Universität Bremen
Fachbereich 3 - Mathematik

Übungsexamen zur Vorlesung Analysis 1 (WS 2012/13)

Aufgabenblatt 13

1. Verwenden Sie das *Prinzip der vollständigen Induktion*, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **[10]**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. Finden Sie heraus, ob die folgenden *Grenzwerte* existieren und für die Fälle in denen der Grenzwert existiert, bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{2n^5+7}{(n^3+1)\cdot n^2} \right)$ **[3]**

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}-n^3}{n^3+3^{2n}}$ **[3]**

   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{2n+1} + \frac{3\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}+7} \right)$ **[4]**

3. Untersuchen Sie die *Konvergenz*, beziehungsweise *Divergenz*, der folgenden Reihen. (Begründen Sie Ihre Antworten, und benennen Sie jeweils das von Ihnen benutzte Kriterium, also z.B. *Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Leibnizkriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, ...* .)

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5n^3+1}$ **[3]**

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^7\cdot 3^{n+1}}$ **[3]**

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{2n+1}$ **[4]**

4. Beweisen Sie, dass für alle *komplexe Zahlen* $z \in \mathbb{C}$ gilt: **[10]**

$$\sqrt{2}\cdot|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

5. Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* und den *Konvergenzkreis* der folgenden Potenzreihe: **[10]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3^n}\,(z-4)^n, \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

6. (a) Geben Sie die ε-δ-*Definition für die Stetigkeit* einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. **[3]**

   (b) Formulieren Sie die das *Folgenkriterium für die Stetigkeit* einer Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. **[3]**

   (c) Finden Sie alle reelle Punkte, an denen die Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *unstetig* ist, wobei die Funktion h für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch **[4]**

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ 4 - x^3 & \text{für } 2 \le x \le 3 \\ 2x - 30 & \text{für } 3 < x \le 4 \\ \sqrt{121\,x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

7. Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $\phi : J \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig auf* J, falls es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass $|\phi(x) - \phi(y)| < K \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in J$ erfüllt ist.
   Geben Sie einen Beweis dafür, dass eine auf J Lipschitz-stetige Funktion stets auch *stetig* auf J ist. **[10]**

8. (a) Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage. **[7]**

   Eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die stetig ist aber nicht differenzierbar. Bestimmen Sie für die von Ihnen gewählte Funktion den Definitionsbereich, den Wertebereich, und die Menge der Punkte, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist. Skizzieren den Graphen der von Ihnen gewählten Funktion. **[3]**

9. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
(Sie erhalten **1 Punkt** für jede richtige Antwort.)

(a) Die *Menge der ganzen Zahlen* bildet bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen einen *angeordneten Körper*.

wahr oder **falsch**: ____________________

(b) Die irrationalen Zahlen liegen *dicht* in der Menge der reellen Zahlen.

wahr oder **falsch**: ____________________

(c) Die Menge der *Häufungspunkte* einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ kann mehr als ein Element enthalten.

wahr oder **falsch**: ____________________

(d) Eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ für die der *limes inferior* und der *limes superior* übereinstimmen, besitzt genau einen Grenzwert.

wahr oder **falsch**: ____________________

(e) Jede *Cauchy-Folge* in dem offenen Einheitsintervall $(0, 1)$ ist konvergent.

wahr oder **falsch**: ____________________

(f) Nicht jede *Umordnung* einer konvergenten Reihe in $\mathbb{R}$ führt zu einer konvergenten Reihe.

wahr oder **falsch**: ____________________

(g) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht notwendig *injektiv*.

wahr oder **falsch**: ____________________

(h) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stets *surjektiv*.

wahr oder **falsch**: ____________________