UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 6

(Themen der Woche 6: Regelfunktionen; Integralbegriff für Regelfunktionen; Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Riemann-Integral).

1. Es sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierte Funktion. Zeigen Sie, dass wenn es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$ auf $[a,b]$ normal konvergent ist und $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$, dann ist ϕ eine Regelfunktion. **[10]**

2. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es seien $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Die Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei dann definiert durch

$$G(x) := \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(t)\ dt$$

wobei das Integral als Integral über Regelfunktionen zu verstehen ist.

   (a) Zeigen Sie, dass G auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. **[6]**

   (b) Drücken Sie die Ableitung G' von G durch die Funktionen g, ϕ, ϕ', ψ und ψ' aus. **[6]**

3. Für $0 < s < t < \infty$ und $y > 0$ sei $\Gamma_{s,t}(y)$ gegeben durch

$$\Gamma_{s,t}(y) := \int_s^t x^{y-1} e^{-x}\, dx$$

   (a) Verwenden Sie *partielle Integration* um zu zeigen, dass **[6]**

$$\Gamma_{s,t}(y+1) = s^y e^{-s} - t^y e^{-t} + y\, \Gamma_{s,t}(y)$$

   (b) Verwenden Sie das Resultat in (a) und stellen Sie $\Gamma(y)$ mit Hilfe eines bestimmten Integrals dar, wobei $\Gamma(y)$ definiert ist durch: **[4]**

$$\Gamma(y) := \lim_{t\to\infty} \left(\lim_{s\to 0} \Gamma_{s,t}(y) \right)$$

   (c) Verwenden Sie das Resultat in (b) und zeigen Sie, dass **[3]**

$$\Gamma(y+1) = y \cdot \Gamma(y), \text{ für alle } y > 0$$

   (d) Verwenden Sie das Resultat in (c) und zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Gamma(n) = (n-1)!$ **[1]**

(*Historische Anmerkung:* Die Funktion Γ geht auf Euler zurück und heisst *Gammafunktion.*)

4. Es sei $Z_0 : [-2,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Z_0(x) := 1 - |x|$, für alle $x \in [-2,2]$. Man setze die Funktion Z_0 durch $Z(x) := Z_0(x-4k)$, für alle $x \in [4k-2, 4k+2]$ und $k \in \mathbb{Z}$, zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten 4*-periodischen Funktion* $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort (d.h. $Z(x+4) = Z(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$). Man definiere dann die Funktion $W : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $W(0) := 0$ und $W(x) := Z\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in (0,1]$.

   (a) Ist die Funktion Z stetig auf $\mathbb{R}$? (Antwort mit Begründung!) **[3]**

   (b) Ist die Funktion W stetig auf $\mathbb{R}$? (Antwort mit Begründung!) **[3]**

   (c) Ist die Funktion W eine Regelfunktion auf $[0,1]$? (Antwort mit Begründung!) **[4]**

   (d) Ist die Funktion W Riemann-integrierbar auf $[0,1]$? (Antwort mit Begründung!) **[4]**