man dann an, dass die Behauptung richtig sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. wir nehmen an, dass $x = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$ zutrifft). Damit rechnet man dann nach, dass

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n(a_{n+1} + \frac{1}{r_{n+2}}) + p_{n-1}}{q_n(a_{n+1} + \frac{1}{r_{n+2}}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_n a_{n+1} r_{n+2} + p_n + p_{n-1} r_{n+2}}{q_n a_{n+1} r_{n+2} + q_n + q_{n-1} r_{n+2}} = \frac{(p_n a_{n+1} + p_{n-1}) r_{n+2} + p_n}{(q_n a_{n+1} + q_{n-1}) r_{n+2} + q_n} = \frac{p_{n+1} r_{n+2} + p_n}{q_{n+1} r_{n+2} + q_n}. \end{aligned}$$

□

Korollar 9 *Für* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$r_{n+1} = \frac{-q_{n-1} x + p_{n-1}}{q_n x - p_n}.$$

Beweis: (?Übung!) (Hinweis: Löse die Gleichung in Theorem 8 nach r_{n+1} auf.) $\square$

Definition 10 • *Eine irrationale positive Zahl y heißt quadratische irrationale Zahl, falls es drei ganze Zahlen $A, B, C \in \mathbb{Z}$ (wobei $A, C \neq 0$ sein müssen) gibt derart, dass*

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

- *Frau/man sagt, dass eine reelle Zahl x eine periodische Kettenbruchentwicklung besitzt, falls $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ und der KB von irgendeiner Stelle ab periodisch ist, d.h. wenn es Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a_{m+l} = a_m$ für alle $m \geq k$ gilt, d.h.*

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+l-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots].$$

(In dieser Situation schreibt man dann oft auch

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+l-1}}].)$$

Theorem 11 *Eine irrationale Zahl x besitzt eine periodische Kettenbruchentwicklung genau dann wenn x eine quadratische irrationale Zahl ist.*

Beweis: Für die eine Richtung der zu zeigenden Äquivalenz nehmen wir an, dass x eine periodische Kettenbruchentwicklung besitzt. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ so dass

$$r_{m+l} = r_m \text{ für alle } m \geq k.$$

Unter Verwendung von Theorem 8, hat man dann

$$x = \frac{p_{m-1}r_m + p_{m-2}}{q_{m-1}r_m + q_{m-2}} = \frac{p_{m+l-1}r_{m+l} + p_{m+l-2}}{q_{m+l-1}r_{m+l} + q_{m+l-2}} = \frac{p_{m+l-1}r_m + p_{m+l-2}}{q_{m+l-1}r_m + q_{m+l-2}},$$

und somit

$$\frac{p_{m-1}r_m + p_{m-2}}{q_{m-1}r_m + q_{m-2}} = \frac{p_{m+l-1}r_m + p_{m+l-2}}{q_{m+l-1}r_m + q_{m+l-2}}.$$

Multipliziert man nun beide Seiten der letzten Gleichung mit den beiden darin vorkommenden Nennern, so rechnet man sofort nach (?Übung!), dass sich die so erhaltene Gleichung in die folgende Form bringen lässt:

$$Ar_m^2 + Br_m + C = 0,$$

wobei A, B und C gewisse ganze Zahlen bezeichnet (die nur von $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2}, p_{m+l-1}, p_{m+l-2}, q_{m+l-1}, q_{m+l-2}$ abhängen). Dies zeigt, dass die Zahl r_m eine quadratische irrationale Zahl ist. Mit diesem Wissen gehen wir jetzt zurück zu der bereits zuvor erhaltenen Gleichung

$$x = \frac{p_{m-1}r_m + p_{m-2}}{q_{m-1}r_m + q_{m-2}}.$$

Aus dieser Gleichung errechnet man sofort (siehe Korollar 9), dass

$$r_m = \frac{-q_{m-2}x + p_{m-2}}{q_{m-1}x - p_{m-1}}.$$

Setzt man diese Darstellung von r_m in die obige Gleichung $Ar_m^2 + Br_m + C = 0$ ein, so folgt

$$A\left(\frac{-q_{m-2}x + p_{m-2}}{q_{m-1}x - p_{m-1}}\right)^2 + B\left(\frac{-q_{m-2}x + p_{m-2}}{q_{m-1}x - p_{m-1}}\right) + C = 0,$$

und somit

$$A(-q_{m-2}x + p_{m-2})^2 + B(q_{m-1}x - p_{m-1})(-q_{m-2}x + p_{m-2}) + C(q_{m-1}x - p_{m-1})^2 = 0.$$

Durch Auflösen der Klammern und Umsortieren überzeugt man sich dann (?Übung!), dass diese Gleichung wie folgt geschrieben werden kann:

$$Dx^2 + Ex + F = 0,$$

wobei D, E und F gewisse ganze Zahlen bezeichnet (die nur von $A, B, C, p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}$, q_{m-2} abhängig sind). Dieses zeigt, dass x eine quadratische irrationale Zahl ist.
Der Beweis für die andere Richtung der Äquivalenz solll hier nicht gegeben werden. $\square$

Das waren:

$$\text{Einblicke} + \cfrac{1}{\text{in} + \cfrac{1}{\text{die} + \cfrac{1}{\text{Theorie} + \cfrac{1}{\text{der} + \cfrac{1}{\text{Kettenbrüche}}}}}}$$