UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 7

(Themen der Woche 7: Vergleich von Regel-, Riemann- und Lebesgue-Integral; Anwendungen der Konvergenztheoreme für das Lebesgue-Integral; Parameter-abhängige Integrale; L^p-Räume.)

1. Zeigen Sie, dass wenn $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar über $[0,1]$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ_1 und es gilt, dass der Wert des zugehörigen Riemann-Integrals mit dem des zugehörigen Lebesgue-Integrals übereinstimmt. **[10]**

2. Für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, berechnen Sie das Integral

$$I_n(x) := \int_0^x s^n e^{-s}\, ds$$

indem Sie das Parameter-abhängige Integral

$$F(x,y) := \int_0^x e^{-sy}\, ds$$

nach der zweiten Komponente differenzieren. **[12]**

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für die n-te partielle Ableitung nach der zweiten Komponente der Funktion F an der Stelle $(x,1)$ gilt, dass

$$I_n(x) = (-1)^n \frac{\partial^n F}{(\partial y)^n}(x,1)$$

und zeigen Sie dann induktiv, dass für alle $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ gilt, dass

$$\frac{\partial^n F}{(\partial y)^n}(x,y) = (-1)^n \frac{n!}{y^{n+1}} \left(1 - e^{-xy} \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!}\right)$$

3. Für den Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, sei $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

[10]

4. Beweisen Sie die *Minkowski-Ungleichung für L^p-Räume*, d.h. zeigen Sie, dass wenn $1 \le p \le \infty$ und $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, dann gilt

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

(Hierbei können Sie die *Hölder-Ungleichung* als bekannt voraussetzen.) **[10]**

5. Beweisen Sie die folgende Aussage:

In einem metrischen Raum gilt, dass wenn eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist diese Cauchy-Folge eine konvergente Folge.

[8]