UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 7

(Themen der Woche 7: Riemann Integrierbarkeit; Mengen vom Lebesgue-Maß Null; uneigentliche Integrale; absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale; Integralkriterium für Reihen).

1. Für $a \in \mathbb{R}$ fest, sei $f_a\colon [a, a+1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = a \\ \sin\left(\frac{1}{x-a}\right) & \text{für } x \in (a, a+1]. \end{cases}$$

   (a) Ist f_a *Riemann integrierbar*? (Begründen Sie Ihre Antwort.) **[2]**

   (b) Ist f_a eine *Regelfunktion*? (Begründen Sie Ihre Antwort.) **[2]**

2. Beweisen Sie das *Konvergenzkriterium von Cauchy für uneigentliche Integrale über Regelfunktionen*, d.h. beweisen Sie die folgende Aussage:

   Sei $f : [a, \infty) :\to \mathbb{R}$ *eine Regelfunktion (d.h.* $f_u : [a, u] \to \mathbb{R}$ *ist eine Regelfunktion, für alle* $u > a$ *, wobei* f_u *gegeben ist durch* $f_u(x) := f(x)$ *, für alle* $x \in [a, u]$ *). Dann existiert das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *genau dann, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $u_0 > 0$ *gibt, so dass für alle* $u_1, u_2 \geq u_0$ *gilt, dass*

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

   (Sie können dabei das *Konvergenzkriterium von Cauchy für Funktionen* benutzen). **[10]**

3. (a) Beweisen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen das *Lebesgue-Maß Null* hat. **[6]**

   (b) Zeigen Sie, dass wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, so dass die Menge $A \subset [a, b]$ aller Punkte an denen f nicht stetig ist die Eigenschaft hat, dass A das *Lebesgue-Maß Null* hat, dann ist f *Riemann-integrierbar*. **[10]**

4. Untersuchen Sie die *Konvergenz* und *absolute Konvergenz* der beiden folgenden uneigentlichen Integrale.

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\sin(x))^2}{x}\,dx$ **[4]**

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + x^2}\,dx$ **[6]**

5. Zeigen Sie mit Hilfe des *Integralkriteriums für Reihen*, dass **[10]**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^s} \begin{cases} \text{konvergiert} & \text{für } s > 1 \\ \text{divergiert} & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$