UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 3

(Themen der Woche 3: μ^*-Messbarkeit; äußeres Lebesgue-Maß; äußeres t-dimensionales Hausdorff-Maß; Caratheodory's Maßkonstruktion.)
(Hinsichtlich des Begriffes λ^*-*Nullmenge* (bzw. P-*Nullmenge*), siehe Aufgabe 4 auf Aufgabenblatt 1, wobei dort $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$(bzw. X), und ℓ durch λ^* (bzw. P) zu ersetzen ist.)

1. Es sei $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass

$$\{A \cup B : A \in \mathcal{A} \text{ und } \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } B \subset N \text{ und } m(N) = 0\}$$

eine σ-Algebra bildet. **[8]**

2. Es sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ entweder } A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$ und es sei $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ für beliebige $A \in \mathcal{A}$ gegeben durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob μ ein (**a**) Prämaß, (**b**) äußeres Maß, (**c**) Maß ist. **[10]**

3. Beweisen Sie, dass das in der Vorlesung eingeführte äußere t-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}_t^*$ für jedes $t \geq 0$ tatsächlich ein äußeres Maß ist. **[10]**

4. (a) Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage. (Diese Aussage wird auch als das *Borel-Cantelli Lemma* bezeichnet.)

   - *Sei $(X, \mathcal{A}, P)$ ein Maßraum, wobei P ein* Wahrscheinlichkeitsmaß *ist, d.h. P ist ein Maß mit der Eigenschaft $P(X) = 1$. Für eine abzählbar unendliche Menge $I \subset \mathbb{N}$, sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Folge von Ereignissen in X, d.h. $E_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$. Außerdem sei die Menge E_∞ gegeben durch*

   $$E_\infty := \{x \in X : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \textit{ so dass } \forall k \in \mathbb{N} \textit{ gilt } n_{k+1} > n_k, n_k \in I, x \in E_{n_k}\}$$

   Dann gilt die folgende Implikation: **[6]**

   $$\sum_{i \in I} P(E_i) \textit{ konvergiert} \Longrightarrow P(E_\infty) \textit{ ist eine } P\textit{-Nullmenge}$$

   (b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Umkehrung der Implikation in dem Borel-Cantelli Lemma im Allgemeinen falsch ist, d.h. zeigen Sie, dass die folgende Implikation im Allgemeinen **nicht** gültig ist: **[4]**

   $$\sum_{i \in I} P(E_i) \text{ divergiert} \Longrightarrow E_\infty \text{ ist keine } P\text{-Nullmenge}$$

5. Es sei λ^* das in der Vorlesung eingeführte äußere Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine λ^*-Nullmenge ist. (Hierbei können Sie die Tatsache verwenden, dass eine abzählbare Vereinigung von λ^*-Nullmengen eine λ^*-Nullmenge ist.) **[4]**

   (b) Es sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine auf dem $(n-1)$-dimensionalen Einheitsquader $Q := \bigtimes_{k=1}^{n-1} [0, 1]$ definierte stetige Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph $\{(x, f(x)) : x \in Q\}$ von f eine λ^*-Nullmenge ist. **[8]**