UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 5

(Themen der Woche 5: Messbare Abbildungen; einfache Funktionen; Lebesgue-Integral.)

1. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ mit $X_i \in \mathcal{A}$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass wenn die Abbildung $f|_{X_i} : X_i \to Y$ $\mathcal{A}|_{X_i} - \mathcal{B}$-messbar ist, für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist f $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar. **[7]**

   (Hierbei bezeichnet $f|_{X_i}$, bzw. $\mathcal{A}|_{X_i}$, die Einschränkung von f, bzw $\mathcal{A}$, auf X_i.)

2. Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion auf dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und die Funktion $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$m(A) := \int_A f \, d\mu, \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

   Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum ist. **[7]**

3. Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage: **[10]**

   Jede messbare numerische Funktion f kann eindeutig als Differenz $f = f^+ - f^-$ zweier nicht-negativer messbarer Funktionen f^+ und f^- dargestellt werden, so dass $\min\{f^+, f^-\} = 0$ ist. Dabei gilt dann, dass $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := -\min\{f, 0\}$.

4. Betrachten Sie die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} := \left(1_1, \ldots, 1_{\ell(1)}, 2_1, \ldots, 2_{\ell(2)}, 3_1, \ldots, 3_{\ell(3)}, \ldots\right)$, wobei $\ell(n) := 2^{n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und wobei

   $$n_k := k - 2^n - 1, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } k \in \{1, \ldots, \ell(n)\}.$$

   Die Funktionen $g_{n_k} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sind dann definiert durch

   $$g_{n_k}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \left[\frac{n_k}{2^n}, \frac{n_k+1}{2^n}\right] \\ 1 & \text{für } x \in \left[\frac{n_k}{2^n}, \frac{n_k+1}{2^n}\right] \end{cases}$$

   (a) Untersuchen Sie das Verhalten von $\lim\limits_{m\to\infty} g_{a_m}(x)$, für alle $x \in [-1, 1]$. **[4]**

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{[-1,1]} g_{a_m} \, d\lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. **[4]**

5. Es sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion über dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

   (a) Zeigen Sie, dass die folgende sogenannte *Markoff-Ungleichung* gültig ist: **[6]**

   $$\alpha \cdot \mu(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}) \leq \int_X f d\mu, \text{ für alle } \alpha > 0$$

   (b) Zeigen Sie, dass wenn $\int_X f d\mu$ endlich ist, dann folgt, dass $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ eine μ-Nullmenge ist. **[6]**

   (c) Zeigen Sie, dass $\int_X f d\mu = 0$ genau dann, wenn die Menge $\{x \in X : f(x) > 0\}$ eine μ-Nullmenge ist. **[6]**