Universität Bremen
Fachbereich 3 - Mathematik

- Übungsexamen zur Vorlesung Analysis 2 (SS 2013) -

Prof. Dr. B. O. Stratmann
Tutoren: Hendrik Weyer, Malte Koch, Christopher Schael

1. Auf $\mathbb{R}^n$ sei die Funktion $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für ein festes $p \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ für alle } (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

   Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

2. (a) Geben Sie die Definition eines Banachraums.
   (b) Zeigen Sie, dass in einem Banachraum jede Cauchyfolge genau einen Grenzwert besitzt.

3. Untersuchen Sie die absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

4. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(0) := 0 \text{ und } f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ für } x \in (0,1]$$

   (a) Zeigen Sie, dass f Riemann integrierbar ist.
   (b) Ist f eine Regelfunktion? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

5. Finden Sie mit Hilfe des Integralkriteriums für Reihen heraus, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n^n))^{-1}$$

   konvergent oder divergent ist.

6. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \sqrt{1+x^2}$, bestimme man die Ableitungen f' und f'' und bestimme dann das Taylorpolynom 2. Ordnung von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

7. Sei $F : U \to Y$ eine Abbildung einer offenen Teilmenge U eines Banachraums $(X, \|\cdot\|_X)$ in einen Banachraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Ausserdem seien $x_0 \in U$ und $v \in X$ gegeben.
   (a) Definieren Sie was es heisst, dass F an der Stelle x_0 differenzierbar ist.
   (b) Definieren Sie was es heisst, dass für F an der Stelle x_0 die Richtungsableitung in Richtung v existiert.
   (c) Beweisen Sie, dass wenn F an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist F an der Stelle x_0 stetig.

8. (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_F(x,y,z)$ der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$F((x,y,z)) := \left(e^{-8x^2} + y - z, y^4 + \sin z^2, xyz + 7x + (\cosh z)^2\right), \text{ für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

   (b) Verwenden Sie das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, durch

$$f((x,y)) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

   um zu beweisen, dass eine differenzierbare Funktion im Allgemeinen nicht notwendig stetig partiell differenzierbar ist.

9. (a) Aus einer Differentialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ leite man mit Hilfe von $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ab.
   (b) Verwenden Sie das Ergebnis in (a) und berechnen Sie, für $0 < x < \sqrt[3]{e}$, die Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} + \frac{x^2}{(y(x))^2} = 0, \text{ wobei } y(1) = 1$$

10. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) = 12y'(x) + 28y(x)$$