UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 8

(Themen der Woche 8: lineare beschränkte Abbildungen; Differenzierbarkeit auf Banachräumen; totales Differential; Richtungsableitung; partielle Differenzierbarkeit).

1. Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden Banachräumen X und Y.

   (a) Beweisen Sie, dass wenn A jede beschränkte Teilmenge in X auf eine beschränkte Teilmenge in Y abbildet, dann ist A eine beschränkte Abbildung. **[4]**

   (b) Wie in der Vorlesung eingeführt, ist die Operatornorm $\|A\|_o$ gegeben durch

   $$\|A\|_o := \inf\{\alpha \geq 0 : \|A(x)\| \leq \alpha\|x\|, \text{ für alle } x \in X\}$$

   Zeigen Sie, dass die folgenden drei Gleichheiten gültig sind: **[6]**

   $$\begin{aligned} \|A\|_o &= \sup\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} = \sup\{\|A(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

2. Es seien $F, G : U \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in U$ differenzierbare Abbildungen (hierbei bezeichnet $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$). Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Produkt $F \cdot G$ in x_0 differenzierbar ist und dass für das Differential $D(F \cdot G)(x_0)$ von $F \cdot G$ an der Stelle x_0 gilt: **[10]**

   $$D(F \cdot G)(x_0) = G(x_0) \cdot DF(x_0) + F(x_0) \cdot DG(x_0)$$

3. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$F((x,y)) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

   (a) Ist F differenzierbar in $(0,0)$? **[5]**

   (b) Ist F partiell differenzierbar in $(0,0)$? **[5]**

4. Es sei die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$H((x_1,x_2)) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x_1,x_2) \notin A \\ e^{x_1} - 1 & \text{für } (x_1,x_2) \in A \end{cases}$$

   wobei die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

   $$A := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \text{ und } x_1 \neq 0\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung H in $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann partiell differenzierbar ist, wenn $x \notin A$. **[5]**

   (b) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \{w \in \mathbb{R}^2 : \|w\|_\infty = 1\}$ gilt, dass die Richtungsableitung $D_vH((0,0))$ von H an der Stelle $(0,0)$ in die Richtung v existiert. **[5]**

5. Geben Sie einen Beweis für die Gültigkeit der *Cauchy-Schwarzschen Ungleichung* im $\mathbb{R}^n$, d.h. zeigen Sie, dass für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt **[10]**

   $$\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$