UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2013/14
- Übungen zur Vorlesung Analysis 3 -

Aufgabenblatt 1

(Themen der Woche 1: Regel- und Riemann-Integral; fundamentale Mengensysteme; messbare Räume, σ-Algebren.)

1. Es seien A und B Teilmengen einer gegebenen Menge X. Die *symmetrische Differenz* $A\Delta B$ von A und B ist gegeben durch

$$A\triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten für beliebige $A, B, C \subset X$ gültig sind:

(a) $A\triangle B = B\triangle A$ **[1]**

(b) $A\triangle A = \emptyset$ **[1]**

(c) $A\triangle\emptyset = A$ **[1]**

(d) $A\triangle X = A^c$ **[1]**

(e) $A\triangle A^c = X$ **[1]**

(f) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A\triangle B)$ **[1]**

(g) $(A\triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ **[2]**

(h) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$ **[2]**

2. Für eine Menge Y betrachte man die folgende Menge von Teilmengen von Y:

$$\mathcal{A} := \{A \subset Y : \text{ entweder } A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. **[12]**

3. Es sei Z eine nicht-leere, endliche Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen, und es sei $\mathcal{B}$ gegeben durch:

$$\mathcal{B} := \{B \subset Z : B \text{ hat eine gerade Anzahl von Elementen}\}$$

Finden Sie heraus, ob $(Z, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum ist. **[12]**

4. Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}$ heißt ℓ*-Nullmenge*, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Menge $\mathcal{C}$ von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$E \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{C}} I \quad \text{und} \quad \sum_{I\in\mathcal{C}} \ell(I) < \epsilon$$

Hierbei bezeichnet $\ell(I)$ die Länge des Intervalls I, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ist die Länge $\ell((a, b))$ des offenen Intervalls (a, b) gegeben durch $\ell((a, b)) := b - a$.

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine ℓ-Nullmenge ist. **[3]**

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine ℓ-Nullmenge ist. **[4]**

(c) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine ℓ-Nullmenge ist. **[2]**

(d) ($*$) Es sei $\mathcal{I} = \{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche Menge von Intervallen in $\mathbb{R}$, für die gilt $\sum_{i\in\mathbb{N}} \ell(I_i) < \infty$. Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine ℓ-Nullmenge ist:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \in I_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

[7]