# UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
# - Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

## Aufgabenblatt 4

(Themen der Woche 4: Weitere Betrachtungen zur Caratheodoryschen Maßkonstruktion; (Borel-)Lebesgue-Maß; äußeres $t$-dimensionales Hausdorff-Maß; messbare Abbildungen.)
(Im Folgenden bezeichnet $\lambda_1$ das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-$\sigma$-Algebra über $\mathbb{R}$.)

1. Es bezeichne $\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{N}, 0 < p < q \text{ und } \operatorname{ggT}(p,q) = 1\right\}$ die Menge der rationalen Zahlen des Einheitsintervalls $(0,1)$ (wobei $\operatorname{ggT}(p,q)$ den größten gemeinsamen Teiler von $p$ und $q$ bezeichnet), und für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\frac{p}{q} \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ sei
$$\mathcal{I}_s := \left\{x \in (0,1) : x \in I\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b^s}\right) \text{ für höchstens endlich viele } \frac{a}{b} \in \widetilde{\mathbb{Q}}\right\},$$
wobei
$$I\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q^s}\right) := \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^s}\right\}.$$
Zeigen Sie, dass für jedes $s > 2$ gilt, dass $\lambda_1(\mathcal{I}_s) = 1$. **[10]**
(*Hinweis: Das Borel–Cantelli Lemma könnte hier hilfreich sein.*)

2. Sei $\mathcal{C}$ die 1/4–Cantormenge, die durch den folgenden induktiven Prozess gegeben ist. Sei $C_0 := [0,1]$ das Einheitsintervall in $\mathbb{R}$. Die Menge $C_1$ erhält man, indem man $C_0$ in vier gleich große Intervalle aufteilt und die beiden mittleren Intervalle entfernt, d.h. man entfernt das offene Intervall $(1/4, 3/4)$ aus $C_0$, so dass zwei Intervalle übrig bleiben, also $C_1 := [0,1/4] \cup [3/4,1]$. Die Menge $C_2$ erhält man, indem aus den beiden Intervallen in $C_1$ jeweils wiederum die beiden mittlere Viertel entfernt werden, d.h. $C_2 := [0,1/16] \cup [3/16,1/4] \cup [3/4,13/16] \cup [15/16,1]$. Durch Fortsetzung dieses Prozesses des jeweiligen Entfernens der beiden mittleren Viertel der im vorherigen Schritt erhaltenen Intervalle, erhält man nach $n$ Schritten die Menge $C_n$, die eine Vereinigung von $2^n$ paarweise disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge $(1/4)^n$ ist. Die 1/4–Cantormenge $\mathcal{C}$ ist dann definiert durch $\mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ nicht abzählbar ist. **[2]**
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ abgeschlossen ist. **[2]**
   (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. **[2]**
   (d) Zeigen Sie, dass $\lambda_1(\mathcal{C}) = 0$. **[6]**
   (e) $(*)$ Zeigen Sie, dass für das äußere $t$-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}_t^*$ gilt, dass $\mathcal{H}_t^*(\mathcal{C}) = 0$, für alle $t > 1/2$. **[6]**

3. Es bezeichne $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ die *charakteristische Funktion* der Menge $A \subset X$, für eine beliebige nicht leere Grundmenge $X$ (siehe Vorlesung Analysis 2). Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $A, B \subset X$ und für alle Folgen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen in $X$ gültig sind.
   (a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ **[2]** (b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ **[2]** (c) $\chi_{A^c} = \chi_X - \chi_A$ **[2]**
   (d) $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\chi_A \leq \chi_B$ **[2]** (e) $\chi_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \chi_{A_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\chi_X - \chi_{A_i}\right) \cdot \chi_{A_{i+1}}$ **[4]**

4. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$, dann heißt $\mu$ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß.* Außerdem heißt eine wachsende rechtsseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Verteilungsfunktion*, falls gilt, dass $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Geben Sie einen Beweis für das folgende sogenannte *Korrespondenztheorem.* **[10]**

   *Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist durch $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$ (für alle $x \in \mathbb{R}$), eine Verteilungsfunktion gegeben. Umgekehrt gibt es für jede Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Maß $\mu$ so dass $F_\mu = F$.*