UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 6

(Themen der Woche 6: Vektorwertige und komplexe Integrale; Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral.)

1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen für die gilt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ existiert und für die weder $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und $\limsup_{n\to\infty} b_n = +\infty$ noch $\liminf_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ gültig ist. Dann gilt **[10]**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

2. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative messbare Funktion auf dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, m)$ und sei $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von einfachen Funktionen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ definiert sind durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n^2} a_{n,k} \cdot \chi_{A_{n,k}}(x)$$

wobei, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n^2-1\}$,

$$a_{n,k} := \frac{k}{n}, a_{n,n^2} := n, A_{n,n^2} := \{x \in X : n \leq f(x)\} \text{ und } A_{n,k} := \left\{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$$

   (a) Finden Sie heraus ob $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. **[3]**

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n$ **[3]**

   (c) Finden Sie heraus ob sich $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,dm$ mit Hilfe von f ausdrücken lässt. **[3]**

3. Es sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion auf dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Beweisen Sie, dass es für alle $\epsilon > 0$ eine messbare Menge A von endlichem μ-Maß gibt, sodass gilt **[10]**

$$\left|\int_X f d\mu - \int_A f d\mu\right| < \epsilon$$

4. Es sei $(a_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix mit nicht-negativen reellen Eingängen $a_{n,i}$, sodass für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(a_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und konvergent ist. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{n,i} = \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} a_{n,i}$$

indem Sie die Summen als Integrale bezüglich des Zählmaßes auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ auffassen. (Das Zählmaß m auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ ist dasjenige Maß, welches einer Menge $A \subset \mathbb{N}$ ihre Kardinalität $m(A) := \mathrm{card}(A)$ zuordnet, wobei $\mathrm{card}(A)$ gleich $+\infty$ ist, wenn die Menge A unendlich viele Elemente besitzt.) **[10]**

5. (a) Geben Sie ein Beispiel für das die *strikte* Ungleichung im Lemma von Fatou gültig ist. **[3]**

   (b) Es bezeichne λ_1 das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Verwenden Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz um zu zeigen, dass **[7]**

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{[0,1]}\sqrt{x}e^{-n^2x^2}\,d\lambda_1(x)\right) = 0$$