UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 2

(Themen der Woche 2: Borelmengen; Prämaße; äußere Maße; Maße.)

1. Es sei $\mathcal{C}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge X und es sei $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine Funktion, die von den Werten $+\infty$ oder $-\infty$ höchstens einen annimmt (eine solche Funktion heißt *Mengenfunktion*). Zeigen Sie, dass wenn ϕ σ-additiv ist und $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{C}$ ist derart, dass $\phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$ endlich ist, dann ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \phi(C_i)$ absolut konvergent. **[10]**

2. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ mit $a < b$, sei der *vertikale Streifen* $S_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$S_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, y \in \mathbb{R}\}$$
Es sei $\mathcal{A}$ die durch $\{S_{a,b} : a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, a < b\}$ erzeugte Algebra und es sei die Funktion $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ wie folgt gegeben: $\rho(S_{a,b}) := b - a$, für alle vertikalen Streifen $S_{a,b}$, und für alle endlichen Mengen $\{S_{a_1,b_1}, ..., S_{a_n,b_n}\}$ von paarweise disjunkten vertikalen Streifen gilt
$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_{a_i,b_i}\right) := \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$
Zeigen Sie, dass ρ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$ ist. **[10]**

3. Es sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ entweder } A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$ und es sei $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ für beliebige $A \in \mathcal{A}$ gegeben durch
$$m(A) := \begin{cases} \text{card}(A) & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$
Hierbei bezeichnet $\text{card}(A)$ die Anzahl der Elemente in A.
Finden Sie heraus, ob $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum ist. **[10]**

4. Es sei $\{(X, \mathcal{A}, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Menge von Maßräumen, alle über der selben σ-Algebra $\mathcal{A}$. Außerdem sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fest vorgegebene Folge von positiven reellen Zahlen, mit deren Hilfe dann die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ definiert sei durch
$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \mu_n(A), \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$
Zeigen oder widerlegen Sie, dass μ ein Maß ist. **[10]**

5. Geben Sie einen Beweis dafür, dass ein Maß *stetig von oben* ist, d.h. zeigen Sie, dass die folgende Eigenschaft in jedem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \nu)$ Gültigkeit hat:

   - Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\nu(A_n) < \infty$ und $A_n \supset A_{n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:
   $$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

   [10]